DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Mai 2018

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 90 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 45 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben auf 6 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[20 Punkte]* Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichenden Herleitung oder mit einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) *[4 Punkte]* Die folgende komplexe Matrix ist unitär:

$$A = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1-i & -3i \\ 3 & -1+i \end{pmatrix}.$$

(b) *[5 Punkte]* Jede invertierbare reelle $3x3-$Matrix ist auch diagonalisierbar.

(c) *[5 Punkte]* Falls für eine invertierbare reelle $nxn-$Matrix A ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $A^m = A$ existiert, folgt $\det A \in \{\pm 1\}$.

(d) *[6 Punkte]* Falls für eine komplexe $nxn-$Matrix N ein $m \in \mathbb{N}$ mit $N^m = 0$ existiert, folgt $\det(N - \lambda E_n) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr:
Nachrechnen ergibt, dass die Matrix

$$\overline{A}^T = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 3i & -1-i \end{pmatrix}$$

die Inverse zu A ist. Also ist A unitär.

(b) Die Aussage ist falsch:
Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liegt in Jordanscher Normalform vor, ist invertierbar (Determinate = $1 \neq 0$), aber nicht diagonalisierbar, da sie andernfalls als bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen eindeutige Jordansche Normalform bereits Diagonalform haben müsste.

(c) Die Aussage ist wahr:
Aufgrund des Multiplikationssatzes für Determinanten gilt

$$\det A = \det\left(A^m\right) = (\det A)^m,$$

so dass mit $\det A \neq 0$ (wegen der Invertierbarkeit von A) zunächst folgt

$$(\det A)^{m-1} = 1$$

und daraus schließlich mit $\det A \in \mathbb{R}$ gerade

$$\det A \in \{\pm 1\}.$$

(d) Die Aussage ist wahr:
Angenommen es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\det(N - \lambda E_n) = 0$, dann muss es auch einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ geben mit

$$(N - \lambda E_n)\, v = 0.$$

Also folgt

$$Nv = \lambda v \quad \text{und insbesondere} \quad 0 = N^m v = \lambda^m v$$

und damit wegen $\lambda \neq 0$ gerade $v = 0$. Widerspruch!

Aufgabe 2. *[16 Punkte]* Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & az & = & 3 \\ 3x & + & (a+5)y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & 5 \end{array}.$$

(a) *[8 Punkte]* Untersuchen Sie in Abhängigkeit von dem Parameter a, ob das Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie für $a = 1$ die allgemeine Lösung des Gleichungssystems.

Lösung:

(a) Umformung der erweiterten Koeffizientmatrix mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform liefert zunächst

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & a-1 & -3a+1 & -2 \\ 0 & 0 & -a & -1 \end{array}.$$

Nun lässt sich direkt ablesen:
$a = 0$:
unlösbar (s. 3.Zeile)
$a = 1$:
unendlich viele Lösungen (s. 2./3. Zeile, Determinante Koeffizientenmatrix $= 0$)
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:
eindeutig lösbar (Determinante Koeffizientenmatrix $\neq 0$)

(b) Da für $a = 1$ die dritte Zeile der Zeilenstufenform aus (a) ein Vielfaches der zweiten ist, kann sie weggelassen werden, und man erhält durch weitere elementare Zeilenumformungen die normierte Zeilenstufenform

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}.$$

Daraus ergibt sich durch Ablesen die allgmeine Lösung

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3. *[17 Punkte]* Gegeben ist eine durch

$$a_1 \in [0, \infty), \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Zahlenfolge.

(a) *[4 Punkte]* Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle Anfangswerte $a_1 \in [0, \infty)$ monoton wachsend ist.

(b) *[4 Punkte]* Zeigen Sie: Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(c) *[3 Punkte]* Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle Anfangswerte $a_1 > 2$ auf Konvergenz.

(d) *[6 Punkte]* Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle Anfangswerte $a_1 \in [0, 2]$ auf Konvergenz.

Lösung:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - a_n = 1 - a_n + \frac{a_n^2}{4} = \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2 \geq 0$. Folglich ist die Folge monoton wachsend.

(b) Falls $d = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = d$ und $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{a_n^2}{4} = 1 + \frac{d^2}{4}$. Der Grenzwert erfüllt also die Gleichung $d = 1 + \frac{d^2}{4}$, d.h. $(d-2)^2 = 0$. Somit ist nur der Grenzwert $d = 2$ möglich.

(c) Aus $a_1 > 2$ folgt aus der Monotonie die Ungleichung $a_n \geq a_1 > 2$. Folglich kann die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall nicht konvergieren.

(d) Ist $a_1 \in [0, 2]$, so gilt $a_n \in [0, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies lässt sich mittels vollständiger Induktion nachweisen:
Nach Voraussetzung ist $a_1 \in [0, 2]$. Ist $a_n \in [0, 2]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt $0 < a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4} \leq 1 + \frac{2^2}{4} = 2$.
Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall beschränkt. Zusammen mit der schon nachgewiesenen Monotonie folgt, dass die Folge für alle Anfangswerte $a_1 \in [0, 2]$ gegen $d = 2$ konvergiert.

Aufgabe 4. *[22 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$$

(b) *[12 Punkte]* Zeigen Sie für alle $y > x > 0$ die folgende Ungleichung:

$$y \ln y - x \ln x \leq (y - x)(1 + \ln y)$$

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung.

Lösung:

(a) Für die Funktion $g : (0, \infty) \to (0, \infty),\ g(x) = x^x = e^{x \ln x}$ gilt für alle $x > 0$
$g'(x) = e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$.
Nach den Regeln von l'Hospital folgt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x (1 + \ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x (1 + \ln x)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.$$

(b) Mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(t) = t \ln t$ gilt für alle $t > 0$
$f'(t) = 1 + \ln t$.
Damit folgt für $y > x > 0$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y \ln y - x \ln x}{y - x} = f'(\xi)$$

mit einem geeigneten $\xi \in (x, y)$. Da die Funktion f' monoton wächst, gilt $f'(\xi) \leq f'(y)$ und damit wegen $y > x > 0$

$$y \ln y - x \ln x = f'(\xi)(y - x) \leq (y - x)(1 + \ln y).$$

Aufgabe 5. *[15 Punkte]* Die Funktion f sei zweimal stetig differenzierbar und es gelte

$$\int_0^\pi \big(f(x) + f''(x)\big) \sin x \, dx = 2$$

sowie $f(\pi) = 0$. Bestimmen Sie den Wert $f(0)$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Integral $\int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx$ separat.

Lösung: Zweimalige partielle Integration ergibt:

$$\int_0^\pi f''(x)\cdot\sin x\,dx = \underbrace{f'(x)\cdot\sin x\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi f'(x)\cdot\cos x\,dx =$$

$$-f(x)\cdot\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx = f(0) - \int_0^\pi f(x)\cdot\sin x\,dx.$$

Daraus folgt

$$f(0) = \int_0^\pi \big(f(x)+f''(x)\big)\sin x\,dx = 2.$$