DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 09. Oktober 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[18 Punkte]* Berechnen Sie. . .

(a) *[5 Punkte]* . . . für eine invertierbare Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ die Determinante

$$\det\Big(\big(E_3 - A^T\big)\big(E_3 + A^{-1}\big)^T \cdot A^T + \big(A^2\big)^T\Big);$$

(b) *[7 Punkte]* . . . in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix B mit

$$B := \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ b & 1 & b \\ b^2 & b & 1 \end{pmatrix};$$

(c) *[6 Punkte]* . . . für $h \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von

$$H := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h & h+1 & 0 \\ h+1 & h+1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det\Big(\big(E_3 - A^T\big)\big(E_3 + A^{-1}\big)^T \cdot A^T + \big(A^2\big)^T\Big) &= \det\Big(\big(E_3 - A^T\big)\big(E_3 + \big(A^T\big)^{-1}\big) \cdot A^T + \big(A^T\big)^2\Big) \\
&= \det\Big(\big(E_3 + \big(A^T\big)^{-1} - A^T - E_3\big) \cdot A^T + \big(A^T\big)^2\Big) \\
&= \det\Big(\big(E_3 - \big(A^T\big)^2 + \big(A^T\big)^2\Big) \\
&= \det E_3 = 1.
\end{aligned}$$

(b) Per elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ b & 1 & b \\ b^2 & b & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 1-b^2 & b-b^3 \\ 0 & 0 & 1-b^2 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rg} B = 3$, falls $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, und

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ für } b = 1 \text{ bzw. } \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ für } b = -1.$$

(c) Für das charakteristische Polynom q_H von H errechnet man direkt:

$$q_H(\lambda) = \det(H - \lambda E_3) = -(\lambda + 1)(\lambda - h)(\lambda - 1).$$

H besitzt also die Eigenwerte ± 1 und h.

Aufgabe 2. *[18 Punkte]* Es bezeichne $L(A,b)$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit der quadratischen Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$.

(a) *[10 Punkte]* Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(A) Für jedes $A \in M_2(\mathbb{R})$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^2$, so dass $L(A,b)$ genau ein Element enthält.

(B) Für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $A \in M_2(\mathbb{R})$, so dass $L(A,b)$ genau ein Element enthält.

(C) Für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $A \in M_2(\mathbb{R})$, so dass $L(A,b)$ leer ist.

(D) Für jedes nicht invertierbare $A \in M_2(\mathbb{R})$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^2$, so dass $L(A,b)$ unendlich viele Elemente enthält.

(b) *[8 Punkte]* Geben Sie alle Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ an, so dass mit $b := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$L(A,b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Aussage

(A) ist falsch, denn setze $A = 0$;

(B) ist wahr, denn wähle $A = E_2$;

(C) ist falsch, denn setze $b = 0$;

(D) ist wahr, denn wähle $b \in \text{Bild}(A)$ und beachte, dass das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen enthält.

(b) Für A muss gelten

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Löst man dieses lineare Gleichungssysteme aus vier Gleichungen für die vier Einträge der Matrix A, erhält man die eindeutige Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *[16 Punkte]* Es sei P_2 der reelle Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und

$$\begin{aligned} F : P_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

(b) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie Bild(F) und Kern(F).

(c) *[6 Punkte]* Geben Sie darstellende Matrix M_F von F bzgl. der Basis $\{1, x, x^2\}$ von P_2 und der Basis $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ von $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a) Für $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ aus P_2 und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(p+q) = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = F(p) + F(q) \quad \text{und}$$

$$F(\lambda p) = \begin{pmatrix} \lambda a_0 \\ \lambda a_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda F(p).$$

(b) Bild$(F) = \mathbb{R}^2$, denn:
Für beliebiges $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ setze $p(x) := x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$. Dann folgt $F(p) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$.

Kern$(F) = \{a_2x^2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\}$, denn:

$$p \in \text{Kern}(F) \Leftrightarrow F(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p(x) = a_2x^2.$$

(c) Wegen

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die darstellende Matrix

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *[16 Punkte]* Betrachten Sie eine reelle Zahlenfolge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Zahlenfolge $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n = \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n+1}\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) *[5 Punkte]* Zeigen Sie: Falls die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Zahl a konvergiert, so konvergiert $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a.

(b) *[5 Punkte]* Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. Um dies zu zeigen, geben Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ an so, dass die zugehörige Folge $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) *[6 Punkte]* Beweisen Sie: Falls die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und die Folge $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
Hinweis: Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Lösung:

(a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt zunächst $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\Big) = \frac{1}{2}(a+a) = a,$$

und nach Definition von b_n bedeutet dies $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

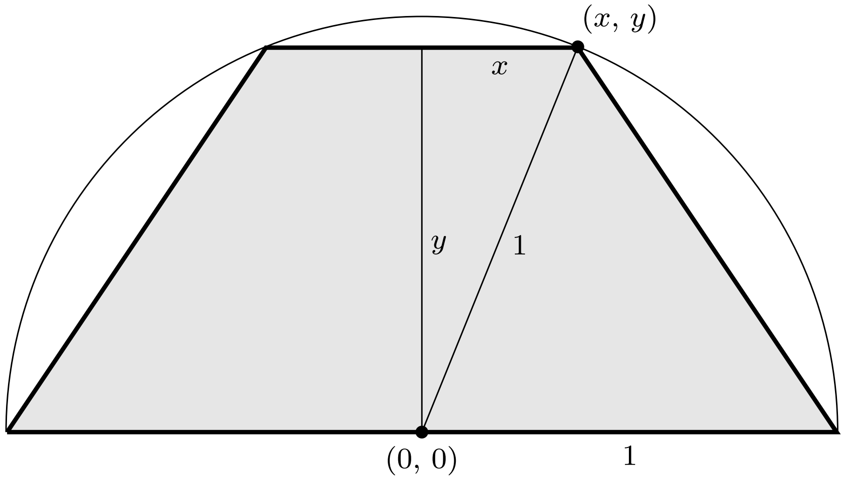
(b) Für die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n = \frac{1}{2}\big((-1)^n + (-1)^{n+1}\big) = \frac{(-1)^n}{2}\big(1 + (-1)\big) = 0$. Die konstante Folge $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und wegen $a_{2n} = 1$ und $a_{2n+1} = -1$ ist die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Die konvergente Folge $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante M so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $b_n \leq M$ gilt. Damit folgt aus der Monotonie der Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = \frac{1}{2}\big(a_n + a_n\big) \leq \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n+1}\big) = b_n \leq M,$$

d.h. die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Damit ist die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz der Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 5. *[20 Punkte]* In einen Halbkreis mit Radius 1 um den Koordinatenursprung wird ein gleichschenkliges Trapez einbeschrieben, d.h. ein zur y-Achse symmetrisches Trapez. Bestimmen Sie die Koordinaten (x, y) mit $x > 0$ des in der Skizze eingezeichneten Punktes, für den das Trapez den größten Flächeninhalt hat.



Lösung:
Zu einem vorgegebenem Wert von x erhält man $y = \sqrt{1-x^2}$. Der Flächeninhalt der Trapeze ist $\frac{1}{2}(2x+2) \cdot y = (x+1) \cdot y = (x+1) \cdot \sqrt{1-x^2} =: F(x)$, $0 < x \leq 1$.

Die Ableitung dieser Funktion F ist

$$F'(x) = \sqrt{1-x^2} + (x+1)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2) - x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Nullstellen von F' stimmen mit den Nullstellen von $2x^2 + x - 1$ überein. Dieses Polynom hat die beiden Nullstellen $x_1 = \frac{1}{2} > 0$ und $x_2 = -1 < 0$. Damit hat die Funktion F folgendes Monotonieverhalten: Für $0 < x < \frac{1}{2}$ ist $F'(x) > 0$ und die Funktion F ist streng monoton wachsend. Für $\frac{1}{2} < x < 1$ ist $F'(x) < 0$ und die Funktion F ist streng monoton fallend. Daher wird das gesuchte Maximum an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ angenommen. Der zugehörige y-Wert ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und damit erhält man den gesuchten Punkt zu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Aufgabe 6. *[15 Punkte]* Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\cos^2 t}\, dt$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ ersten Grades von f um $x_0 = 0$.

(b) *[4 Punkte]* Gegen Sie das Restglied $R_1(x)$ in der Darstellung von Lagrange an.

(c) *[6 Punkte]* Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{3}{2}x^2$.

Einige Formeln aus der Formelsammlung sind:
$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$, $\quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\varphi)\big)$, $\quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\varphi)\big)$
Sie dürfen ohne Nachweis die Ungleichung $\mathrm{e} < 3$ verwenden.

Lösung: Die Ableitungen der Funktion f sind:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad f''(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot \mathrm{e}^{\cos^2 x} = -\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^{\cos^2 x}\,.$$

(a) Das Taylorpolynom T_1 von f um x_0 ist $T_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = \mathrm{e} \cdot x$.

(b) Das Restglied ist

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi) \cdot (x-0)^2 = -\frac{1}{2}\sin(2\xi) \cdot \mathrm{e}^{\cos^2 \xi} \cdot x^2$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 0$ und x.

(c) Aufgrund der Monotonie der e-Funktion erhält man die Abschätzung

$$\left|R_1(x)\right| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|\sin(2\xi)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\cos^2 \xi}}_{\leq \mathrm{e} < 3} \cdot x^2 \leq \frac{3}{2}x^2.$$

Aufgabe 7. *[17 Punkte]* Betrachten Sie das Integral $I = \int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{y}}^2 x^3\, \mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy.$

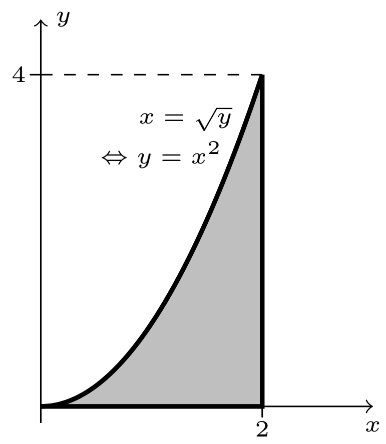
(a) *[4 Punkte]* Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der $(x,\, y)$-Ebene.

(b) *[4 Punkte]* Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integrationen.

(c) *[9 Punkte]* Berechnen Sie das Integral I.

Lösung:

(a) Der Integrationsbereich liegt rechts von der Parabel $x = \sqrt{y}$ und links von der Geraden $x = 2$ zwischen $y = 0$ und $y = 4$
Er ist in nebenstehender Skizze dargestellt.



(b) Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{y}}^2 x^3\, \mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{x^2} x^3\, \mathrm{e}^{xy}\, dy\, dx.$$

(c) Durch sukzessive Integration ergibt sich

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^{x^2} x^3\, \mathrm{e}^{xy}\, dy\, dx = \int\limits_0^2 x^2\, \mathrm{e}^{xy}\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int\limits_0^2 \left(x^2\, \mathrm{e}^{x^3} - x^2\right) dx =$$

$$\frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{x^3} - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\mathrm{e}^8}{3} - 3.$$