DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11. Oktober 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[19 Punkte]* Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & (a+3)x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -b+2 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & b \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & -2b \end{array}$$

Im folgenden sollen nun die Lösungsmengen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von den Parametern a, b bestimmt werden.

(a) *[6 Punkte]* Zeigen Sie dazu, dass sich die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform (Treppenform) bringen lässt:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Geben Sie bei jedem Schritt die verwendeten elementaren Zeilenumformungen an.

(b) *[13 Punkte]* Bestimmen Sie nun unter Verwendung der Zeilenstufenform (Treppenform) aus (a) die Lösungsmenge in Abhängigkeit der Parameter a und b. Dabei sind drei Fälle zu betrachten, in denen die Lösungsmenge eine grundsätzlich verschiedene Form besitzt.

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem wird folgendermaßen auf die gewünschte Zeilenstufenform (Treppenform) gebracht:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+3 & -2 & 4 & -b+2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & b \\ 1 & 3 & -2 & 4 & -2b \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{II:=II-I \\ III:=III+I \\ IV:=IV-I}]{} \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 & 4 & -b+2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2b \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{II:=II+2*III \\ IV:=IV+2*III}]{} \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \quad (\star)$$

(Römische Zahlen bezeichnen die Zeilennummern der erweiterten Koeffizientenmatrix.)

(b) Mit L wird die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems bezeichnet.
1.Fall: $a = 0$ und $b \neq -2$
Aus der zweiten Zeile der Zeilenstufenform $(\star)$ folgt unmittelbar: $L = \emptyset$.

2.Fall: $a = 0$ und $b = -2$
Mit Vertauschung von Zeile II und Zeile III in $(\star)$ ergibt sich die normierte Zeilenstufenform (reduzierte Treppenform):

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und damit durch Ablesen:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.Fall: $a \neq 0$
Durch zwei offensichtliche elementare Zeilenumformungen lässt sich die folgende normierte Zeilenstufenform (reduzierte Treppenform) aus $(\star)$ herstellen:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3\frac{b+2}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b+2}{a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und damit durch Ablesen:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3\frac{b+2}{a} \\ \frac{b+2}{a} \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2. *[14 Punkte]* Betrachten Sie die Spiegelung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $E := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 \right\}$.

(a) *[5 Punkte]* Weisen Sie nach, dass S eine lineare Abbildung ist, und geben Sie die Matrix A an, die S beschreibt.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Abbildung S orthogonal und bijektiv ist.
Welche Matrix beschreibt die Umkehrabbildung?

(c) *[3 Punkte]* Geben Sie das Bild der folgenden Geraden g unter S an:

$$g(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

(a) Für die gegebene Spiegelung S an E gilt:

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3) \ \text{ für alle } \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

und damit

$$\begin{aligned} S(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_3 + y_3) \\ &= (x_2, x_1, x_3) + (y_2, y_1, y_3) = S(x_1, x_2, x_3) + S(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= (\lambda x_2, \lambda x_1, \lambda x_3) \\ &= \lambda(x_2, x_1, x_3) = \lambda S(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

für alle $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. S ist linear.
Wegen $S(e_1) = e_2$, $S(e_2) = e_1$ und $S(e_3) = e_3$ für die Einheitsvektoren $e_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$, des $\mathbb{R}^3$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Skalarprodukte der Spalten $a_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$, von A gilt:

$$\langle a_i,\ a_j \rangle = \delta_{ij},$$

also ist A und damit auch die Abbildung S orthogonal.
Die Spiegelung S an E bildet den $\mathbb{R}^3$ offensichtlich auf sich ab, ist also surjektiv und wegen $\det A = -1 \neq 0$ auch injektiv, insgesamt also bijektiv.
Wegen der Orthogonalität von S bzw. A gilt für die Matrix der Umkehrabbildung:

$$A^{-1} = A^T = A$$

(c) Das Bild der Geraden g unter S ist wieder eine Gerade:

$$A\big(g(\lambda)\big) = A\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. *[19 Punkte]* Es gilt folgender mathematischer SATZ:

Es sei $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix mit den nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (mehrfache Eigenwerte treten in dieser Aufzählung gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit auf). Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

(a) *[4 Punkte]* Überprüfen Sie diesen Satz für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$$

(b) *[4 Punkte]* Zeigen Sie anhand der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 18 \end{pmatrix},$$

dass dieser Satz für nicht symmetrische Matrizen im Allgemeinen nicht gilt.

(c) *[11 Punkte]* Ein Beweis dieses Satzes wird nun gegeben. Allerdings sind die einzelnen Schritte (i) bis (vi) zwar richtig, aber nicht genau genug begründet. Vervollständigen Sie diesen Beweis durch zutreffende Begründungen oder kurze Rechnungen.

BEWEIS:

Einerseits gilt:

Voraussetzungen der Aufgabenstellung

$\overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow}$ A ist reell diagonalisierbar

$\Longrightarrow$ Es existieren eine invertierbare Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$
und eine Diagonalmatrix $D \in M_n(\mathbb{R})$, so, dass: $T^{-1}AT = D$

$$\Longrightarrow \text{Spur } (A^2) \overset{\text{(ii)}}{=} \text{Spur } (T^{-1}A^2T) \overset{\text{(iii)}}{=} \text{Spur } (D^2) \overset{\text{(iv)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Andererseits gilt für die Matrix $B := A^2$ mit $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\text{Spur } (A^2) = \text{Spur } (B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \overset{\text{(v)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} \overset{\text{(vi)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

Aus der Gleichheit dieser beiden Ausdrücke folgt die Behauptung. $\square$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{spur}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 20\lambda - 0 = \lambda(\lambda - 20)$$

liefert die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 20$, also

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^2 = 0^2 + 20^2 = 400.$$

Andererseits gilt

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 = 2^2 + 2 \cdot 6^2 + 18^2 = 4 + 2 \cdot 36 + 324 = 400.$$

(b) Die Eigenwerte der Dreiecksmatrix B sind die Hauptdiagonaleinträge $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 18$. Somit folgt sofort

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^2 = 2^2 + 18^2 < 2^2 + 18^2 + 6^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2.$$

(c) Die Schritte (i) bis (vi) können folgendermaßen begründet werden:

(i) Da A eine reelle symmetrische Matrix ist, ist A reell diagonalisierbar.

(ii) A^2 und $T^{-1}A^2T$ sind ähnliche Matrizen, haben also dieselbe Spur.

(iii) Es gilt:

$$T^{-1}A^2T = T^{-1}ATT^{-1}AT = D^2$$

.

(iv) In der Matrix D stehen genau die Eigenwerte λ_i von A gem. algebraischer Vielfachheit auf der Hauptdiagonalen, in D^2 somit die Quadrate λ_i^2. Die Spur als Summe über die Hauptdiagonaleinträge ist somit die Summe dieser Quadrate.

(v) Die Koeffizienten b_{ik} der Matrix $B = A \cdot A$ entstehen durch $b_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}$, für die Hauptdiagonaleinträge bedeutet dies $b_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}$.

(vi) Aufgrund der Symmetrie $A = A^T$ gilt $a_{ij} = a_{ji}$.

Aufgabe 4. *[21 Punkte]* Die Folge $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) *[6 Punkte]* Beweisen Sie, dass die Folge $\left(a_k\right)$ streng monoton wachsend ist.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $a_k \leq \frac{25}{4}$ gilt.

(c) *[5 Punkte]* Begründen Sie, dass die Folge $\left(a_k\right)$ konvergiert und der Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ eine Lösung der Gleichung $16a^2 - 136a + 225 = 0$ ist.

(d) *[4 Punkte]* Es ist $16a^2 - 136a + 225 = (4a - 25)\cdot(4a - 9)$. Bestimmen Sie mit dieser Angabe den Grenzwert a.

Lösung:

(a) Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: Es ist $a_1 = 1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4} > a_0$.
Induktionsschluss: Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_k < a_{k+1}$. Daraus folgt wegen der Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{a_k} + \frac{15}{4} < \sqrt{a_{k+1}} + \frac{15}{4}$, und dies ist gleichwertig mit $a_{k+1} < a_{k+2}$.
Damit ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $a_k < a_{k+1}$ nachgewiesen.

(b) Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $a_0 = 1 \leq \frac{25}{4}$.
Induktionsschluss: Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_k \leq \frac{25}{4}$. Dann folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion auch $a_{k+1} = \sqrt{a_k} + \frac{15}{4} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}$.
Damit ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $a_k \leq \frac{25}{4}$ gezeigt.

(c) Die Folge $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist nach Teil (a) und (b) monoton und beschränkt, daher existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Durch den Grenzübergang $k \to \infty$ in der Rekursionsgleichung ergibt sich: a ist eine Lösung von $a = \sqrt{a} + \frac{15}{4}$ oder $\sqrt{a} = a - \frac{15}{4}$. Quadriert man diese Gleichung, so folgt, dass a eine Lösung von $16a^2 - 136a + 225 = 0$ ist.

(d) Aus $16a^2 - 136a + 225 = (4a - 25)\cdot(4a - 9)$ folgt zunächst $a \in \left\{\frac{9}{4}, \frac{25}{4}\right\}$. Da $\sqrt{a} = a - \frac{15}{4} \geq 0$ sein muss, ist der Wert $a = \frac{9}{4}$ nicht möglich und es ergibt sich $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{25}{4}$.

Aufgabe 5. *[11 Punkte]* Bestimmen Sie eine Zahl $a > 0$ und einen Funktionsterm $f(x)$ so, dass für alle $x > 0$ die Gleichung $6 + \int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$ gilt.

Lösung:
Einsetzen von $x = a$ ergibt $6 = 2\sqrt{a}$ und damit $a = 9$.
Leitet man die Gleichung $6 + \int\limits_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$ nach x ab, so ergibt sich aus dem HDI $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Damit erhält man den Funktionsterm $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{3/2}$.

Aufgabe 6. *[22 Punkte]* Betrachten Sie alle ebenen Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die durch den Punkt $(1,\, 2)$ verlaufen.
Bestimmen Sie Werte für $a,\, b > 0$ so, dass die zugehörige Ellipse bzgl. dieser speziellen Ellipsen minimalen Flächeninhalt $F = \pi ab$ hat. Geben Sie den Wert des minimalen Flächeninhaltes an.
Bemerkung: Die Existenz einer Ellipse mit minimalem Flächeninhalt bzgl. dieser speziellen Ellipsen folgt aus geometrischen Überlegungen und muss nicht begründet werden.

Lösung:
Der Punkt $(1,\, 2)$ liegt genau dann auf der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ gilt. Es ist folgendes Extremwertproblem zu lösen:
Gesucht ist das Minimum von $F(a,\, b) = \pi ab$ unter der Nebenbedingung $g(a,\, b) = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$.
Dieses Minimum kann man mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren bestimmen:
Das Gleichungssystem $\nabla F(a,\, b) = \lambda \nabla g(a,\, b)$ lautet

$$\begin{aligned} \pi b &= -\lambda \frac{2}{a^3} \\ \pi a &= -\lambda \frac{8}{b^3} \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Voraussetzung $\nabla g(a,\, b) \neq 0$ zur Anwendung des Satzes über die Lagrange-Multiplikatoren für alle $a, b > 0$ erfüllt ist.
Aus $a,\, b > 0$ folgt zunächst $\lambda \neq 0$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{-a}{\lambda}$ und Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{-b}{\lambda}$ ergibt $\frac{-\pi ab}{\lambda} = \frac{2}{a^2} = \frac{8}{b^2}$ und daraus folgt $\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2}$. Dies kann man in die Nebenbedingung einsetzen und erhält $\frac{2}{a^2} = 1$ und wegen $a > 0$ die Lösung $a = \sqrt{2}$. Für b ergibt sich der Wert $b = 2\sqrt{2}$. Damit gibt es nur eine einzige mögliche Extremalstelle $(a,\, b) = (\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$, an der das gesuchte Minimum (aufgrund der obigen Bemerkung) angenommen werden muss. Der Wert des minimalen Flächeninhaltes ist $F(\sqrt{2},\, 2\sqrt{2}) = 4\pi$.

Aufgabe 7. *[14 Punkte]* Es sei G derjenige Kreissektor mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 im ersten Quadranten der Ebene, dessen Schenkel auf der y-Achse und auf der Winkelhalbierenden liegen. Berechnen Sie das Bereichsintegral $\displaystyle\iint\limits_G \frac{y}{x^2+y^2}\, d(x,\, y)$.

Lösung:
Durch Übergang zu Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ergibt sich für den Kreissektor die Darstellung $K = \left\{(r,\, \varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Damit erhält man:

$$\iint\limits_G \frac{y}{x^2+y^2}\, d(x,\, y) = \iint\limits_K \frac{r\sin\varphi}{r^2} r\, d(r,\, \varphi) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^1 \sin\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$