DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 01. Juni 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[18 Punkte]* Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{aus dem } \mathbb{R}^2 \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{aus dem } \mathbb{R}^3$$

und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_j) = w_j, j \in \{1, 2\}$.

(a) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie für f die Abbildungsmatrix (auch darstellende Matrix genannt) bzgl. der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(b) *[6 Punkte]* Geben Sie Kern (f), Bild (f) und deren Dimensionen an.

(c) *[3 Punkte]* Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Lösung:

(a) Für die darstellende Matrix $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ muss gelten:

$$Av_j = w_j, j \in \{1, 2\} \iff AV = W$$

mit $V := (v_1 \; v_2) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $W := (w_1 \; w_2) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.
Da v_1 und v_2 offensichtlich linear unabhängig sind, existiert V^{-1}, so dass

$$A = W \cdot V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt:

$$\text{Bild } f = \text{span}\{f(v_1), f(v_2)\} = \text{span}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Da w_1 und w_2 offensichtlich linear unabhängig sind, ist Bild f eine Ursprungsebene in $\mathbb{R}^3$ und es gilt

$$\dim \text{Bild } f = \dim \text{span}\{w_1, w_2\} = 2.$$

Mit der Dimensionsformel folgt

$$2 = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f \iff \dim \text{Kern } f = 0,$$

und damit Kern $f = \{0\}$.

(c) Wegen Kern $f = \{0\}$ ist f injektiv, aber nicht surjektiv da $\dim \text{Bild } f = 2 \lneq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Wegen der fehlenden Surjektivität kann f auch nicht bijektiv sein.

Aufgabe 2. *[14 Punkte]* Die Menge

$$l(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \;\text{ für alle }\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

aller reellwertigen Folgen bildet zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : l(\mathbb{N}) \times l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N}), &\quad \left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \cdot\ : \mathbb{R} \times l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N}), &\quad \left(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \mapsto \lambda (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Prüfen Sie nun, ob die folgenden Teilmengen $U_k, k \in \{1,2,3\}$, von $l(\mathbb{N})$ zusammen mit den o.g. Verknüpfungen einen Unterraum von $l(\mathbb{N})$ bilden:

(a) *[4 Punkte]* $U_1 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N}) \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$

(b) *[4 Punkte]* $U_2 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N}) \mid a_n \neq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) *[6 Punkte]* $U_3 := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l(\mathbb{N}) \mid \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1} \text{ für alle } n \geq n_0 \right\}$

Lösung: Auf die Angabe von $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \to \infty$ wird verzichtet.

(a) Ja, denn für zwei Nullfolgen (a_n) und (b_n) folgt mit den Rechenregeln für Folgengrenzwerte aus

$$0 = \lim (a_n) + \lim (b_n) = \lim (a_n + b_n)$$

gerade $(a_n + b_n) \in U_1$ und aus

$$\lim (\lambda a_n) = \lambda \lim (a_n) = 0$$

gerade $\lambda (a_n) \in U_1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Nein, denn U_2 ist z.B. bzgl. Addition nicht abgeschlossen, wie folgendem Beispiel zu entnehmen ist:

$$\begin{aligned} &a_n := 2,\; b_n := -1 \;\text{ für alle }\; n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n), (b_n) \in U_2 \\ &\text{aber: } (a_n + b_n) = (1) \notin U_2. \end{aligned}$$

(c) Ja, denn zu (a_n) und (b_n) aus U_3 gibt es jeweils ein n_0^a bzw. n_0^b, so dass für alle $n \geq n_0^a$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ offensichtlich gilt:

$$\lambda a_n = \lambda a_{n+1}$$

und für alle $n \geq \max\left\{n_0^a, n_0^b\right\}$ gilt:

$$a_n = a_{n+1} \;\text{ und }\; b_n = b_{n+1} \;\text{ und damit auch }\; a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

so dass offensichtlich auch $(a_n) + (b_n)$ und $\lambda (a_n)$ in U_3 liegen.

Aufgabe 3. *[19 Punkte]* Es sei eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ gegeben.
Mit p_A werde das charakteristische Polynom, mit m_A das Minimalpolynom von A bezeichnet.
Das *Minimalpolynom* ist das eindeutig bestimmte Polynom mit minimalem Grad unter allen Polynomen der Form

$$q(x) := x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0, \quad a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

die A annullieren, d.h. für die $q(A) = 0$ gilt. Insbesondere teilt dann m_A jedes A annullierende Polynom der Form (1).
Weisen Sie nun für die transponierte Matrix A^T von A die folgenden Aussagen nach.

(a) *[8 Punkte]* Die beiden charakteristischen Polynome und die beiden Minimalpolynome von A und A^T stimmen überein, d.h.

$$p_A = p_{A^T} \quad \text{und} \quad m_A = m_{A^T}.$$

(b) *[11 Punkte]* A und A^T lassen sich auf dieselbe Jordansche Normalform bringen.
Hinweis:
Für die Permutationsmatrix $P := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ gilt:

$$P = P^{-1} \quad \text{und} \quad P \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Die übrigen Einträge der beteiligten Matrizen sind gleich null.)

Lösung:

(a) Aus der Definition des charakteristischen Polynoms und den Rechenregeln für Determinanten folgt mit E_n als Symbol für die n-dimensionale Einheitsmatrix:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = \det\left((A - \lambda E_n)^T\right) = \det\left(A^T - \lambda E_n\right) = p_{A^T}(\lambda).$$

Weiterhin folgt aus

$$m_A(A) = A^r + a_{r-1}A^{r-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 E_n = 0$$

mit $r := \operatorname{grad} m_A$ durch Transposition (beachte $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k$ für $k \in \mathbb{N}$) auch

$$0 = \left(A^T\right)^r + a_{r-1}\left(A^T\right)^{r-1} + \ldots + a_1 A^T + a_0 E_n = m_A\left(A^T\right),$$

d.h. m_{A^T} teilt m_A.
Analog lässt sich mit vertauschten Rollen von A und A^T herleiten, dass m_A das Polynom m_{A^T} teilen muss.
Also gilt auch $m_A = m_{A^T}$.

(b) Nach dem Satz über die Jordansche Normalform existiert eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$, mit der man die Jordansche Normalform J_A von A mit Jordankästchen $J_1, \ldots, J_k$ erhält:

$$SAS^{-1} = J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}.$$

Mit den Rechenregeln für die Transposition ergibt sich:

$$J_A^T = \left(S^T\right)^{-1} A^T S^T.$$

Setze nun

$$Q := \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

mit den Permutationsmatrizen

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \; j = 1, \ldots, k,$$

wobei P_j dieselbe Größe wie das j-te Jordankästchen J_j von A hat.
Unter Verwendung des Hinweises für die Permutationsmatrizen erhält man

$$J_A = QJ_A^TQ \quad \text{mit} \quad Q = Q^{-1},$$

so dass sich insgesamt die Darstellung ergibt:

$$J_A = Q^{-1}J_A^TQ = Q^{-1}\left(\left(S^T\right)^{-1} A^T S^T\right) Q = \left(S^TQ\right)^{-1} A^T \left(S^TQ\right).$$

Also lässt sich A^T auf dieselbe Jordansche Normalform wie A bringen.

Aufgabe 4. *[20 Punkte]* Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Geben Sie für richtige Aussagen eine kurze Begründung und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. Alle in dieser Aufgabe vorkommenden Funktionen f und g seien in $\mathbb{R}$ definiert und reellwertig.

(a) *[2 Punkte]* Ist die Funktion f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 nicht stetig.

(b) *[2 Punkte]* Ist die Funktion f an der Stelle x_0 nicht stetig, so ist f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

(c) *[4 Punkte]* Falls f stetig differenzierbar und f' monoton wachsend ist, so ist auch f monoton wachsend.

(d) *[4 Punkte]* Falls f stetig differenzierbar und f monoton wachsend ist, so ist auch f' monoton wachsend.

(e) *[4 Punkte]* Für beliebige stetige Funktionen f und g gilt

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx = \int_0^3 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx.$$

(f) *[4 Punkte]* Für die stetige Funktion f sei A das Integralmittel von f über $[1, 4]$ und B das Integralmittel von f über $[4, 9]$. Dann ist $\frac{3}{8}A + \frac{5}{8}B$ das Integralmittel von f über $[1, 9]$.

Lösung:

(a) falsch. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

(b) richtig. Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

(c) falsch. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$ für $x < 0$. Die Funktion f ist monoton fallend und die Ableitung $f'(x) = 2x$ ist monoton wachsend.

(d) falsch. Betrachte die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ für $x > 0$. Die Funktion f ist monoton wachsend und die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist monoton fallend.

(e) falsch. Für die Funktionen $f(x) = g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx = 3$ und $\int_0^3 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = 6$.

(f) richtig. Nach der Definition des Integralmittels ist $A = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx$ und $B = \frac{1}{5}\int_4^9 f(x)\,dx$. Das Integralmittel von f über $[1, 9]$ ist $\frac{1}{8}\int_1^9 f(x)\,dx = \frac{1}{8}\left(\int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^9 f(x)\,dx\right) = \frac{3}{8}A + \frac{5}{8}B$.

Aufgabe 5. *[14 Punkte]* Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$.

(a) *[7 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Tangente $T_{x_0}(x)$ an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 die Gleichung $T_{x_0}(x) = \dfrac{2 + x \cdot x_0}{\sqrt{2 + x_0^2}}$ hat.

(b) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie alle Tangenten an den Graphen der Funktion f, die durch den Punkt $(0,\ 1)$ gehen.

Lösung:

(a) Es ist $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2 + x^2}}$ und damit folgt

$$T_{x_0}(x) = \sqrt{2 + x_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{2 + x_0^2}} \cdot (x - x_0) = \frac{(2 + x_0^2) + x x_0 - x_0^2}{\sqrt{2 + x_0^2}} = \frac{2 + x \cdot x_0}{\sqrt{2 + x_0^2}}.$$

(b) Die Tangente $T_{x_0}(x)$ geht durch den Punkt $(0,\ 1)$ genau dann, wenn $T_{x_0}(0) = 1$ ist. Damit ergibt sich:

$$T_{x_0}(0) = 1 \iff \frac{2}{\sqrt{2 + x_0^2}} = 1 \iff \sqrt{2 + x_0^2} = 2 \iff x_0^2 = 2 \iff x_0 = \pm\sqrt{2}.$$

Die gesuchten Tangenten sind

$$T_{\sqrt{2}}(x) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x \quad \text{und} \quad T_{-\sqrt{2}}(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

Aufgabe 6. *[18 Punkte]* Betrachten Sie für $a \neq 2$ die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2y + 2xy + ay^2$.

(a) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie den stationären Punkt der Funktion f.

(b) *[9 Punkte]* Ermitteln Sie alle Werte des Parameters a, für die die Funktion an dem stationären Punkt ein lokales Minimum hat.

Lösung:

(a) Der Gradient von f ist $\nabla f = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2 + 2x + 2ay \end{pmatrix}$. Aus $f_x(x, y) = x + 2y = 0$ folgt zunächst $x = -2y$. Einsetzen in die Gleichung $f_y(x, y) = 2 + 2x + 2ay = 0$ ergibt $2 - 4y + 2ay = 2 - (4 - 2a)y = 0$ und damit $y = \frac{1}{2-a}$ Der zugehörige x-Wert ist $x = \frac{-2}{2-a}$ und der stationäre Punkt ist $\frac{1}{2-a}\big(-2, 1\big)$.

(b) Zur Klassifikation des stationären Punktes kann man die Hesse-Matrix der Funktion f verwenden. Diese Matrix ist $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$. Da $f_{xx}(x, y) = 1$ ist die Hesse-Matrix positiv definit, sobald die Determinante $\big|Hf(x, y)\big| = 2a - 4$ positiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a > 2$ ist. Damit folgt: Falls $a > 2$ ist, liegt am stationären Punkt $\frac{1}{2-a}\big(-2, 1\big)$ ein lokales Minimum vor. Für $a < 2$ hat die Funktion f an dem stationären Punkte einen Sattelpunkt.

Aufgabe 7. *[17 Punkte]* Betrachten Sie das Integral $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} \mathrm{e}^{x/y^2}\, dx\, dy.$

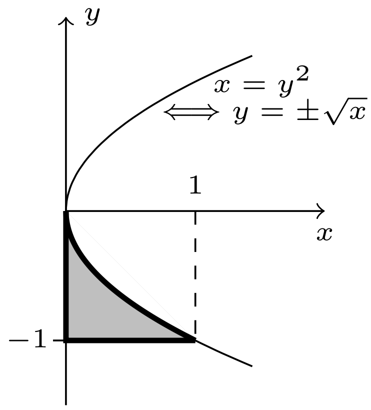
(a) *[6 Punkte]* Erstellen Sie eine hinreichend aussagekräftige Skizze des Integrationsbereiches.

(b) *[4 Punkte]* Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integration und schreiben Sie das Integral in der Form $\int_{a}^{b}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{e}^{x/y^2}\, dy\, dx.$

(c) *[7 Punkte]* Berechnen Sie das Integral in der original vorgegebenen Integrationsreihenfolge.

Lösung:

(a) Der Integrationsbereich liegt zwischen der Parabel $x = y^2$, der Gerade $y = -1$ und der y-Achse. Er ist in nebenstehender Skizze dargestellt.



(b) Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt $\int_{0}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{x}} \mathrm{e}^{x/y^2}\, dy\, dx.$

(c) Es ist

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} \mathrm{e}^{x/y^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{0} y^2\, \mathrm{e}^{x/y^2}\Big|_{x=0}^{x=y^2}\, dy =$$

$$\int_{-1}^{0} y^2(\mathrm{e}-1)\, dy = (\mathrm{e}-1)\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}(\mathrm{e}-1).$$