DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Oktober 2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[16 Punkte]* Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ c & -4 \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Parameter} \quad c \in \mathbb{R}$$

soll bzgl. ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht werden.

(a) *[5 Punkte]* Für welche Parameter $c \in \mathbb{R}$ und zu welchen Eigenwerten ist der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von A?

(b) *[11 Punkte]* Für welche Parameter $c \in \mathbb{R}$ und zu welchen Eigenvektoren ist 2 Eigenwert von A?

Lösung:

(a) Die gesuchten Parameter c und Eigenwerte λ müssen erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ c & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 20 = 4\lambda \wedge 4c - 16 = 4\lambda.$$

Also sind die Lösungen genau:

$$\lambda = 5 \quad \text{und} \quad c = 9.$$

(b) Der Parameter c muss erfüllen:

$$0 = \det(A - 2E_2) = -12 - c.$$

Also ist 2 genau dann Eigenwert von A, wenn $c = -12$.
Die zugehörigen Eigenvektoren $v \in \mathbb{R}^2$ erhält man durch Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ -12 & -4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses lösen genau alle Vektoren v mit $v_2 = -2v_1$. Also gilt für den Eigenraum zum Eigenwert 2:

$$\mathrm{Eig}_2(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2. *[17 Punkte]* Im Zuge der Untersuchung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0 \quad \text{mit} \quad A \in M_{3,6}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}^6$$

sind die folgenden drei Lösungen gefunden worden:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin stellt man fest, dass die drei Vektoren $x_{1,2,3}$ zusammen mit jedem weiteren Lösungsvektor linear abhängig sind.

(a) *[3 Punkte]* Sind die drei Lösungsvektoren $x_{1,2,3}$ linear unabhängig?

(b) *[4 Punkte]* Wie sieht der vollständige Lösungsraum des gegebenen Gleichungssystems aus?

(c) *[4 Punkte]* Welchen Rang hat die Matrix A?

(d) *[6 Punkte]* Bekanntlich kann man die Matrix A mit dem Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren eindeutig in eine Matrix S in *reduzierter* Treppenform (auch: *normierter* Zeilenstufenform) umformen, d.h. die Pivotelemente der Treppen- bzw. Zeilenstufenform sind alle gleich 1 und oberhalb jedes Pivotelements stehen lauter Nullen.
Geben Sie mit Hilfe der vorhandenen Informationen die reduzierte Treppenform S der Matrix A an.

Lösung:

(a) Ja, die drei Vektoren $x_{1,2,3}$ sind linear unabhängig, da die aus den letzten drei Zeilen gebildeten Teilvektoren

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich bereits linear unabhängig sind.

(b) Da die Vektoren $x_{1,2,3}$ nach (a) linear unabhängig sind und sich diese Menge linear unabhängiger Lösungsvektoren nach Voraussetzung nicht vergrößern lässt, ist der vollständige Lösungsraum gerade:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,\; \lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) Nach der Dimensionsformel ergibt sich:

$$\dim \mathbb{R}^6 = 6 = \dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Bild}(A).$$

Wegen $\dim \operatorname{Kern}(A) = 3$ nach (b) folgt also

$$3 = \dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{rang}(A).$$

(d) Da das Gauß-Jordan-Verfahren den Rang der betroffenen Matrizen nicht verändert, muss auch die Matrix S den Rang 3 haben. Also muss S die drei Einheitsvektoren $e_{1,2,3}$ des $\mathbb{R}^3$ in dieser Reihenfolge (wegen Treppenform) als drei der sechs Spalten besitzen.
Die Lösungsräume von $Ax = 0$ und $Sx = 0$ sind identisch, so dass gelten muss:

$$S \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ E_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow S_1 \cdot C + S_2 \cdot E_3 = 0$$

mit $S_{1,2} \in M_3(\mathbb{R})$, der Einheitsmatrix $E_3 \in M_3(\mathbb{R})$ und

$$C := \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun $S_1 := E_3$ und $S_2 := -C$, also

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt offensichtlich zum einen $S_1 \cdot C + S_2 \cdot E_3 = 0$, zum anderen, dass S in reduzierter Treppenform vorliegt.
Wegen der Eindeutigkeit ist damit S die zu A gesuchte Matrix in reduzierter Treppenform.

Aufgabe 3. *[17 Punkte]* Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und A eine nicht leere Teilmenge von V. Die Menge

$$A^{\perp} := \{ v \in V \mid \langle v, a \rangle = 0 \text{ für alle } a \in A \}$$

heißt das *orthogonale Komplement* von A in V.

(a) *[5 Punkte]* Zeigen Sie, dass $A^{\perp}$ ein Unterraum von V ist.

(b) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie $A \cap A^{\perp}$.

(c) *[6 Punkte]* Nennen Sie ein Beispiel einer nicht leeren Teilmenge $A \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $V := \mathbb{R}^2$, ausgestattet mit dem euklidischen Skalarprodukt, so dass A *kein* Unterraum von V ist, und geben Sie zu dieser Menge A das orthogonale Komplement an.

Lösung:

(a) Offensichtlich ist $0 \in A^{\perp}$.
Weiterhin folgt für $v, w \in A^{\perp}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ aus der Linearität des Skalarprodukts:

$$\langle v + w, a \rangle = \underbrace{\langle v, a \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, a \rangle}_{=0} = 0 \text{ für alle } a \in A$$

und

$$\langle \lambda v, a \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, a \rangle}_{=0} = 0 \text{ für alle } a \in A$$

und damit $v + w \in A^{\perp}$ und $\lambda v \in A^{\perp}$.

(b) Offensichtlich ist $0 \in A^{\perp}$.
Für $v \in A \cap A^{\perp}$ muss $\langle v, v \rangle = 0$ gelten, so dass $v = 0$ wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts.
Zusammen ergibt sich damit:

$$A \cap A^{\perp} = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \in A \\ \emptyset, & \text{falls } 0 \notin A. \end{cases}$$

(c) Setze z.B.

$$A := \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Dann ist A kein Unterraum, da $0 \notin A$. Weiterhin ist

$$A^{\perp} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 \mu + v_2 \mu = 0 \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow v_1 + v_2 = 0.$$

Aufgabe 4. *[8 Punkte]* Notieren Sie jeweils die Nummer(n) der richtigen Antwort(en) und geben Sie eine stichwortartige Begründung für Ihre Wahl:

(a) *[3 Punkte]* Die Folge $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 4^n}{3^n + 4^{n+1}}$ hat den Grenzwert

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 4 (v) $\frac{1}{3}$

(vi) $\big(a_n\big)$ ist divergent

(b) *[5 Punkte]* Von der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius r ist bekannt, dass sie für $x = -1$ konvergiert und für $x = 2$ divergiert. Welche der folgenden Aussagen sind in jedem Fall richtig?

(i) Es gilt $r = 1$.

(ii) Es gilt $r = 2$.

(iii) Es gilt $1 \leq r \leq 2$.

(iv) Es gilt $1 < r < 2$.

(v) Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(vi) Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 2$.

(vii) Die Potenzreihe divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$.

(viii) Die Potenzreihe divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 2$.

Lösung:

(a) Die Aussage (iii) ist richtig. Begründung:

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 4^n}{3^n + 4^{n+1}} = \frac{4^n\left(1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^{n+1}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \frac{1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} \to \frac{1}{4} \text{ für } n \to \infty \text{, da } \tfrac{3}{4} < 1.$$

(b) Die Potenzreihe hat den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und ist an der Stelle $x = -1$ konvergent. Daher ist -1 im Inneren oder am Rand des Konvergenzintervalls und es folgt $r \geq 1$. Da die Reihe an der Stelle $x = 2$ divergiert, liegt 2 im Äußeren oder am Rand des Konvergenzintervalls und es folgt $r \leq 2$. Daher sind die Aussagen (iii), (v) und (viii) richtig.

Aufgabe 5. *[10 Punkte]* Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\sin(nx) \le n \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Lösung:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ lautet die Ungleichung: $\sin(x) \le \sin(x)$, und diese ist für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ erfüllt.
Induktionsschluss: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Ungleichung $\sin(nx) \le n \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Dann folgt: $\sin\big((n+1)x\big) = \sin(nx + x) = \sin(nx) \cdot \cos(x) + \cos(nx) \cdot \sin(x)$. Da für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ sowohl $\cos(x) \ge 0$ als auch $\sin(x) \ge 0$ ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
\sin\big((n+1)x\big) &= \sin(nx) \cdot \underbrace{\cos(x)}_{\ge 0} + \cos(nx) \cdot \sin(x) \\
&\le n \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(nx) \cdot \sin(x) = \\
&\qquad \underbrace{\sin(x)}_{\ge 0} \underbrace{\Big(n \underbrace{\cos(x)}_{\le 1} + \underbrace{\cos(nx)}_{\le 1}\Big)}_{\le n+1} \le (n+1) \sin(x).
\end{aligned}$$

Damit gilt die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6. *[15 Punkte]* Ein rechtwinkliges Dreieck hat eine Ecke im Koordinatenursprung und eine Ecke auf dem Funktionsgraphen von $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$. Eine Seite des Dreiecks liegt auf der x-Achse und die dazu senkrechte Seite verläuft parallel zur y-Achse. Bestimmen Sie die kleinste und die größte Fläche der so gebildeten Dreiecke.

Lösung:
Ist x die Stelle der parallel zur y-Achse verlaufenden Seite ($1 \le x \le 5$), so hat das Dreieck die Fläche $F(x) = \frac{1}{2} x\, e^{-x/3}$. Gesucht ist das Minimum und das Maximum der Funktion F im Intervall $[1, 5]$. Die möglichen Extremalstellen sind die Randpunkte $x = 1$ und $x = 5$ sowie die Nullstellen der Ableitung von F. Mit $F'(x) = \frac{1}{2} e^{-x/3} \left(1 - \frac{1}{3} x\right)$ ergibt sich $F'(x) = 0 \iff x = 3$.
Es ist $F(1) = \frac{1}{2} e^{-1/3} \approx 0.358$, $F(3) = \frac{3}{2} e^{-1} \approx 0.552$ und $F(5) = \frac{5}{2} e^{-5/3} \approx 0.472$. Die kleinste Dreiecksfläche ist daher $\frac{1}{2} e^{-1/3} \approx 0.358$, die für $x = 1$ angenommen wird und die größte Dreiecksfläche ist $\frac{3}{2} e^{-1} \approx 0.552$, die bei $x = 3$ auftritt.

Aufgabe 7. *[18 Punkte]* Betrachten Sie die Menge

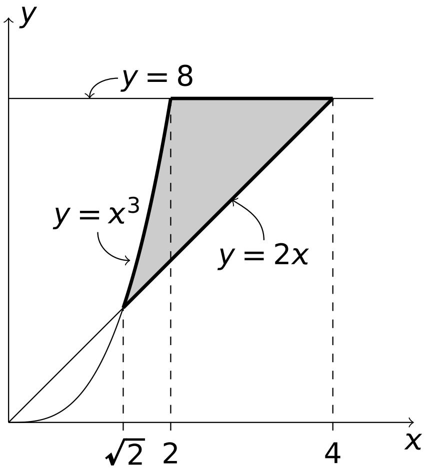
$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 8,\ 2x \le y \le x^3 \right\}.$$

(a) *[10 Punkte]* Skizzieren Sie die Menge M und bestimmen Sie die Koordinaten der drei „Ecken“ von M.

(b) *[8 Punkte]* Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge M.

Lösung:

(a) Die Menge M ist in nebenstehender Skizze dargestellt. Die drei „Ecken“ von M sind die Schnittpunkte der drei Graphen $y = 8$, $y = 2x$ und $y = x^3$: Der Schnittpunkt von $y = x^3$ und $y = 2x$ ist der Punkt $(\sqrt{2}, 2)$, der Schnittpunkt von $y = x^3$ und $y = 8$ ist der Punkt $(2, 8)$ und der Schnittpunkt von $y = 2x$ mit $y = 8$ ist der Punkt $(4, 8)$.



(b) Die Fläche der Menge M ist

$$F(M) = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(x^3 - 2x\right) dx + \int_{2}^{4} \left(8 - 2x\right) dx =$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} x^3\, dx + \int_{2}^{4} 8\, dx - \int_{\sqrt{2}}^{4} 2x\, dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_{\sqrt{2}}^{2} + 8x \Big|_{2}^{4} - x^2 \Big|_{\sqrt{2}}^{4} = 5$$

Aufgabe 8. *[19 Punkte]* Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 y + yz + z^2$$

beschreibe eine Temperaturverteilung im $\mathbb{R}^3$.

(a) *[8 Punkte]* Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, -1, 1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie folgende Vektoren:

  (i) *[2 Punkte]* Einen Normalenvektor auf die Ebene $x + y + z = 1$.

  (ii) *[3 Punkte]* Einen Vektor, der im Punkt $(1, -1, 1)$ senkrecht auf der Niveaufläche $f(x, y, z) = f(1, -1, 1) = -1$ steht.

(c) *[6 Punkte]* Eine Ente läuft auf der Ebene $x+y+z = 1$ durch den Punkt $(1, -1, 1)$. Dabei läuft sie so, dass sich die Temperatur auf ihrem Weg nicht ändert. In welche Richtung geht die Ente im Punkte $(1, -1, 1)$?
Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse der Teilaufgabe (b).

Lösung:

(a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$\nabla f(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor ist

$$\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Richtungsableitung ist das Skalarprodukt $\nabla f(1, -1, 1) \cdot \underline{v} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

(b) (i) Der Normalenvektor auf die Ebene $x + y + z = 1$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Der Normalenvektor auf die Niveaufläche von f durch $(1, -1, 1)$ ist

$$\nabla f(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Ente läuft längs der Schnittkurve der Ebene $x + y + z = 1$ mit der Niveaufläche $f(x, y, z) = -1$. Die Ente läuft auf der Ebene $x + y + z = 1$, geht also senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gleichzeitig läuft die Ebene auf der Niveaufläche $f(x, y, z) = -1$, geht also senkrecht zu dem Vektor $\nabla f(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daher läuft die Ente in eine Richtung, die senkrecht zu diesen beiden Vektoren ist. Dies ist die Richtung des Kreuzproduktes oder die entgegengesetzte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$