DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18.10.2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 15 Seiten. Zusätzlich zu den 15 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoteilung] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) ohne weitere Begründung auszuwählen. Bitte notieren Sie Ihre Lösungen ausschließlich auf den Lösungsblättern.

(a) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Begriffe beschreibt *nicht* denselben mathematischen Sachverhalt zur Risikoteilung wie die anderen drei Bezeichnungen?

(i) Franchise

(ii) Priorität

(iii) Selbstbehalt

(iv) Zedent

(b) *[1 Punkt]* Was spielt bei Risikoteilung im *direkten Geschäft* zwischen Versicherungsnehmer und Erstversicherer *keine* Rolle?

(i) Anreiz zur Schadenverhütung beim Versicherungsnehmer

(ii) Ausschluss von Klein(st)schäden

(iii) Homogenisierung des Versicherungsbestandes

(iv) Preisreduktion für Versicherungsnehmer

(c) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Sachverhalte stellt *keine* Form von *proportionaler* Risikoteilung dar?

(i) Abzugsfranchise in der Kraftfahrt-Kaskoversicherung

(ii) Kostentarif mit Selbstbehaltsquote in der privaten Krankenversicherung

(iii) Summenexzedenten-Rückversicherung für ein Portfolio von Risikolebensversicherungen

(iv) Unterversicherung in der Hausratversicherung

(d) *[1 Punkt]* Bei welcher der folgenden Naturgefahren ist die Abgrenzung einzelner Kumulereignisse für einen **CAT-XL-Vertrag** besonders schwierig und daher als Rückversicherungsform für die gesuchte Gefahr in der Praxis unüblich?

(i) Frost

(ii) Hagel

(iii) Starkregen

(iv) Sturm

(e) *[1 Punkt]* Welche Notation stellt einen **Jahresüberschadenexzedenten** mit einem Stop-Loss-Punkt von 10 Mio. und einem Plafond von 25 Mio. dar?

(i) 10 Mio. xs. 25 Mio.

(ii) 15 Mio. xs. 10 Mio.

(iii) 25 Mio. xs. 10 Mio.

(iv) 25 Mio. xs. 35 Mio.

(f) *[1 Punkt]* Bei welchem der folgenden Paare von **XL-Verträgen** sind die beiden Verträge direkt aneinander gereiht?

(i) 4 Mio. xs. 5 Mio. und 6 Mio. xs. 7 Mio.

(ii) 3 Mio. xs. 4 Mio. und 5 Mio. xs. 6 Mio.

(iii) 2 Mio. xs. 3 Mio. und 4 Mio. xs. 5 Mio.

(iv) 1 Mio. xs. 2 Mio. und 3 Mio. xs. 4 Mio.

(g) *[1 Punkt]* Wie hoch ist bei einer **Summenexzedentenrückversicherung** die vertragsindividuelle Quote für eine Versicherungssumme von 100 bei einem Maximum von 400 und einer Haftungsbegrenzung auf 3 Maxima?

(i) 0%

(ii) 25%

(iii) 50%

(iv) 75%

(h) *[1 Punkt]* Welche Formel beschreibt das Erstrisiko $\underline{X}$ einer **Schadenexzedentenrückversicherung** mit einem Limit von 7 und einem Plafond von 12?

(i)
$$\underline{X} = \max\{\min\{X; 5\}; X - 7\}$$

(ii)
$$\underline{X} = \max\{\min\{X; 5\}; X - 12\}$$

(iii)
$$\underline{X} = \min\{X; 7\} + \max\{X - 7; 0\}$$

(iv)
$$\underline{X} = \min\{X; 7\} + \max\{X - 12; 0\}$$

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Kalkulation von Prämien, Modelle der Risikotheorie] [14 Punkte]*

Die Gesamtsumme S^{koll} aller Finanzaufwände eines Risikos über 1 Jahr sei durch ein **kollektives Modell** mit folgenden Annahmen bestimmt:

- Für die Anzahl N der Finanzaufwände gelte $N \sim \text{Poi}(\lambda_N)$ mit Erwartungswert $\text{E}(N) = 0{,}5$.
- Für die Höhe X eines Finanzaufwands gelte $X \sim \text{Exp}(\lambda_X)$ mit Erwartungswert $\text{E}(X) = 2.000$.

(a) *[2 Punkte]* Das hier gegebene Modell stellt einen Spezialfall des kollektiven Modells dar. Welche Besonderheit liegt hier vor? Wie wird im vorliegenden Fall die **Verteilung** $P_{S^{\text{koll}}}$ des Gesamtaufwands S^{koll} bezeichnet?

(b) *[6 Punkte]* Berechnen Sie unter den getroffenen Annahmen für das vorliegende Risiko die **Bruttorisikoprämie** P^{+} mittels Standardabweichungsprinzip mit Parameter $\delta = 0{,}1$. Runden Sie bei Bedarf Ihr Ergebnis und geben Sie die gesuchte Prämie auf zwei Nachkommastellen genau an.

(c) *[6 Punkte]* Beweisen Sie, dass das Standardabweichungsprinzip mit $\delta > 0$ die Eigenschaft der **Subadditivität** für zwei stochastisch unabhängige Risiken Y_1 und Y_2 erfüllt. Begründen Sie Ihre einzelnen Rechenschritte.
Hinweis zu (c):
Aus der Minkowski-Ungleichung ergibt sich die Aussage

$$\sqrt{\text{Var}(Y+Z)} \leq \sqrt{\text{Var}(Y)} + \sqrt{\text{Var}(Z)}$$

für quadratintegrierbare Zufallsvariablen Y und Z.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Modellierung von Versicherungsprozessen] [14 Punkte]*

Ein Erstversicherer möchte ein neues innovatives Produkt einführen, bei dem die Höhe der jährlichen Prämie von der **Anzahl ununterbrochen leistungsfreier Jahre** abhängen soll. Pro Jahr kann es höchstens einen Leistungsfall geben, der unabhängig von vorherigen Leistungen auftritt. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 tritt der Leistungsfall in einem Jahr ein und mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = 1 - p_1$ tritt der Leistungsfall nicht ein, wobei $0 < p_1 < 1$ gelte.

Im Aktuariat wird basierend auf vier Klassen folgende Preisstaffel entwickelt:

Klasse	**Zugangskriterium**	**Prämie**
K_1 Basisklasse	zuletzt kein leistungsfreies Jahr	π_1 Basisprämie
K_2 Bronzeklasse	zuletzt ein leistungsfreies Jahr	$\pi_2 = \pi_1 \cdot 0{,}9$
K_3 Silberklasse	zuletzt 2 ununterbrochen leistungsfreie Jahre	$\pi_3 = \pi_1 \cdot 0{,}75$
K_4 Goldklasse	zuletzt mind. 3 ununterbr. leistungsfreie Jahre	$\pi_4 = \pi_1 \cdot 0{,}55$

(a) *[1 Punkt]* Wie lautet der Fachbegriff für ein Regelwerk, wie es hier vorliegt, zur Prämiendifferenzierung? (keine weitere Begründung erforderlich)

(b) *[2 Punkte]* Erstellen Sie für die oben gegebenen Klassen und Zugangskriterien eine jährliche **Umstufungstabelle** folgender Form:

bisherige Klasse	**leistungsfreies Jahr**	**Jahr mit Leistungsfall**
K_1	neu $K_?$	neu $K_?$
K_2	neu $K_?$	neu $K_?$
K_3	neu $K_?$	neu $K_?$
K_4	neu $K_?$	neu $K_?$

(c) *[4 Punkte]* Geben Sie die **Übergangsmatrix** $T = \left(t_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,4}$, welche die oben gegebenen Klassen und Übergangsregeln (K_i bisher, K_j neu) repräsentiert, in Abhängigkeit von der Eintrittswahrscheinlichkeit des Leistungsfalls p_1 an.

(d) *[6 Punkte]* Für den Fall $p_1 = 20\%$ hat das Aktuariat die Bestandsverteilung

$$s = \left(\frac{25}{125}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{64}{125}\right)$$

für die Klassen (K_1, K_2, K_3, K_4) ermittelt.
Zeigen Sie für $p_1 = 20\%$, dass die Verteilung s **stationär** ist und berechnen Sie für eine Basisprämie von $\pi_1 = 625$ die **stationäre Prämie** $\bar{\pi}$.
Geben Sie die gesuchte Prämie auf zwei Nachkommastellen genau an.

(e) *[1 Punkt]* Beschreiben Sie kurz, welche inhaltliche Bedeutung die stationäre Prämie $\bar{\pi}$ hat?

Aufgabe 4. *[Basismodell Personenversicherungsmathematik, Erfüllungsbetrag, Leistungsbarwert] [14 Punkte]*

Wir betrachten im Rahmen des allgemeinen Bevölkerungsmodells der Personenversicherungsmathematik eine Aktivenausscheideordnung, also eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Wir wählen aus diesem Bestand einen Aktiven des Alters x aus. Für diese Person seien folgende Zufallsvariablen definiert:

M: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität

N: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Todes

(a) *[4 Punkte]* Wir betrachten den Erfüllungsbetrag

$$B = v^{M+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{N-M}|} \cdot 1_{\{N>M\}}.$$

Beschreiben Sie genau, um welche Art Verpflichtung es sich bei B handelt (insbesondere unter Angabe welche Zahlungen zu leisten sind, wann diese beginnen und enden).

(b) *[3 Punkte]* Geben Sie die Realisierungen b_{mn}, $m, n = 0, 1, \ldots$, von B an und geben Sie hiermit den Erwartungswert $\mathbb{E}[B]$ an.

(c) *[7 Punkte]* Geben Sie in der üblichen versicherungsmathematischen Notation der Ausscheidewahrscheinlichkeiten in einer Aktivenausscheideordnung die folgenden Wahrscheinlichkeiten für $m \geq 0, n > m$ an (Hinweis: Es gilt $\mathbb{P}[N = m \,|\, M = m] = {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}$):

$$\mathbb{P}[M = m]$$
$$\mathbb{P}[N = n \,|\, M = m]$$

und zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass für den Erwartungswert von B gilt:

$$\mathbb{E}[B] = \sum_{m \geq 0} \sum_{n > m} v^{m+1} \cdot {}_{m}p^{a}_{x} \cdot i_{x+m} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1}p^{i}_{x+m+1} \cdot q^{i}_{x+n} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|}$$

Aufgabe 5. *[Personenversicherungsmathematik, Rückstellungen] [22 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Die retrospektive Reserve ${}_mV_x^{retro}$ ist definiert durch:

$$ {}_mV_x^{retro} := \frac{1}{v^m \cdot {}_mp_x}\left({}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot \left({}_k\widehat{P}_x - {}_k\widehat{L}_x\right)\right), \quad m = 0, 1, \ldots. $$

Wir setzen hierbei voraus, dass ${}_mp_x \neq 0$ gilt.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass gilt:

$$ {}_mV_x^{retro} + {}_m\widehat{P}_x = {}_m\widehat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}, \quad m = 0, 1, \ldots $$

Hinweis: Führen Sie $v^{m+1} \cdot {}_{m+1}p_x \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}$ in eine Darstellung in Abhängigkeit von ${}_mV_x^{retro}$ über.

(b) *[9 Punkte]* Die prospektive Reserve ${}_mV_x^{pro}$ ist definiert durch:

$$ {}_mV_x^{pro} = {}_mB_x^L - {}_mB_x^P = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_kp_{x+m} \cdot \left({}_{m+k}\widehat{L}_x - {}_{m+k}\widehat{P}_x\right), \quad m = 0, 1, \ldots. $$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass gilt:

$$ {}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{1}{v^m \cdot {}_mp_x} \cdot \left({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro}\right) $$

Hinweis: Führen Sie $v^m \cdot {}_mp_x \cdot {}_mV_x^{retro}$ in eine Darstellung in Abhängigkeit von ${}_0V_x^{pro}$ und ${}_mV_x^{pro}$ über.

(c) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung der Größen ${}_0V_x^{pro}$ und ${}_0V_x^{retro}$.

Aufgabe 6. *[Pensionsversicherungsmathematik, Bewertungsverfahren] [18 Punkte]*

Die Hurra GmbH hat ihren Beschäftigten unmittelbare Pensionszusagen erteilt. Gewährt werden Renten ab Eintritt der Invalidität und ab Erreichen der vertraglichen Altersgrenze von 65 Jahren.

Die Höhe der Anwartschaft auf Alters- und Invalidenrente beträgt 400,00 EUR monatlich. Nach 10 vollendeten Dienstjahren erhöht sich die Anwartschaft auf Alters- und Invalidenrente um 200,00 EUR auf dann monatlich 600,00 EUR.

Wir betrachten nun eine Mitarbeiterin der Hurra GmbH, Frau Erika Muster, die am 19.09.1975 geboren wurde und am 01.05.2006 in die Hurra GmbH eingetreten ist.

Hinweis: Die Zuordnungen von Leistungen zu Altern soll im Folgenden mit Hilfe der Rückrechnungsmethode erfolgen.

(a) *[11 Punkte]* Geben Sie für die an Frau Erika Muster erteilte Pensionszusage den steuerlichen Teilwert nach § 6a EStG zum Bilanzstichtag 31.12.2024 unter Verwendung der Barwerte der Heubeck-Richttafeln 2018 G an. Als Pensionierungsalter für die Teilwertberechnung soll die vertragliche Altersgrenze in Ansatz gebracht werden.

(b) *[2 Punkte]* Zu welchem Bilanzstichtag darf die steuerliche Pensionsrückstellung erstmalig gebildet werden, wenn Frau Muster bereits am 01.05.1996 in die Gesellschaft eingetreten ist und zu diesem Zeitpunkt auch die Pensionszusage erhalten hat? Eine Begründung ist nicht erforderlich.

(c) Ihr Mandant möchte in der Pensionszusage alle 3 Jahre eine Anpassung der laufenden Renten in Höhe des Anstiegs des Verbraucherpreisindexes für Deutschland vorsehen und lässt sich hierzu von Ihnen beraten.

   (i) *[3 Punkte]* Kann bzw. muss eine solche Anpassungsklausel in der Bewertung für die Handelsbilanz und in der Bewertung für die Steuerbilanz im Rahmen der Rententrendannahme berücksichtigt werden? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

   (ii) *[2 Punkte]* Geben Sie ein Beispiel für eine Rentenanpassungsklausel in der Zusage an, die bei der steuerlichen Bewertung im Rahmen der Rententrendannahme berücksichtigt werden kann.

Aufgabe 7. *[Lebensversicherungsmathematik, Standardformeln] [8 Punkte]*

Bei einem Lebensversicherungsvertrag kommen folgende Werte zur Anwendung:

x	q_x	l_x	$_{\lvert 2}A_x$	$_{\lvert 4}A_x$	$_{\lvert 6}A_x$	$\ddot{a}_{x:\overline{2}\rvert}$	$\ddot{a}_{x:\overline{4}\rvert}$	$\ddot{a}_{x:\overline{6}\rvert}$
45	0,00162	98.010	0,0033	0,0071	0,0113	1,988	3,931	5,827
46	0,00175	97.851	0,0036	0,0076	0,0122	1,988	3,930	5,825
47	0,00188	97.680	0,0038	0,0082	0,0132	1,988	3,929	5,823
48	0,00203	97.496	0,0041	0,0089	0,0142	1,988	3,928	5,821
49	0,00219	97.298	0,0045	0,0095	0,0153	1,988	3,928	5,818
50	0,00236	97.085	0,0048	0,0103	0,0165	1,988	3,926	5,816

(a) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert $_2p_{46}$ und geben Sie die inhaltliche Bedeutung an.

(b) *[2 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung des Werts $\ddot{a}_{50:\overline{6}\rvert}$.

(c) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die laufende jährliche vorschüssige Netto-Prämie für eine Risikolebensversicherung einer 45-jährigen Person mit 4-jähriger Laufzeit und einer Versicherungssumme von 100.000 Euro. Nutzen Sie die Werte aus der Tabelle.

(d) *[2 Punkte]* Wie groß ist die Netto-Deckungsrückstellung für den Vertrag aus (c) nach zwei Jahren, wenn der Vertrag dann noch existiert? Nutzen Sie die Werte aus der Tabelle.

Aufgabe 8. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und rekursive Ansätze] [10 Punkte]*

Betrachten Sie den folgenden Pseudo-Programmiercode einer Funktion, die sich selbst aufruft (Selbstaufruf in Zeile 16):

```
1  Funktion Funktionsname(P, m, x)
2      Definiere L, v, px, myP, Wert als Gleitkommazahlen
3      Setze v = 1 / 1.01 und myP = 0
4      Wenn (x + m < 68) Dann
5          myP = P
6      Ende-Wenn
7      Wenn (x + m = 121) Dann
8          Gib 12000 zurueck
9      Sonst
10         L = 100 + 0.01 * myP
11         Wenn (x + m > 66) Dann
12             L = L + 12000
13         Ende-Wenn
14         px = px_Funktion(x + m, 2025 + m)
15         Wert = L + (1 - px) * m * myP
16         Wert = Wert - myP + v * px * Funktionsname(P, m + 1, x)
17         Gib Wert zurueck
18     Ende-Wenn
19 Ende-Funktion
```

(a) *[6 Punkte]* Um welche Art von Lebensversicherung geht es bei dieser Funktion? Beschreiben Sie insbesondere Leistungen, Prämien und Kosten. Gehen Sie auch auf den Rechnungszins ein. Benennen Sie die Zeilen im Pseudo-Programmiercode, um Ihre Aussagen zu unterstützen.

(b) *[4 Punkte]* Welche zwei zentralen Größen dieses Lebensversicherungsvertrags können mit dieser Funktion berechnet werden? Erläutern Sie Ihre Antwort anhand des Funktionsaufrufs **`Funktionsname(0, 30, 50)`** und anhand des zweiten Funktionsaufrufs **`Funktionsname(17129, 0, 50)`**. Nutzen Sie dabei die zusätzliche Information, dass der erste Funktionsaufruf den Wert 219.528 liefert und der zweite Funktionsaufruf den Wert 0.

Aufgabe 9. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Prämien] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gemäß § 2 (3) KVAV müssen Rechnungsgrundlagen in der PKV mit ausreichenden Sicherheiten versehen werden. In welche Richtung werden Best Estimate Schätzungen verändert, um bei Zins, Ausscheidewahrscheinlichkeiten, Kopfschäden sowie Kosten in der PKV Sicherheiten zu erzeugen?

(b) *[4 Punkte]* Was wäre eine Generationen-Kopfschadenstatistik (vergleichbar zu einer Generationen-Sterbetafel)? Warum kommt eine derartige Kopfschadenstatistik in der PKV nicht zum Einsatz?

(c) *[2 Punkte]* Was ist ein Profil in der PKV?

Aufgabe 10. *[Krankenversicherungsmathematik, Beitragsanpassungsklausel]* *[8 Punkte]*

§ 203 des Versicherungsvertragsgesetzes beinhaltet unter anderem Regelungen zur Prämienanpassung. Füllen Sie den nachfolgenden kursiv geschriebenen Lückentext aus. Übertragen Sie alle fehlenden Wörter nummeriert in Ihren Lösungsbogen (Bewertung: 1 Punkt pro Lücke). Eintragungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht bewertet.

Absatz 1:

Bei einer Krankenversicherung, bei der die Prämie ___(1)___ berechnet wird, kann der Versicherer nur die entsprechend den technischen Berechnungsgrundlagen nach den §§ 146, 149, 150 in Verbindung mit § 160 des Versicherungsaufsichtsgesetzes zu berechnende Prämie verlangen. Außer bei Verträgen im Basistarif nach § 152 des Versicherungsaufsichtsgesetzes kann der Versicherer mit Rücksicht auf ein erhöhtes Risiko einen angemessenen ___(2)___ oder einen ___(3)___ vereinbaren. [...]

Absatz 2:

Ist bei einer Krankenversicherung das ___(4)___ des Versicherers gesetzlich oder vertraglich ausgeschlossen, ist der Versicherer bei einer ___(5)___ Veränderung einer für die Prämienkalkulation ___(6)___ berechtigt, die Prämie entsprechend den berichtigten Rechnungsgrundlagen auch für bestehende Versicherungsverhältnisse neu festzusetzen, sofern ein ___(7)___ die technischen Berechnungsgrundlagen überprüft und der Prämienanpassung zugestimmt hat. Dabei dürfen auch ein betragsmäßig festgelegter ___(8)___ angepasst und ein vereinbarter Risikozuschlag entsprechend geändert werden, soweit dies vereinbart ist. [...]

Aufgabe 11. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen]*
[14 Punkte]

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen		
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter	Dritter
1	01.01.	**30.06.**	2000	15	30		
2	01.01.	**30.09.**	5000	15			
3	01.01.	31.12.	4000	10			
4	01.01.	31.12.	5000	15	20	10	
5	**01.04.**	31.12.	6000	25			

Berechnen Sie den Schadenbedarf und den Durchschnittsschaden.

(b) *[4 Punkte]* Wie kritisch ist es (im Allgemeinen, d. h. nicht bezogen auf den Bestand in a)), wenn der Durchschnittsschaden (dauerhaft) den Schadenbedarf übersteigt? Wann genau liegt dieser Fall vor?

(c) *[4 Punkte]* Beurteilen Sie die Profitabilität des Bestandes aus a) mit einer geeigneten Kennzahl.

Aufgabe 12. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Welche Konsequenzen für die Tarifierung hat das Gebot der Unisex-Tarifierung?

(b) *[8 Punkte]* Erläutern Sie den Begriff eines multiplikativen Modells im Kontext der Tarifierung. Wie ist ein Marginalfaktor von 0,9 zu interpretieren?

(c) *[6 Punkte]* Erläutern Sie – im Kontext der Tarifierung und für den Spezialfall von genau zwei Tarifmerkmalen $(r = 2)$ – den Begriff der Marginalsummengleichungen. Welche Zielgrößen können aus diesen Gleichungen ermittelt werden?

(d) *[6 Punkte]* Welche Kriterien spielen bei der Auswahl der Tarifmerkmale eine Rolle? Nennen Sie (mindestens) vier dieser Kriterien und erläutern Sie zwei davon kurz.

Aufgabe 13. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [18 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre $i = 2021, \ldots, 2024$ und für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$ die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ sowie die Prämieneinnahmen π_i:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2021	200	350	450	585	675
2022	150	220	405		465
2023	300	600			485
2024	500				1100

(i) *[6 Punkte]* Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2023 und 2024 mit dem Chain-Ladder-Verfahren (CL).

(ii) *[6 Punkte]* Schätzen Sie die Reserve (nur) für das Anfalljahr 2024 mit dem Additiven Verfahren unter Verwendung der Prämien als Volumenmaße.

Hinweis: Die Schätzer der Reserven sind auf ganze Zahlen zu runden.

(b) *[6 Punkte]* Beurteilen Sie die Gegebenheiten des Bestandes aus (a). Gibt es auffällige Besonderheiten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a) *[1 Punkt]* (iv)

(b) *[1 Punkt]* (iii)

(c) *[1 Punkt]* (i)

(d) *[1 Punkt]* (i)

(e) *[1 Punkt]* (ii)

(f) *[1 Punkt]* (iii)

(g) *[1 Punkt]* (i)

(h) *[1 Punkt]* (i)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[2 Punkte]* $P_{S^{\text{koll}}}$ ist eine **zusammengesetzte Poisson-Verteilung** im vorliegenden Spezialfall, dass N Poisson-verteilt ist.

(b) *[6 Punkte]* Aus den Modellannahmen ergeben sich für N bzw. X folgende Aussagen:

$$\lambda_N = \mathrm{E}(N) = 0{,}5 \quad \text{und}$$
$$\lambda_X = \frac{1}{\mathrm{E}(X)} = \frac{1}{2.000} \quad \text{sowie} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda_X^2} = 4.000.000$$

Wegen $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$ gilt zudem:

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = 4.000.000 + 2.000^2 = 8.000.000$$

Für das vorliegende kollektive Modell (Spezialfall) folgt dann:

$$\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda_N \cdot \mathrm{E}(X) = 0{,}5 \cdot 2.000 = 1.000 \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda_N \cdot \mathrm{E}\left(X^2\right) = 0{,}5 \cdot 8.000.000 = 4.000.000$$

Daraus resultiert die Bruttorisikoprämie in der geforderten Darstellung:

$$P^+ = \mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right)} = 1.000 + 0{,}1 \cdot \sqrt{4.000.000} = 1.200{,}00$$

(c) *[6 Punkte]* Es ist zu zeigen, dass $H(Y_1 + Y_2) \leq H(Y_1) + H(Y_2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
H(Y_1 + Y_2) &\overset{(1)}{=} \mathrm{E}(Y_1 + Y_2) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2)} \\
&\overset{(2)}{=} \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2)} \\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2)} \\
&\overset{(4)}{\leq} \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + \delta \cdot \left(\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)} + \sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)}\right) \\
&\overset{(5)}{=} \mathrm{E}(Y_1) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)} + \mathrm{E}(Y_2) + \delta \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)} \quad \overset{(6)}{=} H(Y_1) + H(Y_2)
\end{aligned}$$

(1) Definition Standardabweichungsprinzip für $Y_1 + Y_2$

(2) Linearität des Erwartungswerts

(3) stochastische Unabhängigkeit von Y_1 und Y_2

(4) Ungleichung aus Hinweis zur Aufgabenstellung und $\delta > 0$

(5) Ausmultiplizieren und Umsortierung der Terme

(6) Definition Standardabweichungsprinzip für Y_1 und Y_2

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) *[1 Punkt]* Bonus-Malus-System

(b) *[2 Punkte]*

bisherige Klasse	**leistungsfreies Jahr**	**Jahr mit Leistungsfall**
K_1	neu K_2	neu K_1
K_2	neu K_3	neu K_1
K_3	neu K_4	neu K_1
K_4	neu K_4	neu K_1

(c) *[4 Punkte]*
Die Übergangsmatrix T in Abhängigkeit von p_1 lautet:

$$T = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 1-p_1 \\ p_1 & 0 & 0 & 1-p_1 \end{pmatrix}$$

(d) *[6 Punkte]*
Für die stationäre Verteilung ist zu zeigen, dass die Matrixgleichung $s \cdot T = s$ für $p_1 = 20\%$ erfüllt ist:

$$\left(\frac{25}{125}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{64}{125}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{25}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{64}{125}, \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{125}, \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{125}, \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{125} + \frac{4}{5} \cdot \frac{64}{125}\right)$$

$$= \left(\frac{25}{625} + \frac{20}{625} + \frac{16}{625} + \frac{64}{625}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{64}{625} + \frac{256}{625}\right)$$

$$= \left(\frac{125}{625}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{320}{625}\right) = \left(\frac{25}{125}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{64}{125}\right) = s$$

Für die stationäre Prämie wird die Formel $\bar{\pi} = s \cdot (\pi_1; \pi_2; \pi_3; \pi_4)^T$ mit $\pi_1 = 625$ angewendet:

$$\left(\frac{25}{125}, \frac{20}{125}, \frac{16}{125}, \frac{64}{125}\right) \cdot (625;\ 562{,}50;\ 468{,}75;\ 343{,}75)^T = 451{,}00$$

(e) *[1 Punkt]* Die stationäre Prämie stellt die durchschnittliche bestandsgewichtete Prämie des Bonus-Malus-Systems nach einer gewissen Einschwingzeit dar.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) B stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente der Höhe 1 dar, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt der Invalidität, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes.

(b) Es gilt $b_{mn} = v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|}$ für $n > m$ und $b_{mn} = 0$ sonst.

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[B\right] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn} \cdot \mathbb{P}\left[B = b_{mn}\right] \\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}\left[M = m, N = n\right] \end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$\mathbb{P}\left[M = m\right] = {}_{m}p_x^a \cdot i_{x+m}$ für $m \geq 0$

sowie

$\mathbb{P}\left[N = n \,|\, M = m\right] = {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n}$ für $n > m$

Man erhält:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[B\right] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}\left[M = m, N = n\right] \\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}\left[N = n \,|\, M = m\right] \cdot \mathbb{P}\left[M = m\right] \\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n} \cdot {}_{m}p_x^a \cdot i_{x+m} \\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot {}_{m}p_x^a \cdot i_{x+m} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) Für die retrospektive Reserve gilt

$$v^{m+1} \cdot {}_{m+1}p_x \cdot {}_{m+1}V_x^{retro} = {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) =$$

$$= \underbrace{{}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x)}_{v^m \cdot {}_mp_x \cdot {}_mV_x^{retro}} + v^m \cdot {}_mp_x \cdot ({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x)$$

Und somit gilt:

$$v^m \cdot {}_mp_x \cdot v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro} = v^m \cdot {}_mp_x \cdot {}_mV_x^{retro} + v^m \cdot {}_mp_x \cdot ({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x)$$

Mit ${}_mp_x \neq 0$ folgt:

$${}_mV_x^{retro} + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x^{retro}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
v^m \cdot {}_mp_x \cdot {}_mV_x^{retro} &= {}_0V_x^{retro} + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \\
&= {}_0V_x^{retro} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x)}_{-{}_0V_x^{pro}} - \sum_{k\geq m} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \\
&= {}_0V_x^{retro} - {}_0V_x^{pro} + v^m \cdot {}_mp_x \underbrace{\sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_{x+m} \cdot ({}_{m+k}\hat{L}_x - {}_{m+k}\hat{P}_x)}_{{}_mV_x^{pro}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad {}_mV_x^{pro} - {}_mV_x^{retro} = \frac{1}{v^m \cdot {}_mp_x} \cdot ({}_0V_x^{pro} - {}_0V_x^{retro})$$

(c) ${}_0V_x^{pro}$ stellt den Betrag dar, der zum Beginn des Vertrags vorhanden sein muss, um die zukünftigen Leistungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien rechnungsmäßig leisten zu können.

${}_0V_x^{retro}$ ist das eingesetzte tatsächliche Anfangskapital.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

Geburtsdatum:	19.09.1975
Eintrittsdatum:	01.05.2006
Stichtag:	31.12.2024
vertragliche Altersgrenze:	65 Jahre

(a) Versicherungstechnisches Alter am Stichtag: $x+m=49$

Versicherungstechnisches Alter zu Beginn des Eintrittswirtschaftsjahres (dieser ist am 01.01.2006): $x=30$

Vollendete Dienstjahre bis zur vertraglichen Altersgrenze (diese wird am 19.09.2040 erreicht): 34

Alter bei Eintritt nach der Rückrechnungsmethode: $65-34=31$

10 Dienstjahre vollendet im Alter: $31+10=41$

Formel für den steuerlichen Teilwert:

$$_{m}V_{x} \quad = \quad {}_{m}B_{x}^{L} - P_{x}\cdot \ddot{a}^{a}_{x+m,\,\overline{n-m}|} \qquad \text{mit} \qquad P_{x}=\frac{{}_{0}B_{x}^{L}}{\ddot{a}^{a}_{x,\,\overline{n}|}}$$

Somit lautet zum Stichtag 31.12.2024 die Formel für den Teilwert der beschriebene Zusage:

$$_{19}V_{30} \quad = \quad {}_{19}B_{30}^{L} - \frac{{}_{0}B_{30}^{L}}{\ddot{a}^{a}_{30,\,\overline{35}|}}\cdot \ddot{a}^{a}_{49,\,\overline{16}|}$$

mit

$$\begin{aligned} {}_{0}B_{30}^{L} &= 400\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{30} + 200\cdot 12\cdot v^{11}\cdot {}_{11}p^{a}_{30}\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{41} \\ {}_{19}B_{30}^{L} &= 600\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{49} \end{aligned}$$

(b) Die steuerliche Pensionsrückstellung darf erstmalig zum 31.12.2006 gebildet werden.
Begründung (nicht erforderlich): In § 6a Abs. 2 EStG ist ein Mindestalter für den erstmaligen Ansatz einer steuerlichen Pensionsrückstellung festgelegt. Bei einer Zusageerteilung am 01.05.1996 darf eine Rückstellung erstmals in dem Wirtschaftsjahr gebildet werden, bis zu dessen Mitte die Pensionsberechtigte das 30. Lebensjahr vollendet. Dies ist erstmalig zum 31.12.2006 der Fall.

(c) (i) Bei der handelsrechtlichen Bewertung sind Trendannahmen explizit zu berücksichtigen. Bei der steuerlichen Bewertung hingegen können nach dem strengen Stichtagsprinzip ungewisse Erhöhungen erst dann einbezogen werden, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen. Die Entwicklung des Verbraucherpreisindex in der Zukunft steht zum Bewertungstichtag der Höhe nach noch nicht fest.

(ii) Eine zugesagte Rentenanpassung in Höhe eines festen Prozentsatzes alle x Jahre könnte auch bei der steuerlichen Bewertung als Trendannahme verwendet werden, da zum Stichtag auch die Höhe der künftigen Anpassungen feststeht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

a) *[2 Punkte]* Es ist:

$$\frac{l_{48}}{l_{46}} = \frac{97.496}{97.851} = 0{,}99637.$$

Die zweijährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer 46-jährigen Person beträgt 99,637 %.
Alternativer Rechenweg:

$$(1 - q_{46}) \cdot (1 - q_{47}) = (1 - 0{,}00175) \cdot (1 - 0{,}00188) = 0{,}99637.$$

b) *[2 Punkte]* Es handelt sich um einen erwarteten Barwert einer temporären Leibrente der Höhe 1 für eine 50-jährige Person mit einer Laufzeit von sechs Jahren. Der Barwert der erwarteten Leistungen hat einen Wert von

$$\ddot{a}_{50:\overline{6}|} = 5{,}816.$$

c) *[2 Punkte]* Mit dem Äquivalenzprinzip ergibt sich:

$$P = \frac{100.000 \cdot {}_{|4}A_{45}}{\ddot{a}_{45:\overline{4}|}} = \frac{100.000 \cdot 0{,}0071}{3{,}931} = 180{,}62.$$

d) *[2 Punkte]* Die Deckungsrückstellung beträgt:

$$100.000 \cdot {}_{|2}A_{47} - P \cdot \ddot{a}_{47:\overline{2}|} = 100.000 \cdot 0{,}0038 - 180{,}62 \cdot 1{,}988 = 20{,}93.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

a) *[6 Punkte]* Es handelt sich um eine aufgeschobene Rentenversicherung. Das Rentenbeginnalter ist 67 (Zeile 11 bis 13). Bis dahin werden jährlich vorschüssig Prämien gezahlt (Zeile 4 bis 6); ab Alter 67 wird jährlich vorschüssig eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt (Zeile 11 bis 13). Die jährlichen Stückkosten betragen 100 Euro. Außerdem wird zusätzlich während der Beitragszeit ein Prozent der Prämie an Kosten erhoben (Zeile 10). Bis zum Renteneintritt ist bei Tod eine Beitragsrückgewähr beinhaltet (Zeile 15). Der Rechnungszins beträgt 1 Prozent (Zeile 3).

b) *[4 Punkte]* Mit dieser Funktion kann einerseits die Prämie zu Vertragsbeginn und andererseits die Deckungsrückstellung zu Vertragsbeginn oder zu einem zukünftigen Zeitpunkt kalkuliert werden. Die Deckungsrückstellung im Alter 80 beträgt 219.528 Euro (siehe erster Funktionsaufruf). Die Prämie ist eine Nullstelle dieser Funktion `Funktionsname(...)`. Sie beträgt jährlich vorschüssig bis einschließlich Alter 66 gerade 17.129 Euro (siehe zweiter Funktionsaufruf) für eine Person, die im Alter 50 die aufgeschobene Rentenversicherung gekauft hat.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

a) *[4 Punkte]*
Zins: ↘
Sterbe- und Storno-Wahrscheinlichkeiten: ↘
Kopfschäden: ↗
Kosten: ↗

b) *[4 Punkte]* Eine Generationen-Kopfschadenstatistik würde für jede Generation eine Kopfschadenreihe beinhalten. Einerseits ist diese Statistik schwer zu schätzen, andererseits ist sie durch die Möglichkeit einer Beitragsanpassung aus Risikosicht nicht erforderlich.

c) *[2 Punkte]* Ein Profil ist eine normierte Kopfschadenreihe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

Die Lücken sind durch folgende Wörter zu füllen (1 Punkt pro Lücke):

(1) nach Art der Lebensversicherung

(2) Risikozuschlag

(3) Leistungsausschluss

(4) ordentliche Kündigungsrecht

(5) nicht nur als vorübergehend anzusehenden

(6) maßgeblichen Rechnungsgrundlage

(7) unabhängiger Treuhänder

(8) Selbstbehalt

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[3+3 = 6 Punkte]* Die Anzahl der Jahreseinheiten oder die durchschnittliche Anzahl der Verträge ist

$$n_o = 0{,}5 + 0{,}75 + 1 + 1 + 0{,}75 = 4\,.$$

Die Summe der (Einzel-)Schäden ist der Gesamtschaden

$$S = 30 + 20 + 10 = 60\,.$$

Der Schadenbedarf ist somit:

$$SB = \frac{S}{n_o} = \frac{60}{4} = 15\,.$$

Da die Anzahl der Schäden $N = 3$ ist, ergibt sich der Durchschnittsschaden

$$D = \frac{S}{N} = \frac{60}{3} = 20\,.$$

(Die Beiträge und die Versicherungssummen gehen nicht in die hier gefragten Kennzahlen ein. Die Beiträge sind aber in c) zu berücksichtigen.)

(b) *[2+2 = 4 Punkte]* Durchschnittschaden (D) und Schadenbedarf (SB) sind nicht sinnvoll zu vergleichen. In den Durchschnittsschaden geht nur die Anzahl die Schäden (N) ein – unabhängig von der (durchschnittlichen) Anzahl der Verträge n_o. Bei dem Schadenbedarf ist es genau umgekehrt. In Formeln gelten die Äquivalenzen

$$D > SB \Leftrightarrow \frac{S}{N} > \frac{S}{n_O} \Leftrightarrow n_O > N \Leftrightarrow H = \text{Schadenhäufigkeit} = \frac{N}{n_O} < 1.$$

Der Fall $D > SB$ liegt also genau dann vor, wenn die Schadenhäufigkeit H kleiner als 1 ist. Dieser Fall ist in der Schadenversicherung im Allgemeinen absolut unkritisch und vielmehr die Regel.

(c) *[4 Punkte]* Zur Beurteilung der Profitabilität sind die Schadenaufwendungen mit den Beiträgen zu vergleichen. Dazu ist die Summe der verdienten Beiträge zu berechnen:

$$b = 15 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 0{,}75 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 25 \cdot 0{,}75 = 62{,}50\,.$$

Die Schadenquote ist somit

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{60}{62,5} = 96\%\,.$$

Eine Schadenquote von 96 % ist als sehr hoch zu bewerten. Da noch keine Kosten berücksichtigt wurden, dürfte die Combined Ratio über 100 % liegen und der Bestand somit in dem betrachteten Jahr nicht profitabel gewesen sein.
(Allerdings erfordern fundierte Beurteilungen der Profitabilität mehrperiodische Betrachtungen und das Einbeziehen der Kosten.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) *[2 Punkte]* Seit Einführung der EU-weiten Unisex-Tarifierung 2012 ist das Geschlecht nicht mehr als Tarifmerkmal zugelassen. In den meisten Zweigen der Schadenversicherung zählt es allerdings auch nicht zu den relevanten Risikomerkmalen.

(b) *[(6+2) = 8 Punkte]*
Multiplikative Modelle der Tarifierung sind spezielle Tarif(ierungs)modelle. Ein Tarifmodell ordnet den Risikoklassen – formal eindeutig festgelegt durch ein r-Tupel $i := (i_1, i_2, \dots, i_r)$ – (Nettorisiko-)Prämien

$$b_i := b_{i_1, i_2, \dots, i_r}$$

zu. Ausgangspunkt ist der Schadenbedarf (Kollektivmittel) des gesamten Bestands

$$sb := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Kumulierte Jahreseinheiten (Volumenmaße)}}\,.$$

Der individuelle Einfluss der Risikoklasse (i) bzw. der in dieser Tarifzelle vorliegenden Merkmalsausprägungen wird bei multiplikativen Modellen durch die sogenannten Marginalfaktoren u_{j,i_j} berücksichtigt. Es resultiert der Ansatz

$$b_i = b_{i_1, i_2, \dots, i_r} = sb \cdot \prod_{j=1}^{r} u_{j,i_j}\,.$$

Die Marginalfaktoren sind durch geeignete Verfahren, etwa Ausgleichsverfahren, zu schätzen.

Marginalfaktoren sind nur dann sinnvoll zu interpretieren, wenn sie normiert sind. In diesem Fall entspräche ein Marginalfaktor von $0,9$ einem relativen Risikoabschlag von 10 %.

(c) *[6 Punkte]* Die Marginalsummengleichungen sind die kalkulatorische Grundlage des Marginalsummenverfahrens (MSV). Das MSV setzt im Fall $r = 2$ wie folgt an:

- Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen. Die resultierenden Gleichungen sind die folgenden Marginalsummengleichungen:

$$\sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot b_{i,j} = sb \cdot x_i \cdot \sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot y_j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{q} s_{i,j} = s_{i\bullet} \quad , i = 1, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^{p} v_{i,j} \cdot b_{i,j} = sb \cdot y_j \cdot \sum_{i=1}^{p} v_{i,j} \cdot x_i \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{p} s_{i,j} = s_{\bullet j} \quad , j = 1, \ldots, q$$

Dabei sind $x_i = u_{1,i}$ bzw. $y_j = u_{2,j}$ die Marginalfaktoren des 1. bzw. 2. Merkmals.

- Die Lösungen $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ ergeben sich durch ein System von $p + q$ nichtlinearen Fixpunktgleichungen und nur iterativ. Die Lösungen sind nicht eindeutig bestimmt, aber deren Produkte $x_i \cdot y_j$ und damit die Nettorisikoprämien $b_{i,j}$.

- Das MSV generiert als Zielgrößen die Nettorisikoprämien (Schätzer der Schadenerwartungswerte) durch den Ansatz:

$$b_{i,j} = sb \cdot x_i \cdot y_j \, .$$

(d) *[(2+4) = 6 Punkte]* Die Auswahl der Tarifmerkmale berücksichtigt i. d. R. die folgenden Kriterien:

- Erklärungsgehalt, Signifikanz, Bestimmtheit
- Unabhängigkeit, Multikollinearität
- Zulässigkeit
- Messbarkeit
- Verwaltbarkeit
- Stabilität, Robustheit
- Akzeptanz, Glaubwürdigkeit
- Imageaspekte, Geschäftspolitik

Kurze Erläuterungen, etwa zu:

- Bestimmtheit: Es werden nur solche Risikomerkmale in die Tarifvierung einbezogen, die einen signifikanten Erklärungsgehalt (etwa gemessen durch den Korrelationskoeffizienten) für das Schadenverhalten aufweisen.

- Unabhängigkeit: Tarifmerkmale sollten untereinander stochastisch unabhängig sein. Die andernfalls vorliegende Multikollinearität kann zu Verzerrungen bei Schätzern für die Modellparameter und bei Konfidenzintervallen führen.
(I.e.S. werden die Tarifmerkmale stets mehr oder weniger abhängig sein, sodass dann Multikollinearität vorliegt. Relevant ist somit nicht das Vorhandensein, sondern das Ausmaß der Multikollinearität.)

- Zulässigkeit: Selbstverständlich sind nur solche Risikomerkmale auszuwählen, die als Tarifmerkmal aufsichtsrechtlich zugelassen sind. So sind etwa das Geschlecht und die Nationalität nicht zugelassen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

(a) *[6+6 = 12 Punkte]* a1) Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\widehat{\varphi}_3^{CL} := \frac{S_{2021,3}}{S_{2021,2}} = \frac{585}{450} = 1{,}3$$
$$\widehat{\varphi}_2^{CL} := \frac{S_{2021,2}+S_{2022,2}}{S_{2021,1}+S_{2022,1}} = \frac{450+405}{350+220} = \frac{855}{570} = 1{,}5$$
$$\widehat{\varphi}_1^{CL} := \frac{S_{2021,1}+S_{2022,1}+S_{2023,1}}{S_{2021,0}+S_{2022,0}+S_{2023,0}} = \frac{350+220+600}{200+150+300} = \frac{1.170}{650} = 1{,}8$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2023,3}^{CL} := S_{2023,1} \cdot \widehat{\varphi}_2^{CL} \cdot \widehat{\varphi}_3^{CL} = 600 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}3 = 1.170$$

und

$$\widehat{S}_{2024,3}^{CL} := S_{2024,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{CL} \cdot \widehat{\varphi}_2^{CL} \cdot \widehat{\varphi}_3^{CL} = 500 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}3 = 1.755\,.$$

Für die gesuchten Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus:

$$R_{2023}^{CL} := \widehat{S}_{2023,3}^{CL} - S_{2023,1} = 1.170 - 600 = 570$$
$$R_{2024}^{CL} := \widehat{S}_{2024,3}^{CL} - S_{2024,0} = 1.755 - 500 = 1.255$$

(Die Prämien werden hier nicht benötigt.)

a2) Für die Schätzer der Endschadenstände im Additiven Verfahren sind zunächst aus den Schadenständen durch Differenzenbildung die Zuwächse $Z_{i,k}$ zu ermitteln. Man erhält:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2021	200	150	100	135
2022	150	70	185	
2023	300	300		
2024	500			

Daraus ergeben sich die folgenden Schätzer der Schadenquotenzuwächse:

$$\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2021,1} + Z_{2022,1} + Z_{2023,1}}{\pi_{2021} + \pi_{2022} + \pi_{2023}} = \frac{150 + 70 + 300}{675 + 465 + 485} = \frac{520}{1.625} = 0{,}32$$
$$\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2021,2} + Z_{2022,2}}{\pi_{2021} + \pi_{2022}} = \frac{100 + 185}{675 + 465} = \frac{285}{1.140} = 0{,}25$$
$$\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2021,3}}{\pi_{2021}} = \frac{135}{675} = 0{,}20$$

Es resultiert die folgende Reserve für das Anfalljahr 2024:

$$\begin{aligned} R_{2024}^{\mathrm{AD}} &:= \widehat{S}_{2024,3}^{\mathrm{AD}} - S_{2024,0} \\ &= S_{2024,0} + \pi_{2024} \cdot \left(\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\right) - S_{2024,0} \\ &= 1.100 \cdot (0,32 + 0,25 + 0,20) \\ &= 1.100 \cdot 0{,}77 = 847 \end{aligned}$$

($\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}$ wird <u>hier</u> nicht benötigt.)

(b) *[6 Punkte]* Hinsichtlich der Beurteilung und etwaiger Auffälligkeiten sind insbesondere zwei Aspekte anzusprechen:

- Die Zuwächse in den letzten Abwicklungsjahren sind noch relativ hoch. Offenbar ist die Abwicklungsdauer ($n = 3$) zu gering gewählt.
- Die Prämien scheinen ebenfalls zu gering zu sein. Extrem ist die Situation in Anfalljahr 2023, in dem bereits nach Abwicklungsjahr $k = 1$ der Schadenstand (600) die Prämie (485) deutlich überschreitet.
  Fundieren könnte man die kritische Beurteilung der Profitabilität durch die Schätzung der Endschadenquote. Hierfür wird zusätzlich noch

  $$\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2021,0} + Z_{2022,0} + Z_{2023,0} + Z_{2024,0}}{\pi_{2021} + \pi_{2022} + \pi_{2023} + \pi_{2024}}$$
  $$= \frac{200 + 150 + 300 + 500}{675 + 465 + 485 + 1.100} = \frac{1.150}{2.725} = 0{,}4220\ldots \approx 0{,}42$$

  benötigt. Ein Schätzer für die Endschadenquote ist durch die Summe der Schadenquotenzuwächse gegeben:

  $$\sum_{k=0}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} = 0,42 + 0,32 + 0,25 + 0,20 = 119\% > 100\%$$

  Offenbar liegen tatsächlich sehr kritische Gegebenheiten vor.