DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 16.10.2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen. Die Klausur ist als *Open-Book-Klausur* konzipiert.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 15 Seiten.
- Zusätzlich zu den 15 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoausgleich und Modelle der Risikotheorie sowie Modellierung von Versicherungsprozessen] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen.

(a) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Aussagen trifft *sowohl* für die Definition des individuellen *als auch* des kollektiven Modells der Risikotheorie zu?

(i) Betrachtung der Gesamtsumme aller Finanzaufwände eines Kollektivs

(ii) Betrachtung einer Zufallssumme

(iii) Betrachtung kumulierter Finanzaufwände je Risiko

(iv) Betrachtung nur strikt positiver Summanden

(b) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Verteilungen wird *typischerweise nicht* für die Modellierung der Anzahl der Finanzaufwände N herangezogen?

(i) Binomialverteilung

(ii) Exponentialverteilung

(iii) Negative Binomialverteilung

(iv) Poisson-Verteilung

(c) *[1 Punkt]* Welche der Annahmen aus dem kollektiven Modell der Risikotheorie verletzt das Risiko von Hochwasserschäden in der Sachversicherung?

(i) keine der Annahmen

(ii) nur stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Schadenhöhen

(iii) nur stochastische Unabhängigkeit von Schadenanzahl und Schadenhöhe

(iv) sowohl stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Schadenhöhen als auch stochastische Unabhängigkeit von Schadenanzahl und Schadenhöhe

(d) *[1 Punkt]* Für welche Berechnung kann beim kollektiven Modell der *Panjer-Algorithmus* verwendet werden?

(i) Faltungsformel für Verteilung des Gesamtaufwands

(ii) Rekursionsformel für Anzahl der Finanzaufwände

(iii) Rekursionsformel für Höhe der Finanzaufwände

(iv) Rekursionsformel für Verteilung des Gesamtaufwands

(e) *[1 Punkt]* Bei welchem Spezialfall wird die Verteilung der Gesamtsumme aller Finanzaufwände als zusammengesetzte Poisson-Verteilung bezeichnet?

(i) Anzahl der Finanzaufwände $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ im kollektiven Modell

(ii) Höhe der Finanzaufwände $X_j \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ $\forall j \in \mathbb{N}$ im kollektiven Modell

(iii) kumulierte Finanzaufwände $Y_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ $(i = 1, \ldots, n)$ im individuellen Modell

(iv) Wahrscheinlichkeiten der Nullaufwände normiert durch $\sum_i P(Y_i = 0) = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ im individuellen Modell

(f) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Übergänge ist beim vereinfachten Zustandsmodell der Personenversicherung *typischerweise* deterministisch?

(i) aktiv → aktiv

(ii) aktiv → invalide

(iii) aktiv → pensioniert

(iv) aktiv → tot

(g) *[1 Punkt]* Wie wird ein System zur Prämiendifferenzierung basierend auf der Schadenvergangenheit in der Versicherungsmathematik bezeichnet?

(i) Beitragsrückgewährsystem

(ii) Bonus-Malus-System

(iii) Einzelschaden-Rückstellungssystem

(iv) individuelles Beitragsanpassungssystem

(h) *[1 Punkt]* Für welche Berechnung wird in der Risikotheorie *typischerweise* die *erste* Formel von Wald verwendet?

(i) erwarteter Gesamtaufwand im individuellen Modell

(ii) erwarteter Gesamtaufwand im kollektiven Modell

(iii) Varianz des Gesamtaufwands im individuellen Modell

(iv) Varianz des Gesamtaufwands im kollektiven Modell

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Kalkulation von Prämien, Modelle der Risikotheorie sowie Risikoteilung] [18 Punkte]*
Ein Versicherer verfügt über ein Kollektiv von $n = 6400$ Policen. Alle Risiken sind stochastisch unabhängig und besitzen dieselbe Verteilung mit dem Erwartungswert $\mu = 4000$ und der Standardabweichung $\sigma = 720$.

(a) *[1 Punkt]* Welcher Spezialfall welchen Modells der Risikotheorie liegt unter diesen Voraussetzungen vor?
Geben Sie die *exakte* Bezeichnung des hier gegebenen Modells an.

(b) *[4 Punkte]* Der Versicherer möchte eine individuelle Prämie je Risiko derart bestimmen, dass die Ruinwahrscheinlichkeit ε nicht größer als 0,01 ist.
Bestimmen Sie unter Verwendung der Ungleichung von Cantelli die minimale individuelle Prämie P^+, welche diese Bedingung erfüllt. Runden Sie dabei Ihr Endergebnis auf zwei Nachkommastellen.

(c) *[3 Punkte]* Wie groß darf der Bestand – unter Verwendung der Prämien aus Teil (b) – gemäß der Ungleichung von Cantelli höchstens sein, damit eine strengere Ruinwahrscheinlichkeit $\tilde{\varepsilon}$ von 0,005 nicht überschritten wird?

(d) *[6 Punkte]* Ein zweiter Versicherer hat für denselben Bestand an Risiken eine andere individuelle Prämie $\hat{P}^+ = 3285$ kalkuliert. Im Leistungsfall hat der zweite Versicherer mit allen Kunden einen Quotenselbstbehalt vereinbart und erstattet nur $q = 80\%$ des jeweiligen Finanzaufwands.
Prüfen Sie mittels der Ungleichung von Cantelli, ob die Prämie $\hat{P}^+ = 3285$ das Sicherheitsniveau einer Ruinwahrscheinlichkeit ε von maximal 0,01 aus Teil (b) erfüllt.

(e) *[2 Punkte]* Die Annahme stochastisch unabhängiger Schadenhöhen ist in der Praxis nicht immer erfüllt. Erläutern Sie kurz, warum beispielsweise in der Kraftfahrtkasko-Versicherung abhängige Schadenhöhen vorliegen.

(f) *[2 Punkte]* Die Annahme identisch verteilter Schadenhöhen ist in der Praxis ebenfalls nur bedingt erfüllbar. Erläutern Sie kurz, unter welchen Umständen diese Voraussetzung in der Wohngebäude-Versicherung näherungsweise erfüllt wird.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoteilung] [10 Punkte]*
Ein Industrieversicherer verfügt im Jahr 2020 zur Rückdeckung seiner Elementarschäden über folgendes Naturgefahrenprogramm als einzige Rückversicherung:

- 1. Layer CAT-XL 60 Mio. xs 10 Mio.
  deckt Gefahren Sturm, Hagel, Überschwemmung und Erdbeben
- 2. Layer CAT-XL 100 Mio. xs. 70 Mio.
  deckt Gefahren Sturm, Hagel und Überschwemmung
- Naturgefahren-Jahresüberschaden-XL mit Priorität 30 Mio. und Limit 40 Mio.
  deckt Netto-Elementarjahresschadenlast nach Vorwegrückversicherung für die Gefahren Sturm, Hagel und Überschwemmung

Im Jahr 2020 sind beim Industrieversicherer folgende Schäden eingetreten:

- Nicht-Elementar: Basisschadenlast ohne Kumule 20 Mio.
- Elementar: Basisschadenlast Sturm/Hagel ohne Kumule 25 Mio.
- 1. Kumulereignis: Hochwasser 100 Mio.
- 2. Kumulereignis: Großbrände in Industriepark nach Brandstiftungen 15 Mio.
- 3. Kumulereignis: Erdbeben 80 Mio.

(a) *[1 Punkt]* Berechnen Sie die Plafondhöhe des Naturgefahrenprogramms für Ereigniskumule.

(b) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die Rückversicherungsentlastung im Jahr 2020 durch den 1. Layer des CAT-XL.

(c) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die Rückversicherungsentlastung im Jahr 2020 durch den 2. Layer des CAT-XL.

(d) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Rückversicherungsentlastung im Jahr 2020 durch den Naturgefahren-Jahresüberschaden-XL.

(e) *[2 Punkte]* Berechnen Sie basierend auf Ihren Ergebnissen aus den vorherigen Teilaufgaben die Netto-Gesamtschadenlast nach Rückversicherung für 2020 beim Industrieversicherer.

Aufgabe 4. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [12 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden (jeweils in beliebigen festen Geldeinheiten) innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen		
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter	Dritter
1	01.01.	**30.09.**	400	6			
2	01.01.	**30.09.**	200	8	8		
3	**01.07.**	31.12.	350	15	12	19	3
4	**01.04.**	**30.09.**	450	20	3		
5	01.01.	31.12.	550	45	4	7	

Berechnen Sie die Schadenhäufigkeit, den Schadenbedarf und den Schadensatz dieses Bestandes. Interpretieren Sie den sich hier ergebenden Schadenbedarf.

Hinweis: Die Fragen in (b) und (c) beziehen sich nicht auf den konkreten in (a) gegebenen Bestand.

(b) *[3 Punkte]* In einem Bestand eines Kompositversicherers übersteigt der Schadendurchschnitt die durchschnittliche Bruttorisikoprämie (= Erwartungswert + Sicherheitszuschlag). Beurteilen Sie diese Situation.

(c) *[2 Punkte]* Die Schadenquote in einem Bestand betrage 80 %. Was können Sie daraus für die Höhe der Sicherheitszuschläge in den Beiträgen ableiten?

Aufgabe 5. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Warum werden Risikomerkmale mitunter nicht als Tarifmerkmal in der Tarifierung verwendet? Nennen Sie mindestens drei etwaige Gründe.

(b) *[4 Punkte]* Was ist ein Marginalfaktor? Ordnen Sie den Begriff geeignet in die Tarifierung ein. Inwieweit lässt sich ein Marginalfaktor von 1,20 interpretieren?

(c) *[15 Punkte]* Die Tarifierung für einen Bestand operiert mit zwei Merkmalen (A und B). Beide Merkmale weisen je zwei Ausprägungen auf. Die Anzahl der Risiken $v_{i,j}$ und die Gesamtschäden $s_{i,j}$ sind für jede Risikoklasse (i, j) gegeben durch:

Risiko	Anzahl der Risiken $v_{i,j}$		Gesamtschaden $s_{i,j}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	5	10	120	240
$i = 2$	10	20	240	300

Führen Sie – ausgehend von einem geeigneten Startvektor – zwei Schritte des Marginalsummenverfahrens durch und berechnen Sie mit den erhaltenen Größen die (Nettorisiko-)Prämie für die Risikoklasse $(2, 1)$.
Hinweise:

- Es wird empfohlen, den Startvektor $\left(y_1^{(0)},\ y_2^{(0)}\right) = (1,\ 2)$ zu verwenden.
- In einem „Schritt“ des Verfahrens sind vier Marginalfaktoren zu bestimmen.
- Vernachlässigen Sie bei der Berechnung der Prämie den Unterschied zwischen den Marginalfaktoren nach dem 2. Schritt und den Grenzwerten der Iteration.
- Verzichten Sie auf die Normierung der Marginalfaktoren.
- Die Prämie ist auf zwei Nachkommastellen gerundet anzugeben.

Aufgabe 6. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Was versteht man im Kontext der Schadenreservierung unter den Endschadenständen? Warum sind sie von besonderer Bedeutung?

(b) *[4 Punkte]* Die verschiedenen Verfahren der Schadenreservierung unterstellen für bestimmte Größen sogenannte Abwicklungsmuster. Worin besteht die grundlegende Gemeinsamkeit dieser Abwicklungsmuster? Wie werden diese Abwicklungsmuster wahrscheinlichkeitstheoretisch umgesetzt?

(c) *[6 Punkte]* Ein Schadenversicherer unterstellt bei der Reservierung eine Abwicklungsdauer von vier Jahren (Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$). Er verwendet das Chain-Ladder-Verfahren und hat auf Basis der Schadendaten in seinem Bestand die Schätzer

$$\widehat{\varphi}_1 = 1{,}6, \quad \widehat{\varphi}_2 = 1{,}3, \quad \widehat{\varphi}_3 = 1{,}1$$

für die CL-Faktoren ermittelt.

- Welche Reserven sind für die Anfalljahre 2019 und 2020 zu stellen, wenn die Schadenstände am Ende 2020 (d.h. Ende der Abwicklungsjahre 1 bzw. 0) 500 bzw. 300 (Geldeinheiten) betragen?
  Hinweis: Die Reserven sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

- Wie ist der CL-Faktor $\widehat{\varphi}_2 = 1{,}3$ zu interpretieren?

(d) *[4 Punkte]* Das Bornhuetter-Ferguson-Verfahren erfordert a-priori-Schätzer für Quoten und Endschadenstände.

- Bestimmen Sie anhand der CL-Schätzer $\widehat{\varphi}_k$ aus (c) geeignete a-priori-Schätzer für die Quoten.

- Verwenden Sie für das Anfalljahr 2019 den a-priori-Schätzer $\alpha_{2019} = 700$ für den Endschadenstand und berechnen Sie mit den a-priori-Schätzern die Reserve für das Anfalljahr 2019 mit dem Bornhuetter-Ferguson-Verfahren. (Der aktuelle Schadenstand beträgt $S_{2019,1} = 500$, siehe (c)).

(e) *[2 Punkte]* Wie können in den Verfahren der Schadenreservierung besondere Kalenderjahreffekte – wie etwa die Corona-Pandemie – berücksichtigt werden? Vermitteln Sie kurz Ansätze, ohne auf Formeln einzugehen.

Aufgabe 7. *[Basismodell Personenversicherungsmathematik, Zustandsmodell, Ausscheideordnungen] [22 Punkte]*

Wir betrachten basierend auf dem allgemeinen Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematik mit mehreren Ausscheideursachen eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der verheirateten Aktivenpaare und den drei vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität der Person A, Tod der Person A und Tod der Person B. Aus Vereinfachungsgründen betrachten wir im Folgenden nur verheiratete Aktivenpaare, bei denen beide Personen das gleiche Alter haben. Für ein gleichaltriges verheiratetes Aktivenpaar des Alters x seien auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum die folgenden Zufallsvariablen gegeben:

X_1: Alter bei Eintritt der Invalidität der Person A
X_2: Alter bei Eintritt des Todes der Person A
X_3: Alter bei Eintritt des Todes der Person B

(a) *[6 Punkte]* Stellen Sie ausschließlich mit Hilfe dieser drei Zufallsvariablen für $i = 1, 2, 3$ die Wahrscheinlichkeit $q_x^{(i)}$ dar, also die Wahrscheinlichkeit eines gleichaltrigen verheirateten Aktivenpaares des Alters x aus der Hauptgesamtheit innerhalb eines Jahres wegen der Ursache i auszuscheiden.

(b) *[10 Punkte]* Drücken Sie in diesem Modell folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 aus.

- p_x^{ai}: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben
- q_x^{ai}: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben
- p_{xx}^{aaw}: Wahrscheinlichkeit eines gleichaltrigen verheirateten Aktivenpaares des Alters x , dass die Person A innerhalb eines Jahres als Aktiver stirbt, während die Person B das Ende des Jahres erlebt
- p_{xx}^{aiw}: Wahrscheinlichkeit eines gleichaltrigen verheirateten Aktivenpaares des Alters x, dass die Person A innerhalb eines Jahres invalide wird und noch im gleichen Jahr als Invalider stirbt, während die Person B das Ende des Jahres erlebt
- p_{xx}^{aw}: Wahrscheinlichkeit eines gleichaltrigen verheirateten Aktivenpaares des Alters x, dass die Person A innerhalb eines Jahres stirbt, während die Person B das Ende des Jahres erlebt

(c) *[6 Punkte]* Beweisen Sie mit Hilfe der Darstellung aus (b):

- $p_x^{ai} + q_x^{ai} = i_x$
- $p_{xx}^{aaw} + p_{xx}^{aiw} = p_{xx}^{aw}$

Aufgabe 8. *[Basismodell Personenversicherungsmathematik, Erfüllungsbetrag, Leistungsbarwert] [14 Punkte]*

Wir betrachten nun im Rahmen des allgemeinen Bevölkerungsmodells der Personenversicherungsmathematik eine Aktivenausscheideordnung, also eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Wir wählen aus diesem Bestand einen Aktiven des Alters x aus. Für diese Person seien folgende Zufallsvariablen definiert:

M: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität

N: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Todes

(a) *[3 Punkte]* Wir betrachten den Erfüllungsbetrag

$$B = v^{M+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{N-M|}} \cdot 1_{\{N>M\}}.$$

Beschreiben Sie genau, um welche Art Verpflichtung es sich bei B handelt (insbesondere unter Angabe welche Zahlungen zu leisten sind, wann diese beginnen und wann diese enden).

(b) *[4 Punkte]* Geben Sie die Realisierungen b_{mn}, $m, n = 0, 1, \ldots$, von B an und geben Sie hiermit den Erwartungswert $\mathbb{E}[B]$ an.

(c) *[4 Punkte]* Geben Sie in der üblichen versicherungsmathematischen Notation der Ausscheidewahrscheinlichkeiten in einer Aktivenausscheideordnung die folgenden Wahrscheinlichkeiten für $m \geq 0, n > m$ an (Hinweis: Es gelte $\mathbb{P}[N = m \,|\, M = m] = {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+m+\frac{1}{2}}$):

$$\mathbb{P}[M = m]$$
$$\mathbb{P}[N = n \,|\, M = m]$$

(d) *[3 Punkte]* Zeigen Sie mit Hilfe von (b) und (c), dass für den Erwartungswert von B gilt:

$$\mathbb{E}[B] = \sum_{m \geq 0} \sum_{n>m} v^{m+1} \cdot {}_m p^a_x \cdot i_{x+m} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m|}}$$

Aufgabe 9. *[Pensionsversicherungsmathematik, Bewertungsverfahren] [18 Punkte]*

Die F GmbH hat ihren Beschäftigten unmittelbare Pensionszusagen erteilt. Gewährt werden Renten ab Eintritt der Invalidität und ab Erreichen der vertraglichen Altersgrenze von 65 Jahren.

Die Höhe der Anwartschaft auf Alters- und Invalidenrente beträgt 300,00 Euro monatlich. Nach 10 vollendeten Dienstjahren erhöht sich die Anwartschaft auf Alters- und Invalidenrente um 100,00 Euro auf dann monatlich 400,00 Euro.

Wir betrachten nun einen tätigen Mitarbeiter der F GmbH, Herrn Max Mustermann, der am 15.09.1972 geboren wurde und am 01.04.2003 in die F GmbH eingetreten ist.

Hinweis: Die Zuordnung von Leistungen zu Altern soll im Folgenden mit Hilfe der Rückrechnungsmethode erfolgen.

(a) *[10 Punkte]* Geben Sie für die an Herrn Max Mustermann erteilte Pensionszusage den steuerlichen Teilwert nach § 6a EStG zum Bilanzstichtag 31.12.2021 unter Verwendung der Barwerte der Richttafeln 2018 G an. Als Pensionierungsalter für die Teilwertberechnung soll die vertragliche Altersgrenze in Ansatz gebracht werden.

(b) *[5 Punkte]* In der Pensionszusage ist auch eine vorgezogene Altersrente bei Eintritt in den Ruhestand vor dem 65. Lebensjahr vorgesehen. Allerdings wird die Altersrente bei einem Bezug vor dem 65. Lebensjahr für jeden Monat des vorzeitigen Rentenbezuges um 0,4 % gekürzt.

Welche Änderungen ergeben sich in der in a) durchgeführten Teilwertberechnung, wenn als Finanzierungsendalter abweichend von der vertraglichen Altersgrenze das 63. Lebensjahr in Ansatz gebracht wird?

(c) *[3 Punkte]* Zu welchem Bilanzstichtag darf die steuerliche Pensionsrückstellung erstmalig gebildet werden, wenn Herr Mustermann bereits am 01.04.1993 in die Gesellschaft eingetreten ist und zu diesem Zeitpunkt auch die Pensionszusage erhalten hat? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 10. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Standardformeln] [9 Punkte]*
Gegeben sei folgende Formel für einen Lebensversicherungsvertrag:

$$100.000 \cdot \frac{{}_{|10}A_{25} + 0{,}5 \cdot {}_{10}E_{25} \cdot {}_{|10}A_{35} + 0{,}001 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{15}|}}{0{,}99 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{5}|} - 0{,}025 \cdot 5}$$

Beantworten Sie die Fragen jeweils mit einer kurzen Begründung.

(a) *[1 Punkt]* Welche Größe eines Lebensversicherungsvertrags wird mit dieser Formel berechnet?

(b) *[3 Punkte]* Welche Aussagen bezüglich Höhe und Zeitpunkt können Sie über Leistungen, Prämien und Kosten machen?

(c) *[1 Punkt]* Welchen Rechnungszins dürfen Sie aktuell (Vertragsbeginn 16.10.2021) maximal zur Bestimmung der Deckungsrückstellungen im Vertragsverlauf ansetzen?

(d) *[2 Punkte]* Welche Sterbetafel kommt bei der Bestimmung der Leistungsbarwerte ${}_{|10}A_{25}$, ${}_{|10}A_{35}$, ${}_{10}E_{25}$, $\ddot{a}_{25:\overline{15}|}$ bzw. $\ddot{a}_{25:\overline{5}|}$ zum Einsatz? Unter welcher Voraussetzung müssen Sie auch eine Stornotafel verwenden?

(e) *[2 Punkte]* Wie lautet für diesen Vertrag die Formel für die prospektive Deckungsrückstellung zu Beginn des 12. Vertragsjahres, sofern der Vertrag dann noch besteht?

Aufgabe 11. *[Lebensversicherungsmathematik, rekursive Ansätze, Überschüsse und Bewertungsreserven] [9 Punkte]*
Ein Lebensversicherer hat eine Kundin über einen bereits bestehenden Rentenversicherungsvertrag (Vertragsbeginn: 1.1.1991, Alter der versicherten Person bei Vertragsbeginn: 50 Jahre) am 31.12.2020 informiert und ihr den Verlauf der Deckungsrückstellung dargelegt. Am 31.12.2020 beträgt die HGB-Deckungsrückstellung 108.450,00 Euro und am 31.12.2021 liegt sie planmäßig bei 102.859,79 Euro. Darüber hinaus sind folgende Aspekte bekannt:

- Der Rentenversicherungsvertrag sieht eine jährlich vorschüssige Rente in Höhe von 12.000 Euro vor.
- Der Rechnungszins für diesen Vertrag liegt bei 3,5 % pro Jahr.
- Die Abschlusskosten sind bereits sämtlich finanziert und beglichen.
- Die Verwaltungskosten betragen sowohl rechnungsmäßig als auch tatsächlich jährlich vorschüssig 50 Euro.

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie ausschließlich auf Basis der Informationen in der Aufgabenstellung die Sterbewahrscheinlichkeit (unter Angabe von fünf Dezimalstellen), die der Lebensversicherer rechnungsmäßig für diese Person im Jahr 2021 angesetzt hat.
Geben Sie auch explizit die Werte $\ddot{a}_{80}$ und $\ddot{a}_{81}$ an.

(b) *[1 Punkt]* Wie hoch fällt das Risikoergebnis im Jahr 2021 für diesen Vertrag aus, wenn die tatsächliche Sterblichkeit im Bestand 0,5%-Punkte höher als die rechnungsmäßige Sterblichkeit liegt (d.h. tatsächliche Sterblichkeit ist die Sterblichkeit aus Teil (a) + 0,5%)?

(c) *[1 Punkt]* Wie hoch sind die rechnungsmäßigen Zinsen im Jahr 2021 für diesen Vertrag?

(d) *[2 Punkte]* Wie ist dieser Vertrag an den Bewertungsreserven zu beteiligen, die im Laufe des Jahres 2021 möglicherweise entstehen?

Aufgabe 12. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Beitragsanpassungsklausel] [9 Punkte]*
Der tatsächliche Grundkopfschaden ist für eine Beobachtungseinheit in einem Tarif der substitutiven Krankenversicherung in den vergangenen drei Jahren (2018 bis 2020) kontinuierlich gestiegen:

990 Euro, 995 Euro, 1.000 Euro.

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit einer Begründung.

(a) *[2 Punkte]* Was ist bei der Bestimmung dieser tatsächlichen Grundkopfschäden aus der Vergangenheit zu beachten?

(b) *[2 Punkte]* Wie groß ist der extrapolierte Grundkopfschaden?

(c) *[2 Punkte]* Wie groß ist der Auslösende Faktor für die Versicherungsleistungen, wenn der rechnungsmäßige Grundkopfschaden 991 Euro beträgt?

(d) *[3 Punkte]* Was bedeutet dieser Auslösende Faktor in Bezug auf eine Beitragsanpassung in dieser Beobachtungseinheit des Tarifs? Erläutern Sie dabei auch, unter welchen Umständen zum nächstmöglichen Zeitpunkt der Rechnungszins angepasst werden muss.

Aufgabe 13. *[Krankenversicherungsmathematik, Prämien für Neugeschäft und Bestand] [9 Punkte]*
Ein Kunde hat Anfang 2018 einen privaten Krankenversicherungsvertrag im Alter 40 mit einer monatlichen Prämie von 289,57 Euro abgeschlossen. Anfang 2022 kommt es zur ersten Beitragsanpassung (im Alter $u = 44$). Dabei bleiben die Kosten im Tarif unverändert mit Zillmerkosten in Höhe von $\alpha^Z = 0{,}75$ der Prämie, Verwaltungskosten in Höhe von 500 Euro, beitragsproportionale Zuschläge in Höhe von 12 % und $\alpha'' = 0$.
Mit den Rechnungsgrundlagen vor Beitragsanpassung ergibt sich ein Rentenbarwert zum erreichten Alter $u = 44$ von $\ddot{a}_u^a = 23{,}33150$. Außerdem gilt mit den Rechnungsgrundlagen vor Beitragsanpassung zum erreichten Alter $b_u^a = 315{,}76$. Der Neugeschäftsbeitrag zum Alter u beträgt: $b_u = 351{,}70$.
Hinweis: Nutzen Sie für diese Aufgabe die Krankenversicherungsaufsichtsverordnung KVAV.

(a) *[3 Punkte]* Es fehlt eine Größe, um die neue angepasste Monatsprämie mit den vorgegebenen Werten zu bestimmen. Welche Größe ist das? Welche Bedeutung hat diese Größe? Welche Rechnungsgrundlagen sind erforderlich, um diese Größe zu bestimmen?

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die angepasste Monatsprämie im Alter 44. Treffen Sie dafür zunächst eine plausible Annahme für die fehlende Größe (mit Begründung).

(c) *[2 Punkte]* Ist in obiger Rechnung der Übertragungswert berücksichtigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Formelsammlung Versicherungsmathematik

Prüfungsordnung 4.1

X, Y und Z seien Zufallsvariable. Die Existenz der auftretenden (bedingten) Momente sei stets vorausgesetzt.

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} =$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen
$1_A =$ Indikatorfunktion für die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, d.h. $1_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $1_A(x) = 0$ sonst

Verteilungsfunktion und Dichte von Zufallsvariablen

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion bei stetiger Zufallsvariable X: $f_X(x) = F'_X(x)$ fast sicher
- Zähldichte bei diskreter Zufallsvariable X: $f_X(x) = P(X = x)$

Momente von Zufallsvariablen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}$): $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \, dF_X(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x) \, dx$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x)$
  - falls X nichtnegativ:
$$\mathrm{E}\left(X^n\right) = n \int_0^\infty x^{n-1} \cdot (1 - F_X(x)) \, dx$$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(X^1\right)$
- Varianz (2. zentrales Moment von X): $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$
- Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- Variationskoeffizient: $\mathrm{Vko}(X) = \dfrac{\sigma(X)}{\mathrm{E}(X)} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}$
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
- Korrelationkoeffizient: $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, \dfrac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right) \in [-1, 1]$

Ungleichung von Cantelli

Für alle $c > 0$ gilt:

$$P\,(X \geq \mathrm{E}(X) + c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2 + \mathrm{Var}(X)}$$

Rechenregeln für bedingte Erwartungen

- Iterativität des Erwartungswerts: $\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X)$
- Falls X, Y unabhängig: $\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}(X)$
- Für messbare Funktionen f, g: $\mathrm{E}[f(Z)\cdot X + g(Z)\cdot Y\,|\,Z] = f(Z)\cdot \mathrm{E}(X|Z) + g(Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$
- Bedingte Varianz: $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}\left(X^2|Y\right) - \mathrm{E}(X|Y)^2$
- Iterativität der Varianz: $\mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|Y)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|Y)] = \mathrm{Var}(X)$
- Bedingte Covarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y\,|\,Z) = \mathrm{E}(XY|Z) - \mathrm{E}(X|Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right)$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right)$, $t \in [0,1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_{x\in\mathbb{R}} t^x \cdot f_X(x)$

Kollektives Modell

- *Kollektives Modell*
  Sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und $X_1, X_2, \ldots$ nichtnegative Zufallsvariablen. Die Zufallssumme
  $$S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N} X_j$$
  heißt kollektives Modell, wenn $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig sind und $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt wie eine Zufallsvariable X sind.
- *Formeln von Wald*
  - 1. Formel von Wald: $\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{E}(X)$
  - 2. Formel von Wald: $\mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\cdot \mathrm{E}(X)^2$
  - Falls $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$: $\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda\cdot \mathrm{E}(X)$, $\quad \mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda \cdot \mathrm{E}\left(X^2\right)$
- *Fundamentalformeln*
  Für $d > 0$ sei X diskret verteilt auf dem Träger $\{0, d, 2d, 3d, \ldots\}$:
  $$\begin{aligned} \psi_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(\psi_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{MEF}_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(\mathrm{MEF}_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ m_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(m_X(t)\right) && \text{für alle } t \in [0,1] \end{aligned}$$

Summen von Zufallsvariablen

Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:

- Stetige Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$

  für messbare $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.

- Diskrete Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$

  für $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ sind.

Layer-Identität Für Priorität a und Limit l gilt:

$$\min(\max(X-a;0);l) = \min(X;a+l) - \min(X;a) = \max(X-a;0) - \max(X-(a+l);0)$$

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	**Zähldichte** $\boldsymbol{f_k := f_N(k) = \mathrm{P}(N=k)}$	**Erwartungs-wert** $\mathbf{E}(\boldsymbol{N})$	**Varianz** $\mathbf{Var}(\boldsymbol{N})$
Diskrete Gleichverteilung $N \sim \mathrm{U}(m)$ $m \in \mathbb{N}$	$f_k = \frac{1}{m+1}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m \cdot (m+1)}{12}$
Poisson-Verteilung $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$f_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
Negative Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{NegBin}(\beta,p)$ $\beta > 0, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{k+\beta-1}{k} \cdot p^{\beta} \cdot (1-p)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p}$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p^2}$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	Dichte $f_X(x)$	Verteilungsfunktion $F_X(x)$	Erwartungs-wert $E(X)$	Varianz $Var(X)$
Stetige Gleichverteilung $X \sim U(a,b)$ $a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{1}{b-a} \cdot 1_{(a,b)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } x \in (a,b) \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential-Verteilung $X \sim Exp(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$1 - e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma-Verteilung $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}\, dt$ für $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Stetige Verteilungen (II)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	**Dichte $f_X(x)$**	**Verteilungsfunktion $F_X(x)$**	**Erwartungswert E(X)**	**Varianz Var(X)**
Normal-Verteilung $X \sim \mathrm{Norm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Lognormal-Verteilung $X \sim \mathrm{LogNorm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x > 0$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ für $x > 0$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2}-1)$
Pareto-Verteilung (European Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > t$	$1-\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}$ für $x > t$	$\frac{t\alpha}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$
Nullpunkt-Pareto-Verteilung (American Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}_0(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > 0$	$1-\left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha}$ für $x > 0$	$\frac{t}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

[jeweils 1 Punkt]

(a): (i)   (b): (ii)   (c): (iv)   (d): (iv)   (e): (i)   (f): (iii)   (g): (ii)   (h): (ii)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[1 Punkt]* individuelles Modell (der Risikotheorie) für homogenen Bestand

(b) *[4 Punkte]*
Für die Standardabweichung des Kollektivs gilt:

$$\sqrt{\operatorname{Var}\left(S^{\text{ind}}\right)} = \sqrt{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_i)} = \sqrt{n \cdot \sigma^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma$$

Aus der Ungleichung von Cantelli folgt für den Sicherheitszuschlag c des Kollektivs:

$$c \geq \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}\left(S^{\text{ind}}\right)} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad P\left(S^{\text{ind}} > \operatorname{E}\left(S^{\text{ind}}\right) + c\right) \leq \varepsilon$$

Somit gilt im konkreten Fall:

$$c \geq \sqrt{\frac{1-0{,}01}{0{,}01}} \cdot 80 \cdot 720 \approx 573112{,}76$$

Für die minimale individuelle Prämie gilt dann:

$$P^{+} = \operatorname{E}(Y_i) + SZ(Y_i) = \mu + \frac{c}{n} \approx 4000 + \frac{573112{,}76}{6400} \approx 4089{,}55$$

(c) *[3 Punkte]*
Aus der Ungleichung von Cantelli folgt gemäß (b) für die Anzahl der Risiken n:

$$c \geq \sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}}} \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma$$

Umformen nach n ergibt:

$$\frac{c}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}}} \geq \sqrt{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{c^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}} \geq n$$

Somit gilt unter Verwendung des Sicherheitsniveaus c aus Teil (b):

$$c^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}} = \frac{1-0{,}01}{0{,}01} \cdot 80^2 \cdot 720^2 \cdot \frac{1}{720^2} \cdot \frac{0{,}005}{1-0{,}005} \approx 3183{,}92 \geq n$$

Folglich darf der Bestand maximal 3183 Policen umfassen.

(d) *[6 Punkte]*

Wegen des Quotenselbstbehalts $1 - q$ gilt für den zweiten Versicherer:

$$\tilde{Y}_i = q \cdot Y_i \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \Rightarrow \mathrm{Var}\left(\tilde{Y}_i\right) = q^2 \cdot \mathrm{Var}(Y_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathrm{Var}\left(\tilde{S}^{\mathrm{ind}}\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q^2 \cdot \mathrm{Var}(Y_i)} = \sqrt{n \cdot q^2 \cdot \sigma^2} = \sqrt{n} \cdot q \cdot \sigma$$

Aus der Ungleichung von Cantelli folgt für den zweiten Versicherer:

$$c \geq \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\left(\tilde{S}^{\mathrm{ind}}\right)} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{n} \cdot q \cdot \sigma$$

Somit gilt im konkreten Fall:

$$c \geq \sqrt{\frac{1 - 0{,}01}{0{,}01}} \cdot 80 \cdot 0{,}8 \cdot 720 \approx 458490{,}21$$

Für die minimale individuelle Prämie gilt für den zweiten Versicherer:

$$\tilde{P}^{+} = \mathrm{E}(\tilde{Y}_i) + SZ(\tilde{Y}_i) = q \cdot \mu + \frac{c}{n} \approx 3200 + \frac{458490{,}21}{6400} \approx 3271{,}64 < 3285 = \hat{P}^{+}$$

Somit erfüllt die individuelle Prämie $\hat{P}^{+}$ das gegebene Sicherheitsniveau.

(e) *[2 Punkte]*

Die Annahme unabhängiger Schadenhöhen wird verletzt, sobald einige (oder alle) Risiken des Bestandes derselben Gefahr ausgesetzt sind.

In der Kraftfahrtkasko-Versicherung sind alle Fahrzeuge (in einem Gebiet) zum Beispiel derselben Gefahr von Hagel- oder Sturmschäden ausgesetzt.

(f) *[2 Punkte]*

Die Annahme identisch verteilter Schadenhöhen liegt näherungsweise in der Wohngebäude-Versicherung vor, wenn alle Risiken gleichartige Wohngebäude in vergleichbaren Wohngegenden betreffen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) *[1 Punkt]*
Die Haftungsobergrenze (Plafondhöhe) ergibt sich als Summe aus Priorität des 1. Layers und den Limits der beiden Layer (Werte in Mio.):

$$10 + 60 + 100 = 170$$

(b) *[2 Punkte]*
Gedeckt sind das erste und dritte Kumulereignis abzgl. Priorität und ggf. spill over (Werte in Mio.):

$$\min\{\max\{100 - 10; 0\}; 60\} + \min\{\max\{80 - 10; 0\}; 60\} = 60 + 60 = 120$$

(c) *[2 Punkte]*
Gedeckt ist das erste Kumulereignis abzgl. Priorität und ggf. spill over (Werte in Mio.):

$$\min\{\max\{100 - 70; 0\}; 100\} = 30$$

(d) *[3 Punkte]*
Als Schadenhöhen relevant für den Jahresüberschaden-XL sind die Basisschadenlast Sturm/Hagel und der Selbstbehalt aus dem Hochwasserereignis nach CAT-XL (Werte in Mio.):

$$25 + (100 - 60 - 30) = 35$$

Daraus ergibt sich folgende Entlastung (Werte in Mio.):

$$\min\{\max\{35 - 30; 0\}; 40\} = 5$$

(e) *[2 Punkte]*
Die Netto-Gesamtschadenlast ergibt sich als Brutto-Gesamtschaden abzgl. Entlastung aus den drei RV-Verträgen (Werte in Mio.):

$$20 + 25 + 100 + 15 + 80 - (120 + 30 + 5) = 240 - 155 = 85$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) *[7 Punkte]* Es sind $N = 7$ Schäden eingetreten. Die Anzahl der Jahreseinheiten beträgt

$$n_o = 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}50 + 0{,}50 + 1{,}00 = 3{,}5,$$

sodass die Schadenhäufigkeit gleich

$$H = \frac{N}{n_o} = \frac{7}{3{,}5} = 2{,}0$$

ist. Der Schadenbedarf ergibt sich – ohne auf Schadenanzahlen eingehen zu müssen – als:

$$SB = \frac{S}{n_o} = \frac{8 + 12 + 19 + 3 + 3 + 4 + 7}{3{,}5} = \frac{56}{3{,}5} = 16{,}0$$

Interpretation: Pro Risiko ist/wäre rückblickend ein Jahresbeitrag von 16 nötig gewesen, um die gesamten Schäden (56) ausfinanzieren zu können.

Der Schadensatz erfordert noch die Berechnung der durchschnittlichen kumulierten Versicherungssumme:

$$v = 400 \cdot 0{,}75 + 200 \cdot 0{,}75 + 350 \cdot 0{,}50 + 450 \cdot 0{,}50 + 550 \cdot 1{,}00 = 1.400$$

Die Schadensatz ist somit:

$$SS = \frac{S}{v} = \frac{56}{1.400} = 4{,}0\ \%.$$

(Die Jahresbeiträge gehen <u>nicht</u> in die hier gefragten Kennzahlen ein.)

(b) *[3 Punkte]* Dass der Schadendurchschnitt die durchschnittliche Bruttorisikoprämie übersteigt, ist nichts Besonderes und keineswegs offensichtlich kritisch. Diese Situation liegt typischerweise in Zweigen mit geringen Schadenanzahlen pro Risiko (und Periode) vor, etwa in der Kfz-Haftpflichtversicherung (wo der Schadendurchschnitt bei ca. 4.000 Euro, die durchschnittliche Prämie aber unter 1.000 Euro liegt). Man beachte, dass die (erwartete) Schadenanzahl nicht in den Schadendurchschnitt eingeht, wohl aber in die Prämie.

(c) *[2 Punkte]* Wenn die Schadenquote

$$SQ = \frac{S}{b} = 80\ \%.$$

beträgt, sind die kumulierten (verdienten) Beiträge

$$b = \frac{S}{0{,}8} = 1{,}25 \cdot S.$$

Unterstellt man, dass die tatsächlichen kumulierten Schäden (S) ungefähr dem Erwartungswert entsprechen, dann liegen Sicherheitszuschläge von etwa 25 % (nicht: $1 - 80\,\% = 20\,\%$) vor.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) *[3 Punkte]* Risikomerkmale können/dürfen/sollten z.B. aus den folgenden Gründen nicht als Tarifmerkmal verwendet werden:

- keine aufsichtsrechtliche Zulassung (siehe etwa Unisex-Tarifierung)
- signifikante Abhängigkeit von anderen (verwendeten) Tarifmerkmalen (Multikollinearität)
- schwierige Messbarkeit (etwa „Fahrverhalten")
- fehlende Stabilität (etwa „Wetter")
- ...

(b) *[4 Punkte]* Ein Marginalfaktor ist die Variante der sogenannten Marginalparameter bei den multiplikativen Modellen der Tarifierung.

Bei diesen Modellen werden (Nettorisiko-)Prämien b_i durch den Ansatz

$$b_i = b_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = sb \cdot \prod_{j=1}^{n} u_{j,i_j}$$

bestimmt. Die Marginalfaktoren sind die Faktoren u_{j,i_j}. Sie werden jeder Ausprägung jedes Merkmals zugeordnet.

Die Marginalfaktoren sind im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. So führen etwa Verdoppelungen der Faktoren zu Merkmal 1 ($u_{1,i}$) und Halbierungen der Faktoren zu Merkmal 2 ($u_{2,j}$) zu den gleichen Prämien. Erst nach Normierung der Marginalfaktoren werden Interpretationen potenziell sinnvoll. Unterstellt man eine Normierung mit einem mittleren Niveau von 1 = 100 %, dann kennzeichnet ein Marginalfaktor von 1,2 eine Situation, in der die vorliegende Ausprägung (bei ansonsten gleichen Bedingungen) zu einem Zuschlag von 20 % führt.

(c) *[15 Punkte]* Durchführung von 2 Schritten des Marginalsummenverfahrens:

$$sb = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} s_{ij}}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_{ij}} = \frac{120+240+240+300}{5+10+10+20} = \frac{900}{45} = 20$$

Startvektor: $\left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}\right) = (1, 2)$

1. Schritt:

$$x_1^{(1)} = \frac{s_{1o}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{2} v_{1j} \cdot y_j^{(0)}} = \frac{120 + 240}{20 \cdot (5 \cdot 1 + 10 \cdot 2)} = \frac{360}{20 \cdot 25} = \frac{360}{500} = 0{,}72$$

$$x_2^{(1)} = \frac{s_{2o}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{2} v_{2j} \cdot y_j^{(0)}} = \frac{240 + 300}{20 \cdot (10 \cdot 1 + 20 \cdot 2)} = \frac{510}{20 \cdot 50} = \frac{54}{1000} = 0{,}54$$

$$y_1^{(1)} = \frac{s_{o1}}{sb \cdot \sum_{i=1}^{2} v_{i1} \cdot x_i^{(1)}} = \frac{120 + 240}{20 \cdot (5 \cdot 0,72 + 10 \cdot 0,54)} = \frac{360}{20 \cdot 9} = \frac{360}{180} = 2{,}00$$

$$y_2^{(1)} = \frac{s_{o2}}{sb \cdot \sum_{i=1}^{2} v_{i2} \cdot x_i^{(1)}} = \frac{240 + 300}{20 \cdot (10 \cdot 0,72 + 20 \cdot 0,54)} = \frac{540}{20 \cdot 18} = \frac{540}{360} = 1{,}50$$

2. Schritt:

$$x_1^{(2)} = \frac{s_{1o}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{2} v_{1j} \cdot y_j^{(1)}} = \frac{120 + 240}{20 \cdot (5 \cdot 2 + 10 \cdot 1,5)} = \frac{360}{20 \cdot 25} = \frac{360}{500} = 0{,}72$$

$$x_2^{(2)} = \frac{s_{2o}}{sb \cdot \sum_{j=1}^{2} v_{2j} \cdot y_j^{(1)}} = \frac{240 + 300}{20 \cdot (10 \cdot 2 + 20 \cdot 1,5)} = \frac{510}{20 \cdot 50} = \frac{54}{1000} = 0{,}54$$

Bereits hier ist klar, dass das Verfahren abgeschlossen werden kann bzw. die Grenzwerte erreicht sind, da sich die gleichen $x_i^{(1)}$ ergeben haben. Die beiden folgenden Berechnungen sind also entbehrlich:

$$y_1^{(2)} = \frac{s_{o1}}{sb \cdot \sum_{i=1}^{2} v_{i1} \cdot x_i^{(2)}} = \frac{120 + 240}{20 \cdot (5 \cdot 0,72 + 10 \cdot 0,54)} = \frac{360}{20 \cdot 9} = \frac{360}{180} = 2{,}00$$

$$y_2^{(2)} = \frac{s_{o2}}{sb \cdot \sum_{i=1}^{2} v_{i2} \cdot x_i^{(2)}} = \frac{240 + 300}{20 \cdot (10 \cdot 0,72 + 20 \cdot 0,54)} = \frac{540}{20 \cdot 18} = \frac{540}{360} = 1{,}50$$

Die Prämien für die Risikoklasse=Zelle (2,1) ist somit (nicht nur näherungsweise) zu berechnen gemäß:

$$b_{21} = sb \cdot x_2^{(2)} \cdot y_1^{(2)} = sb \cdot x_2^{(\infty)} \cdot y_1^{(\infty)} = 20 \cdot 0{,}54 \cdot 2 = 21{,}6$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[4 Punkte]* Die Endschadenstände (engl.: ultimates) $S_{i,n}$ sind die Schadenstände der verschiedenen Anfalljahre am Ende der (angenommenen) Abwicklungsdauer von n Jahren. Sie sind insofern besonders relevant, als es in der Reservierung weniger darauf ankommt, wie sich die Folgezahlungen auf die künftigen Perioden verteilen (→ Liquiditätsmanagement), sondern wie hoch deren Gesamtsumme ist, und das ist (abgesehen vom Nachlauf) genau der Endschadenstand.

(b) *[4 Punkte]* Das Gemeinsame der verschiedenen unterstellten Abwicklungsmuster (etwa für Anteile, Quoten, Faktoren, Schadenquotenzuwächse) besteht darin, dass die betrachteten Kennzahlen (α) als (im Mittel) anfalljahrunabhängig gelten. Solche Ansätze sind vornehmlich für relative/normierte Kennzahlen vertretbar. Formal wird dies durch die Forderung umgesetzt, dass die Erwartungswerte dieser Verhältnisgrößen unabhängig von dem das Anfalljahr repräsentierenden Index i sind. Suggestiv:

$$E\left(\frac{X_{i,k}}{V_{i,k}}\right) \stackrel{!}{=} \alpha_k, \qquad i, j = 0, \ldots, n$$

(c) *[6 Punkte]* Mit den gegebenen Schätzern ergeben sich die folgenden Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände:

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2019,3} &:= S_{2019,1} \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_2 \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_3 = 500 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1 = 715\\ \widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2020,3} &:= S_{2019,0} \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_1 \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_2 \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_3 = 300 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1 = 686{,}4\end{aligned}$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\mathrm{CL}}_{2019} &:= \widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2019,3} - S_{2019,1} = 715 - 500 = 215{,}0\\ \widehat{R}^{\mathrm{CL}}_{2020} &:= \widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2020,3} - S_{2020,0} = 686{,}4 - 300 = 386{,}4\end{aligned}$$

Der CL-Faktor bzw. Schätzer $\widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_2 = 1,3$ besagt, dass die kumulierten Schadenaufwendungen am Ende des 3. Abwicklungsjahres $S_{i,2}$ die am Ende des 2. Abwicklungsjahres $S_{i,1}$ für jedes Anfalljahr im Mittel um 30 % überschreiten.

(d) *[4 Punkte]* Die Berechnung der a-priori-Schätzer für die Quoten erfolgt gemäß Formel:

$$\widehat{\gamma}_k = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\widehat{\varphi}_l}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Es ergeben sich die Werte

$$\widehat{\gamma}_0 = \prod_{l=1}^{3} \frac{1}{\widehat{\varphi}_l} = \frac{1}{1{,}6 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1} = \frac{1}{2{,}288} = 43{,}7\,\%$$
$$\widehat{\gamma}_1 = \frac{1}{1{,}3 \cdot 1{,}1} = \frac{1}{1{,}43} = 69{,}9\,\%$$
$$\widehat{\gamma}_2 = \frac{1}{1{,}1} = 90{,}\overline{90}\,\%$$
$$\widehat{\gamma}_3 = 1$$

Es resultiert der ultimate ($i = 2$ entspricht 2019):

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{i,3} &:= S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_n - \widehat{\gamma}_{n-i}) \cdot \widehat{\alpha}_i \\ &= S_{2019,1} + \underbrace{(1 - \widehat{\gamma}_1) \cdot 700}_{=\widehat{R}^{\mathrm{BF}}_{i,s}} = 500 + 0{,}301 \cdot 700 \\ &= 710{,}5\end{aligned}$$

und somit die (auch direkt berechenbare) Reserve:

$$\widehat{R}^{\mathrm{BF}}_{i,3} := \widehat{S}^{\mathrm{BF}}_{i,3} - S_{i,n-i} = 710{,}5 - 500 = 210{,}5.$$

(e) *[2 Punkte]* Besondere (relevante) Kalenderjahreffekte – wie die Corona-Pandemie oder auch die Inflation – können etwa durch das Separationsverfahren berücksichtigt werden. Die in solchen Fällen gegebene mangelnde Vergleichbarkeit der Daten aus verschiedenen Perioden lässt sich mit Einführung einer Art „Preisindex“ für die Kalenderjahre „bereinigen“. (Die Bestimmung der erweiterten Schar der Verfahrensparameter erfolgt mit einer Variante des Marginalsummenverfahrens und Extrapolation der beobachteten Kalenderjahreffekte.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) *[6 Punkte]*

$$
\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2, X_3\} \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
q_x^{(2)} &= \mathbb{P}\,[\,X_2 \le \min\{x+1, X_3\},\, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
q_x^{(3)} &= \mathbb{P}\,[\,X_3 < \min\{x+1, X_1, X_2\} \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,]
\end{aligned}
$$

(b) *[10 Punkte]*

$$
\begin{aligned}
p_x^{ai} &= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\},\, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\,] \\
q_x^{ai} &= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\},\, X_2 \le x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\,] \\
p_{xx}^{aaw} &= \mathbb{P}\,[\,X_2 < \min\{x+1, X_1\},\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
p_{xx}^{aiw} &= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\}, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
p_{xx}^{aw} &= \mathbb{P}\,[\,X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,]
\end{aligned}
$$

(c) *[6 Punkte]*

$$
\begin{aligned}
p_x^{ai} + q_x^{ai} &= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\},\, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\,] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\},\, X_2 \le x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\,] \\
&= \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\},\, | X_1 > x, X_2 > x\,] = i_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{xx}^{aaw} + p_{xx}^{aiw} &= \mathbb{P}\,[\,X_2 < \min\{x+1, X_1\},\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,X_1 \le \min\{x+1, X_2\}, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&= \mathbb{P}\,[\,X_2 < X_1,\, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,X_1 \le x+1,\, X_1 \le X_2,\, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&= \mathbb{P}\,[\,X_2 < X_1,\, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&\quad + \mathbb{P}\,[\,X_1 \le X_2,\, X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] \\
&= \mathbb{P}\,[\,X_2 \le x+1,\, X_3 > x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\,] = p_{xx}^{aw}
\end{aligned}
$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) *[3 Punkte]* B stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft eines Aktiven auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente der Höhe 1 dar, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt der Invalidität, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes.

(b) *[4 Punkte]* Es gilt $b_{mn} = v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|}$ für $n > m$ und $b_{mn} = 0$ sonst.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn} \cdot \mathbb{P}[B = b_{mn}] \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}[M = m, N = n]
\end{aligned}$$

(c) *[4 Punkte]*

Es gilt:

$\mathbb{P}[M = m] = {}_m p_x^a \cdot i_{x+m}$ für $m \geq 0$

sowie

$\mathbb{P}[N = n \,|\, M = m] = {}_{\frac{1}{2}} p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1} p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n}$ für $n > m$

(d) *[3 Punkte]* Man erhält:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}[M = m, N = n] \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot \mathbb{P}[N = n \,|\, M = m] \cdot \mathbb{P}[M = m] \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \cdot {}_{\frac{1}{2}} p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1} p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n} \cdot {}_m p_x^a \cdot i_{x+m} \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1} \cdot {}_m p_x^a \cdot i_{x+m} \cdot {}_{\frac{1}{2}} p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \cdot {}_{n-m-1} p^i_{x+m+1} \cdot q^i_{x+n} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-m}|}
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

Geburtsdatum:	15.09.1972
Eintrittsdatum:	01.04.2003
Stichtag:	31.12.2021
vertragliche Altersgrenze:	65 Jahre

(a) *[10 Punkte]* Versicherungstechnisches Alter am Stichtag: $x+m=49$

Versicherungstechnisches Alter zu Beginn des Eintrittswirtschaftsjahres (dieser ist am 01.01.2003): $x=30$

Vollendete Dienstjahre bis zur vertraglichen Altersgrenze (diese wird am 15.09.2037 erreicht): 34

Alter bei Eintritt nach der Rückrechnungsmethode: $65-34=31$

10 Dienstjahre vollendet im Alter: $31+10=41$

Formel für den steuerlichen Teilwert:

$$_{m}V_{x} \quad = \quad {}_{m}B^{L}_{x} - P_{x}\cdot \ddot{a}^{a}_{x+m} \qquad \text{mit} \qquad P_{x} = \frac{{}_{0}B^{L}_{x}}{\ddot{a}^{a}_{x}}$$

Somit lautet zum Stichtag 31.12.2021 die Formel für den Teilwert der beschriebenen Zusage:

$$_{19}V_{30} \quad = \quad {}_{19}B^{L}_{30} - \frac{{}_{0}B^{L}_{30}}{\ddot{a}^{a}_{30}}\cdot \ddot{a}^{a}_{49}$$

mit

$$\begin{aligned}
{}_{0}B^{L}_{30} &= 300\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{30} + 100\cdot 12\cdot v^{11}\cdot {}_{11}p^{a}_{30}\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{41} \\
{}_{19}B^{L}_{30} &= 400\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{49}
\end{aligned}$$

(b) *[5 Punkte]*

Zunächst ist zu beachten, dass die Barwerte $\ddot{a}^{a}_{x}$ und $\ddot{a}^{aiA}_{x}$ vom Finanzierungsendalter abhängig sind.

Ferner ist die Rentenkürzung für 24 Monate zu berücksichtigen. Hierzu müssen die Barwerte ${}_{0}B^{L}_{30}$ und ${}_{19}B^{L}_{30}$ in der Teilwertformel wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{aligned}
{}_{0}B^{L}_{30} &= 300\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{30} + 100\cdot 12\cdot v^{11}\cdot {}_{11}p^{a}_{30}\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{41} \\
&\quad - 24\cdot 0,4\%\cdot 400\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aA}_{30} \\
{}_{19}B^{L}_{30} &= 400\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{49} - 24\cdot 0,4\%\cdot 400\cdot 12\cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aA}_{49}
\end{aligned}$$

oder alternativ:

$$
\begin{aligned}
{}_{0}B^{L}_{30} &= 300 \cdot 12 \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{ai}_{30} + 100 \cdot 12 \cdot v^{11} \cdot {}_{11}p^{a}_{30} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{ai}_{41} \\
&+ (1 - 24 \cdot 0,4\%) \cdot 400 \cdot 12 \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aA}_{30} \\
{}_{19}B^{L}_{30} &= 400 \cdot 12 \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{ai}_{49} + (1 - 24 \cdot 0,4\%) \cdot 400 \cdot 12 \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aA}_{49}
\end{aligned}
$$

(c) *[3 Punkte]* In § 6a Abs. 2 EStG ist ein Mindestalter für die erstmaligen Ansatz einer steuerlichen Pensionsrückstellung festgelegt. Bei einer Zusageerteilung am 01.04.1993 darf eine Rückstellung erstmals in dem Wirtschaftsjahr gebildet werden, bis zu dessen Mitte der Pensionsberechtigte das 30. Lebensjahr vollendet. Damit kann die Pensionsrückstellung für Herrn Mustermann erstmalig zum 31.12.2003 gebildet werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[1 Punkt]* Mit dieser Formel kann die Prämie eines Lebensversicherungsvertrags bestimmt werden. Sie ergibt sich durch Umformungen, in dem die Gleichung des Äquivalenzprinzips nach der Prämie aufgelöst wird.

(b) *[3 Punkte]* Dieser Lebensversicherungsvertrag sieht Todesfallleistungen (nachschüssig) in Höhe von 100.000 Euro bei Tod innerhalb der ersten zehn Jahren nach Vertragsbeginn bzw. in Höhe von 50.000 Euro bei Tod in Vertragsjahr 11 bis 20 für eine Person vor, die bei Vertragsabschluss 25 Jahre alt ist. Die Prämienzahlung erfolgt jährlich vorschüssig in den ersten fünf Jahren. Die Inkasso-Kosten belaufen sich auf 1 % der Brutto-Prämie (während der Beitragszahlungsdauer). Die Verwaltungskosten betragen 100 Euro pro Jahr; sie sind während der ersten 15 Jahre jährlich vorschüssig einkalkuliert. Die Abschlusskosten betragen 25 Promille der Beitragssumme; sie sind einmalig zu Vertragsbeginn einkalkuliert.

(c) *[1 Punkt]* Der Höchstrechnungszins bei Vertragsbeginn zum 16.10.2021 beträgt 0,9 % gemäß DeckRV.

(d) *[2 Punkte]* Es kann eine Periodentafel, z. B. die Sterbetafel DAV 2008 T, genutzt werden, da das Todesfallrisiko abgesichert ist. Stornowahrscheinlichkeiten sind erforderlich, wenn bei Storno nicht die Deckungsrückstellung ausbezahlt wird (vgl. Satz von Cantelli).

(e) *[2 Punkte]* Die prospektive Deckungsrückstellung kann berechnet werden mit:

$$ {}_{11}V_{25} = 50.000 \cdot {}_{|9}A_{36} + 100 \cdot \ddot{a}_{36:\overline{4}|} $$

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[3 Punkte]* Die rechnungsmäßige Sterbewahrscheinlichkeit kann mithilfe der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung ermittelt werden, denn für diesen Vertrag gilt:

$$p_{80} \cdot {}_{31}V_{50} = ({}_{30}V_{50} - R - K) \cdot (1 + i)$$

Umformen nach p_{80}, einsetzen und auswerten von $q_{80} = 1 - p_{80}$ liefert:

$$q_{80} = 3{,}00\,\%.$$

Außerdem ist $\ddot{a}_{80} = 108.450/12.050 = 9$ und

$$\ddot{a}_{81} = \frac{\ddot{a}_{80} - 1}{v \cdot p_{80}} = 8{,}53608.$$

(b) *[1 Punkt]* Das Risikoergebnis beträgt:

$$102.859{,}79 \cdot 0,5\,\% = 514,30$$

(c) *[1 Punkt]* Die rechnungsmäßigen Zinsen belaufen sich auf:

$$(108.450 - 12.050) \cdot 3{,}5\,\% = 3.374$$

(d) *[2 Punkte]* Der maßgebliche Zeitpunkt bei der Beteiligung von Rentenversicherungen ist das Ende der Ansparphase (§ 153 VVG). Dieser Vertrag ist demnach schon an den Bewertungsreserven beteiligt worden (in der Vergangenheit) und muss bei den möglichen Bewertungsreserven im Jahr 2021 nicht berücksichtigt werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) *[2 Punkte]* Bei den Leistungen ist der abgegrenzte Schaden der Beobachtungseinheit im Beobachtungszeitraum abzüglich der Nettorisikozuschläge und einschließlich der geschlechtsunabhängig verteilten Leistungen wegen Schwangerschaft und Mutterschaft anzusetzen. Als Profilwerte sind die rechnungsmäßigen Profilwerte zu nutzen. Der Bestand ist für jedes Alter abzugrenzen; für jedes Alter ist der mittlere Bestand der Beobachtungseinheit im Beobachtungszeitraum zu verwenden.

(b) *[2 Punkte]* Der extrapolierte Grundkopfschaden ergibt sich durch eine lineare Extrapolation der drei gegebenen Werte zu 1.010 Euro.

(c) *[2 Punkte]* Der Auslösende Faktor beträgt

$$\left|1 - \frac{1.010}{991}\right| = 1{,}9\,\%$$

und ist insbesondere kleiner als 10 %.

(d) *[3 Punkte]* Auf Basis der Gegenüberstellung der erforderlichen und der kalkulierten Versicherungsleistungen erfolgt in diesem Tarif dieser Beobachtungseinheit zu diesem Zeitpunkt keine Überprüfung der Rechnungsgrundlagen, da der Auslösende Faktor kleiner als 10 % ist. Es besteht aber die Möglichkeit, dass sich die Sterbewahrscheinlichkeiten signifikant verändert haben und diese Veränderung (Auslösender Faktor Sterblichkeit) eine Überprüfung der Rechnungsgrundlagen zu diesem Zeitpunkt auslöst. In diesem Zusammenhang müsste dann unter anderem auch der Rechnungszins überprüft werden und ggf. angepasst werden. Eine Basis für die Überprüfung des Rechnungszinses können die Auswertungen des Aktuariellen Unternehmenszins Verfahrens (AUZ-Verfahren) bieten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

(a) *[3 Punkte]* Es fehlt die Größe $\ddot{a}_{44}$. Diese Größe beschreibt den Rentenbarwert mit den angepassten Rechnungsgrundlagen zum erreichten Alter. Erforderlich sind die Rechnungsgrundlagen Rechnungszins sowie Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten, um diese Größe zu berechnen.

(b) *[4 Punkte]* Begründung für die Wahl von $\ddot{a}_{44} = 25{,}14087$: Bei abnehmender Sterblichkeit und unverändertem Stornoverhalten ist hier ein größerer Wert als $\ddot{a}_{44}^{a}$ gewählt worden.
Für den angepassten Monatsbeitrag gilt mit $\ddot{a}_{44} = 25{,}14087$:

$$\begin{aligned} b_{44}^{a/n} &= \frac{(f_{44} - \alpha_{44}) \cdot b_{44} - (f_{44}^{a} - \alpha_{44}^{a}) \cdot b_{44}^{a} + (f_{44}^{a} - \alpha_{44}'') \cdot b^{a}}{f_{44} - \alpha_{44}''} \\ &= \frac{(22{,}12397 - 0{,}75) \cdot 351{,}70 - (20{,}53172 - 0{,}75) \cdot 315{,}76 + 20{,}53172 \cdot 289{,}57}{22{,}12397} \\ &= 326{,}18 \end{aligned}$$

wobei $f_{44}^{a} = (1 - \Delta^{a}) \cdot \ddot{a}_{44}^{a} = 0{,}88 \cdot 23{,}33150 = 20{,}53172$
und $f_{44} = (1 - \Delta) \cdot \ddot{a}_{44} = 22{,}12397$.

(c) *[2 Punkte]* In diesem Vertrag ist der Übertragungswert zu berücksichtigen, da der Vertragsbeginn nach dem 01.01.2009 erfolgt ist (vgl. §146 (1) VAG). Die genannten Beiträge b_a, b_u^{a} und b_u müssen also Übertragungswertzahlungen enthalten.