DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15.10.2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 15 Seiten.
- Zusätzlich zu den 15 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoteilung] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen. Bitte die Lösungen nicht auf dem Aufgabenblatt ankreuzen, sondern ausschließlich auf den Lösungsbögen eintragen.

(a) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Sachverhalte stellt *keine* Form von *proportionaler* Risikoteilung dar?

(i) Abzugsfranchise in der Kraftfahrt-Kaskoversicherung

(ii) Kostentarif mit Selbstbehaltsquote in der privaten Krankenversicherung

(iii) Summenexzedenten-Rückversicherung für ein Portfolio von Risikolebensversicherungen

(iv) Unterversicherung in der Hausratversicherung

(b) *[1 Punkt]* Bei welcher der folgenden Rückversicherungsformen wird die Rückversicherungsprämie *nicht* frei durch den Rückversicherer kalkuliert?

(i) Jahresüberschadenexzedenten-Rückversicherung

(ii) Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung

(iii) Quoten-Rückversicherung

(iv) Schadenexzedenten-Rückversicherung

(c) *[1 Punkt]* Bei welcher Rückversicherungsform wird die Priorität auch als *Stopp-Loss-Punkt* bezeichnet?

(i) Jahresüberschadenexzedenten-Rückversicherung

(ii) Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung

(iii) Schadenexzedenten-Rückversicherung

(iv) Summenexzedenten-Rückversicherung

(d) *[1 Punkt]* Bei welcher Rückversicherungsform wird der rückversicherte Teil mittels *vertragsindividueller* Quoten je Risiko ermittelt?

(i) Jahresüberschadenexzedenten-Rückversicherung

(ii) Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung

(iii) Schadenexzedenten-Rückversicherung

(iv) Summenexzedenten-Rückversicherung

(e) *[1 Punkt]* Was ist das Ziel von *nicht-proportionaler* Risikoteilung im *direkten Geschäft* zwischen Versicherungsnehmer und Erstversicherer?

(i) Ausschluss von Klein(st)schäden beim Erstversicherer

(ii) Erhöhung der Zeichnungskapazität beim Erstversicherer

(iii) Reduktion der Kapitalkosten beim Erstversicherer

(iv) Verringerung der finanziellen Auswirkungen von Naturgefahren beim Erstversicherer

(f) *[1 Punkt]* Bei welcher der folgenden Naturgefahren ist die Abgrenzung einzelner Kumulereignisse für einen CAT-XL-Vertrag besonders schwierig und daher als Rückversicherungsform für die gesuchte Gefahr in der Praxis unüblich?

(i) Frost

(ii) Hagel

(iii) Sturm

(iv) Überschwemmung

(g) *[1 Punkt]* Wie hoch ist die Priorität eines Schadenexzedenten 2 Mio. xs. 3 Mio.?

(i) 2 Mio.

(ii) 3 Mio.

(iii) 4 Mio.

(iv) 5 Mio.

(h) *[1 Punkt]* Welche Darstellung bezeichnet einen Kumulschadenexzedenten mit einem Limit von 10 Mio. und einer Plafondhöhe von 30 Mio.?

(i) 10 Mio. xs. 20 Mio.

(ii) 10 Mio. xs. 30 Mio.

(iii) 20 Mio. xs. 10 Mio.

(iv) 30 Mio. xs. 10 Mio.

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Äquivalenzprinzip und Nettorisikoprämie] [16 Punkte]*
Ein Versicherer plant die Einführung eines neuen innovativen Produkts. Hierfür hat das Aktuariat folgende Annahmen für die Prämienkalkulation getroffen:

- Versicherungsdauer $n = 3$ Jahre
- jährlich vorschüssige Prämienzahlung mit 5% jährlicher Beitragsdynamik
- Zinssatz für Diskontierung $r = 0\%$
- Eintrittswahrscheinlichkeit des Leistungsfalls im ersten, zweiten und dritten Jahr $q_1 = 1{,}112813\%$, $q_2 = 1{,}05\%$, $q_3 = 1{,}0\%$
- jährlich nachschüssige Zahlung des Leistungsfalls, für dessen Höhe H_t gilt: $H_t \sim \Gamma(\alpha_t, \lambda)$ mit $\alpha_t = 3 + t$ und $\lambda = 0{,}005$ für $t \in \{1, 2, 3\}$

(a) *[6 Punkte]* Berechnen Sie für das gegebene Produktkonzept mittels Äquivalenzprinzip die Nettorisikoprämie $\bar{P}$ zu Beginn des ersten Versicherungsjahrs und runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

(b) *[4 Punkte]* Die Vorstandsvorsitzende möchte das Produkt zu einem günstigeren Preis als in Teil (a) berechnet einführen und gibt Ihnen eine niedrigere Nettorisikoprämie $\tilde{P} = 9{,}00$ für das erste Versicherungsjahr vor. Dies soll durch Hinzunahme einer prozentualen Selbstbeteiligung b im ersten Versicherungsjahr ermöglicht werden, so dass für die modifizierte Leistungshöhe $\tilde{H}_1$ gilt:

$$\tilde{H}_1 = (1 - b) \cdot H_1$$

Wie hoch muss der Prozentsatz b gewählt werden, so dass gemäß Äquivalenzprinzip das gewünschte Prämienniveau $\tilde{P} = 9{,}00$ erreicht wird?
Geben Sie b gerundet ohne Nachkommastellen an.

(c) *[4 Punkte]* Die Selbstbeteiligung b von über 25%, wie in Teilaufgabe (b) ermittelt, erscheint Ihrer direkten Führungskraft zu hoch. Daher soll die halbe Selbstbeteiligung $\tilde{b}$ nun auch im zweiten Versicherungsjahr gelten, d.h.:

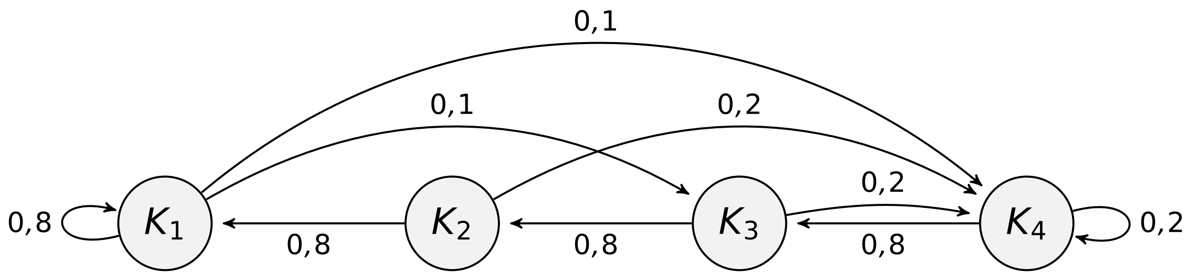
$$\tilde{H}_1 = \left(1 - \tilde{b}\right) \cdot H_1 \quad \text{und} \quad \tilde{H}_2 = \left(1 - 0{,}5 \cdot \tilde{b}\right) \cdot H_2$$

Wie hoch ist nun der Prozentsatz $\tilde{b}$ anzusetzen, so dass gemäß Äquivalenzprinzip das gewünschte Prämienniveau $\tilde{P} = 9{,}00$ erreicht wird?
Geben Sie $\tilde{b}$ gerundet ohne Nachkommastellen an.

(d) *[2 Punkte]* Ein Kollege schlägt Ihnen vor, die prozentuale Selbstbeteiligung durch eine Abzugsfranchise mit Franchisegrenze $a > 0$ zu ersetzen. Sie erwidern, dass bei Verwendung einer Abzugsfranchise andere Werte für q_t und H_t als oben angegeben in der Prämienberechnung anzusetzen seien ($t = 1, 2, 3$). Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Aussage ohne Berechnung.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Modellierung von Versicherungsprozessen] [12 Punkte]*
Gegeben sei ein Bonus-Malus-System mit folgenden Spezifikationen:

- 4 Klassen:
  K_1 Superbonusklasse, K_2 Bonusklasse, K_3 Einstiegsklasse, K_4 Malusklasse
- Prämienvektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (50, 70, 80, 110)$
- Schadenanzahl N mit folgenden Wahrscheinlichkeiten
  $P(N = 0) = 0{,}8 \qquad P(N = 1) = 0{,}1 \qquad P(N \geq 2) = 0{,}1$
- Übergangsdiagramm mit Übergangswahrscheinlichkeiten t_{ij} von K_i nach K_j für gewisse $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$:



(a) *[1 Punkt]* Nennen Sie den Zweck von Bonus-Malus-Systemen bei der Gestaltung von Prämien.

(b) *[2 Punkte]* Erstellen Sie eine Rückstufungstabelle für das gegebene Bonus-Malus-System in der folgenden Form:

bisherige Klasse	neue Klasse bei $N = 1$	neue Klasse bei $N \geq 2$
K_1	$K_{...}$	$K_{...}$
K_2	$K_{...}$	$K_{...}$
K_3	$K_{...}$	$K_{...}$
K_4	$K_{...}$	$K_{...}$

(c) *[4 Punkte]* Geben Sie die Übergangsmatrix T der Markov-Kette an, die das gegebene Bonus-Malus-System repräsentiert.

(d) *[3 Punkte]* Im Jahr 2021 lag die Bestandsverteilung $s = \left(\frac{64}{117}, \frac{16}{117}, \frac{32}{117}, \frac{5}{117}\right)$ bzgl. der Bonus-Malus-Klassen (K_1, K_2, K_3, K_4) vor.
Prüfen Sie per Rechnung soweit erforderlich, *ob* s ein eingeschwungener Zustand des Bonus-Malus-Systems ist, d.h. *ob* die Verteilung s stationär ist?

(e) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei mögliche Gründe, warum die in der deutschen Kraftfahrtversicherung verwendeten Schadenfreiheitsklassen des GDV bisher keinen stationären Zustand erreicht haben.

Aufgabe 4. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [12 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, welche Daten für eine qualifizierte Hochrechnung der künftigen Schadenanzahlen eines gegebenen Kollektivs versicherter Risiken erforderlich sind. Wie könnte eine solche Hochrechnung konkret aussehen?

(b) *[7 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen	
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter
1	01.01.	**30.06.**	200	20		
2	01.01.	**30.09.**	100	15	15	
3	01.01.	31.12.	300	20	10	20
4	**01.04.**	31.12.	400	25	50	
5	01.01.	31.12.	500	40	25	7

Berechnen Sie den Schadendurchschnitt und den Schadenbedarf.
Beurteilen Sie die Profitabilität dieses Bestandes.

(c) *[2 Punkte]* Kann der Schadensatz größer als der Schadengrad sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Frage c) ist allgemeiner Natur, bezieht sich also nicht auf den in b) gegebenen Bestand.

Aufgabe 5. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie zwei konkrete Risikomerkmale an, die aktuell in Deutschland nicht als Tarifmerkmale zum Einsatz kommen können. Begründen Sie Ihre Angaben.

(b) *[9 Punkte]* Erläutern Sie den Begriff eines additiven Modells im Kontext der Tarifierung.
Wie ist ein Marginalsummand von 30 Geldeinheiten zu interpretieren?

(c) *[6 Punkte]* Erläutern Sie den Ansatz und die Anwendung des Marginalsummenverfahrens (MSV) im Rahmen der Tarifierung für den Spezialfall von genau zwei Tarifmerkmalen ($r = 2$).

(d) *[4 Punkte]* Was ist im Kontext der verallgemeinerten linearen Modelle (GLM) der lineare Prädiktor? Erläutern Sie die Bedeutung dieser Größe für den Fall, dass das zugehörige GLM in der Tarifierung eingesetzt wird.

Aufgabe 6. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Begründen Sie die Notwendigkeit der Reservierung in der Schadenversicherung. Welche Versicherungszweige sind besonders betroffen, welche weniger?

(b) *[5 Punkte]* Was ist ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse? Nennen Sie ein Reservierungsverfahren, das mit einem solchen Abwicklungsmuster operiert?

(c) *[6 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre $i = 2018, \ldots, 2021$ die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2018	80	120	150	165
2019	100	150	201	
2020	300	498		
2021	400			

Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2020 und 2021 mit dem Chain-Ladder-Verfahren.
Hinweis: Die Schätzer der Reserven sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

(d) *[2 Punkte]* In welcher Beziehung stehen das Loss-Development-Verfahren (LD) und das iterierte Bornhuetter-Ferguson-Verfahren (BF)? Begründen Sie Ihre Aussage kurz.

(e) *[2 Punkte]* Welche Vorteile weisen stochastische (verteilungsbasierte) Modelle der Reservierung gegenüber den klassischen Modellen bzw. Basisverfahren auf?

Aufgabe 7. *[Personenversicherungsmathematik, Zustandsmodell, Rechnungsgrundlagen]* [16 Punkte]

(a) Wir betrachten das allgemeine Zustandsmodell der Personenversicherungsmathematik, in dem sich die betrachtete Person in einer Hauptgesamtheit befindet, aus der h Ausscheideursachen zum Ausscheiden führen können.

   (i) *[2 Punkte]* Erläutern Sie die in diesem Modell häufig zugrunde gelegte Voraussetzung der Zyklenfreiheit. Geben Sie ein Beispiel für einen Sachverhalt an, bei dem diese Voraussetzung in der Realität nicht erfüllt ist.

   (ii) *[5 Punkte]* Geben Sie je ein Beispiel für eine einfache Ausscheideordnung und für eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit zwei Ausscheideursachen an. Geben Sie bei Ihren Beispielen jeweils die Hauptgesamtheit und die Ereignisse an, die zum Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit führen.

   (iii) *[2 Punkte]* Bei einer zusammengesetzten Ausscheideordnung mit zwei Ausscheideursachen seien wie üblich X_1 und X_2 die Alter der betrachteten Person bei Eintritt des Ereignisses 1 bzw. 2. Erläutern Sie, mit Hilfe welcher Konvention erreicht werden kann, dass im Fall $X_1 = X_2$ nur eine einzige Ausscheideursachen zum Ausscheiden führt.

(b) *[3 Punkte]* Welche drei Rechnungsgrundlagen finden in der Personenversicherungsmathematik üblicherweise Anwendung?

(c) *[4 Punkte]* Stellen Sie den grundsätzlichen Unterschied zwischen Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und 2. Ordnung dar. Geben Sie je ein Beispiel für biometrische Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und biometrische Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung an.

Aufgabe 8. *[Personenversicherungsmathematik, Erfüllungsbetrag]* [20 Punkte]

Wir betrachten eine einfache Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Lebenden und der einzigen Ausscheideursache „Tod“. Für einen x-jährigen Mann und eine y-jährige Frau der Hauptgesamtheit bedeuten auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

M: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod des x-jährigen Mannes,
N: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod der y-jährigen Frau,

mit M, N unabhängig. Seien ferner

$B = v^{M+1}\, \ddot{a}_{\overline{N-M|}}\, 1_{\{N>M\}}$

der Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung.

(a) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie, um welche Art von Verpflichtung es sich bei B handelt (insbesondere unter Angabe, welche Zahlungen zu leisten sind, wann diese beginnen und wann diese enden).

(b) *[3 Punkte]* Sei q_x die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes. Drücken Sie für $m \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[M = m]$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_x und daraus abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten aus.

(c) *[2 Punkte]* Sei q_y die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer y-jährigen Frau. Drücken Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[N \geq n]$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_y bzw. daraus abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten aus.
Bem.: Es wird nicht zwischen der Sterblichkeit einer Frau und einer Witwe unterschieden.

(d) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{n>m} \ddot{a}_{\overline{n-m|}}\, \mathbb{P}[N = n] = {}_{m+1}p_y\, \ddot{a}_{y+m+1}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i} b_{ij} = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq j} b_{ij}.$$

(e) *[6 Punkte]* Stellen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[B]$ mittels der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[M = m, N = n]$, $m, n = 0, 1, \ldots,$ dar und zeigen Sie mit Hilfe von (d), dass gilt:

$$\mathbb{E}[B] = \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\, {}_m p_x\, q_{x+m}\, {}_{m+1}p_y\, \ddot{a}_{y+m+1}$$

Aufgabe 9. *[Pensionsversicherungsmathematik, Zustandsmodell, Bewertungsverfahren] [18 Punkte]*

Sie haben einen Beratungstermin mit dem Geschäftsführer der Innovative Produkte GmbH sowie dessen Steuerberater zu den Pensionsrückstellungen der Gesellschaft vereinbart. Sie sollen an diesem Termin Ihre versicherungsmathematischen Gutachten über die Höhe der Rückstellung für die unmittelbaren Pensionsverpflichtungen der Gesellschaft in der deutschen Steuer- und Handelsbilanz erläutern.

(a) *[8 Punkte]* Nachdem Sie dem Geschäftsführer die Ergebnisse der Bewertungen vorgestellt haben, ist dieser sehr erstaunt, dass die Rückstellungshöhe in den beiden Gutachten so stark abweicht, obwohl jeweils die gleichen Verpflichtungen bewertet werden. Der Geschäftsführer bittet Sie daher zu erläutern, welche Unterschiede zwischen dem steuerlichen und handelsrechtlichen Bewertungsansatz von Pensionsverpflichtungen bestehen. Nennen Sie dabei vier Merkmale und deren unterschiedliche Berücksichtigung in der steuerlichen und handelsrechtlichen Bewertung.

(b) *[6 Punkte]* Sie haben die handelsrechtliche Pensionsrückstellung mit dem modifizierten Teilwertverfahren nach Engbroks ermittelt. Der Steuerberater des Mandanten möchte von Ihnen wissen, welche Unterschiede zwischen dem ihm bekannten steuerlichen Teilwert gemäß § 6a EStG sowie dem modifizierten Teilwert nach Engbroks bestehen. Geben Sie hierzu die formelmäßige Darstellung dieser beiden Teilwertverfahren an und interpretieren Sie anhand der formelmäßigen Darstellungen auch die Unterschiede in der Prämienbestimmung dieser beider Teilwertverfahren.

(c) *[4 Punkte]* Pensionszusagen bestehen bei der Gesellschaft nur für die Führungskräfte. Der Geschäftsführer der Innovative Produkte GmbH möchte einen seiner Mitarbeiter nach 15 Jahren Betriebszugehörigkeit zur Führungskraft befördern und ihm in diesem Zusammenhang ebenfalls eine unmittelbare Versorgungszusage erteilen. Der Steuerberater des Mandanten weist darauf hin, dass es nach seiner Kenntnis einen Einfluss auf die Höhe der Pensionsrückstellung hat, ob in der Pensionszusage eine 10-jährige Wartezeit ab Eintritt geregelt wird oder nicht.
Der Geschäftsführer kann kaum glauben, dass der Steuerberater mit seiner Vermutung recht hat, da die Wartezeit zum Zeitpunkt der Erteilung der Zusage bereits abgelaufen wäre und bittet Sie, zu dem Sachverhalt Stellung zu nehmen. Gehen Sie hierbei auf die etwaigen Auswirkungen dieser Wartezeit in den beiden in (b) genannten Bewertungsverfahren ein.

Aufgabe 10. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Standardformeln] [9 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 65-jährige Frau, die am 01.01.2023 lebt, innerhalb von zwei Jahren stirbt?
Verwenden Sie die folgenden Daten der Sterbetafel DAV 2004 R (1. Ordnung). Berücksichtigen Sie dabei auch den Trend der Sterblichkeitsverbesserungen.

Alter x	Basistafel q_x	Trend $F(x)$
64	0,004384	0,02459119
65	0,004830	0,02494674
66	0,005278	0,02535629
67	0,005905	0,02580147
68	0,006674	0,02627101

(b) *[5 Punkte]* Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}$$

Aufgabe 11. *[Lebensversicherungsmathematik, Überschüsse und Bewertungsreserven] [9 Punkte]*
Ein Lebensversicherer hat im Jahr 2000 aufgeschobene Rentenversicherungen an Personen im Alter 43 verkauft. Die Rentenversicherungen sind wie folgt ausgestaltet:

- Rechnungszins 4 %
- jährlich vorschüssige Rente in Höhe von 12.000 Euro ab Rentenbeginnalter 65 (d. h. ab 01.01.2022)
- Kostenannahmen: Verwaltungskosten in Höhe von jährlich 120 Euro
- Beitragszahlung lediglich während der Aufschubphase (bis Alter 65), d. h. keine Beitragszahlungen ab 01.01.2022

Außerdem seien folgende Rentenbarwerte bekannt:

Rechnungszins	4 %	0,90 %	0,298 %	0,25 %
$\ddot{a}_{65}$	17,64006	26,90291	29,61226	29,84621
$\ddot{a}_{80}$	12,35573	16,27640	17,29461	17,38043
${}_{15}E_{65}$	0,51419	0,80957	0,88560	0,89198
${}_{15}p_{65}$	0,92602	0,92602	0,92602	0,92602

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie den Sicherungsbedarf für diesen Bestand zum Zeitpunkt 31.12.2021, wenn dann noch 500 Verträge existieren. Der Bezugszins betrage 0,298 %.

(b) *[3 Punkte]* Welche Schlussfolgerungen können Sie für die Beteiligung an etwaigen Bewertungsreserven am 31.12.2021 ziehen? Gehen Sie dabei gesondert auf Aktien und festverzinsliche Wertpapiere ein und stellen Sie den Zusammenhang zu Aufgabenteil (a) her.

Aufgabe 12. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [9 Punkte]*
Für eine *Risikolebensversicherung* sowie für eine *private Krankheitskostenvollversicherung* sind für die Prämienkalkulation unter anderem folgende Rechnungsgrundlagen erforderlich:

- Rechnungszins
- Ausscheideordnung
- Kosten

Vergleichen Sie für die Festlegung der Rechnungsgrundlagen für den deutschen Versicherungsmarkt ...

- einerseits die rechtlichen Anforderungen und
- andererseits die aktuarielle Praxis sowie Besonderheiten.

Aufgabe 13. *[Krankenversicherungsmathematik, Beitragsanpassung] [9 Punkte]*
Ein junges PKV-Unternehmen hat vor fünf Jahren einen Tarif eingeführt und aktuell Versicherte aus den Altersbereichen 30 bis 50 im Bestand. Für jeden Altersbereich ist die mittlere Bestandsgröße der vergangenen drei Jahre sowie der abgegrenzte Gesamtschaden der jeweiligen Jahre in der folgenden Tabelle aufgelistet. Außerdem ist das rechnungsmäßige Profil angegeben. Der rechnungsmäßige Grundkopfschaden beträgt 1.800 Euro.

Altersgruppe	2019	2020	2021	rechn. Profil
$[30;35)$	4	2	0	0,50
$[35;40)$	8	9	10	0,72
$[40;45)$	11	12	10	1,00
$[45;50)$	9	9	10	1,28
abg. Schaden:	52.432	56.754	58.800	
tat. GKS:	1.706	1.805	?	

(a) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie den tatsächlichen Grundkopfschaden auf Basis dieser Informationen für das Jahr 2021 (ohne Dezimalstellen).
Hinweis: Für die Jahre 2019 und 2020 sind die tatsächlichen Grundkopfschäden (GKS) bereits in der letzten Zeile berechnet worden.

(b) *[4 Punkte]* Wie groß ist der Auslösende Faktor für die Schäden auf dieser Basis?

(c) *[1 Punkt]* Benennen Sie eine Situation, in der das Unternehmen keine Beitragsanpassung durchführen darf, obwohl der Auslösende Faktor der Versicherungsleistungen „anspringt“.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 *[8 Punkte]*

(a) *[1 Punkt]* (i)

(b) *[1 Punkt]* (iii)

(c) *[1 Punkt]* (i)

(d) *[1 Punkt]* (iv)

(e) *[1 Punkt]* (i)

(f) *[1 Punkt]* (i)

(g) *[1 Punkt]* (ii)

(h) *[1 Punkt]* (i)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 *[16 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]*

Für den erwarteten Prämienbarwert gilt:

$$\mathrm{E}(P) = \bar{P} + 1{,}05 \cdot \bar{P} + 1{,}05^2 \cdot \bar{P} + 0 = 3{,}1525 \cdot \bar{P}$$

Für die Leistungshöhen H_t mit $t \in \{1,\, 2,\, 3\}$ gilt:

$$H_1 \sim \Gamma(4;\, 0{,}005), \quad H_2 \sim \Gamma(5;\, 0{,}005), \quad H_3 \sim \Gamma(6;\, 0{,}005)$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(H_1) = \frac{4}{0{,}005} = 800, \quad \mathrm{E}(H_2) = \frac{5}{0{,}005} = 1000, \quad \mathrm{E}(H_3) = \frac{6}{0{,}005} = 1200$$

Damit gilt für den erwarteten Leistungsbarwert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(L) &= 0 + q_1 \cdot \mathrm{E}(H_1) + q_2 \cdot \mathrm{E}(H_2) + q_3 \cdot \mathrm{E}(H_3) \\
&= 0{,}01112813 \cdot 800 + 0{,}0105 \cdot 1000 + 0{,}01 \cdot 1200 \\
&= 8{,}902504 + 10{,}5 + 12 \\
&= 31{,}402504
\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus dem Äquivalenzprinzip für die Nettorisikoprämie:

$$\bar{P} = \frac{\mathrm{E}(L)}{\mathrm{E}(P)} = \frac{31{,}402504}{3{,}1525} \approx 9{,}96$$

(b) *[4 Punkte]*

Für den erwarteten Prämienbarwert gilt gemäß Vorstandsvorgabe:

$$\mathrm{E}(P) = \tilde{P} + 1{,}05 \cdot \tilde{P} + 1{,}05^2 \cdot \tilde{P} + 0 = 3{,}1525 \cdot 9{,}00 = 28{,}3725$$

Für den erwarteten Leistungsbarwert mit prozentualer Selbstbeteiligung b gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(L) &= (1 - b) \cdot 8{,}902504 + 10{,}5 + 12 \\
&= 31{,}402504 - b \cdot 8{,}902504
\end{aligned}$$

Hieraus folgt gemäß Äquivalenzprinzip für die Selbstbeteiligungsquote:

$$\begin{aligned}
28{,}3725 &= 31{,}402504 - b \cdot 8{,}902504 \\
\Rightarrow b &= \frac{3{,}03004}{8{,}902504} \approx 34\%
\end{aligned}$$

(c) *[4 Punkte]*

Für den erwarteten Leistungsbarwert mit prozentualer Selbstbeteiligung $\tilde{b}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(L) &= \left(1 - \tilde{b}\right) \cdot 8{,}902504 + \left(1 - 0{,}5 \cdot \tilde{b}\right) \cdot 10{,}5 + 12 \\
&= 31{,}402504 - \tilde{b} \cdot 8{,}902504 - \tilde{b} \cdot 5{,}25 \\
&= 31{,}402504 - \tilde{b} \cdot 14{,}152504
\end{aligned}$$

Hieraus folgt gemäß Äquivalenzprinzip für die Selbstbeteiligungsquote:

$$28{,}3725 = 31{,}402504 - \tilde{b} \cdot 14{,}152504$$
$$\Rightarrow \tilde{b} = \frac{3{,}03004}{14{,}152504} \approx 21\%$$

(d) *[2 Punkte]*

Die Abzugsfranchise, die eine nicht-proportionale Form von Risikoteilung im direkten Geschäft darstellt, führt zu einer Reduktion von Kleinschäden beim Versicherer, d.h. rational handelnde Kunden melden zwecks Zeitersparnis nur noch Leistungsfälle größer als die Franchisegrenze α beim Versicherer.

Somit fallen die dann beobachteten Eintrittswahrscheinlichkeiten kleiner als die gegebenen q_t aus und die dann beobachteten Verteilungen der originären Leistungshöhen (vor Abzug der Franchise) verschieben sich von den gegebenen H_t zu (originären) Leistungshöhen größer als die Franchisegrenze α ($t = 1, 2, 3$).

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 *[12 Punkte]*

(a) *[1 Punkt]*
Bonus-Malus-Systeme dienen der Prämiendifferenzierung basierend auf beobachteter Schadenvergangenheit, d.h. gute / schadenfreie Risiken zahlen eine günstigere Prämie als schlechtere / schadenbehaftete Risiken.

(b) *[2 Punkte]*
Die Rückstufungstabelle lautet:

bisherige Klasse	neue Klasse bei $N = 1$	neue Klasse bei $N \geq 2$
K_1	K_3	K_4
K_2	K_4	K_4
K_3	K_4	K_4
K_4	K_4	K_4

(c) *[4 Punkte]*
Die Übergangsmatrix lautet:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

(d) *[3 Punkte]*
Es ist zu prüfen, ob für $s = \left(\frac{64}{117}; \frac{16}{117}; \frac{32}{117}; \frac{5}{117}\right) \approx (0{,}547; 0{,}137; 0{,}274; 0{,}043)$ die Matrixgleichung $s \cdot T = s$ erfüllt ist:

$$\left(\frac{64}{117}; \frac{16}{117}; \frac{32}{117}; \frac{5}{117}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0{,}8 \cdot \frac{64}{117} + 0{,}8 \cdot \frac{16}{117}; 0{,}8 \cdot \frac{32}{117}; 0{,}1 \cdot \frac{64}{117} + 0{,}8 \cdot \frac{5}{117}; 0{,}1 \cdot \frac{64}{117} + \ldots + 0{,}2 \cdot \frac{5}{117}\right)$$

$$\approx (0{,}547; 0{,}219; 0{,}089; 0{,}145) \neq s$$

Somit ist die Verteilung s nicht stationär bzw. das Bonus-Malus-System nicht in einem eingeschwungenen Zustand.

Hinweis: Zur Erfüllung der Aufgabenstellung genügt es nach Berechnung der abweichenden zweiten Vektorkomponenten nicht weiter fortzufahren.

(e) *[2 Punkte]*

Folgende Sachverhalte der Kraftfahrtversicherung führen dazu, dass das System der Schadenfreiheitsklassen von der Reinform eines Bonus-Malus-Systems in der Praxis abweicht und bisher kein stationärer Zustand absehbar ist:

- Versicherer bieten ihren Kunden teils Rabattschutz, d.h. eine Schadenfreiheitsklasse kann vor Rückstufung (als zusätzlicher Versicherungsbaustein) geschützt werden.
- Versicherer ermöglichen (unter bestimmten Voraussetzungen) teils vergünstige Sondereinstufungen von Fahrzeugen, z.B. für Zweitwagen oder bei Familienangehörigen.
- Versicherer ermöglichen (unter bestimmten Voraussetzungen) teils Übertragung oder Tausch von Schadenfreiheitsklassen zwischen verschiedenen Fahrzeugen eines Kunden.
- Versicherer ermöglichen (unter bestimmten Voraussetzungen) teils die Übertragung von Schadenfreiheitsklassen auf Familienangehörige.
- Wegen des demographischen Wandels altert die Bevölkerung immer mehr und die sich ändernde Alterszusammensetzung im Versichertenbestand ist zugleich stark korreliert mit der Zusammensetzung der Schadenfreiheitsklassen.
- Als Konsequenz und Ursache zugleich hat der GDV die Anzahl der Schadenfreiheitsklassen durch Verlängerung seiner SF-Staffeln bereits mehrfach erhöht.

Hinweis: Gemäß Aufgabenstellung genügt es zwei der oben genannten Antwortmöglichkeiten zu nennen. Außerdem sind weitere Antworten möglich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) *[3 Punkte]* Es sind neben Schadendaten auch Bestandsdaten erforderlich. Konkret werden sowohl die Anzahlen der Schäden (N) als auch die Anzahl der Jahreseinheiten (n_0) benötigt. Die Schadenhäufigkeiten $\frac{N}{n_0}$ (verschiedener Perioden) sind geeignete Kennzahlen zur Hochrechnung künftiger Schadenanzahlen.

(b) *[7 Punkte]* Es sind $N = 6$ Schäden eingetreten. Die Summe der (Einzel-)Schäden ist der Gesamtschaden

$$S = 15 + 10 + 20 + 50 + 25 + 7 = 127\,.$$

Der Schadendurchschnitt ist somit

$$SD = \frac{S}{N} = \frac{127}{6} = 21,17\,.$$

Die Anzahl der Jahreseinheiten beträgt

$$n_0 = 0{,}50 + 0{,}75 + 1{,}00 + 0{,}75 + 1{,}00 = 4\,,$$

sodass sich der Schadenbedarf

$$SB = \frac{S}{n_0} = \frac{127}{4} = 31,75$$

ergibt.
Eine geeignete Kennzahl zur Beurteilung der Profitabilität eines Bestandes ist die Schadenquote. Sie erfordert die Berechnung der Summe der verdienten Beiträge:

$$b = 20 \cdot 0{,}50 + 15 \cdot 0{,}75 + 20 \cdot 1 + 25 \cdot 0{,}75 + 40 \cdot 1 = 100\,.$$

Die Schadenquote ist somit:

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{127}{100} = 127\% > 100\%\,.$$

Bedenkt man weiter, dass die Schadenquote keine Kosten erfasst, liegt offenbar (in der betrachteten Periode) ein klar defizitärer Bestand vor.
(Die Versicherungssummen gehen nicht in die hier gefragten Kennzahlen ein.)

(c) *[2 Punkte]* Zwischen dem Schadensatz $SS = \frac{S}{v}$ und dem Schadengrad $SG = \frac{D}{v_0}$ besteht die Beziehung

$$SS\left(= \frac{S}{v} = \frac{N}{n_0} \cdot \frac{S/N}{v/n_0} = \frac{N}{n_0} \cdot \frac{D}{v_0}\right) = H \cdot SG\,.$$

Der Schadensatz ist somit genau dann größer als der Schadengrad, wenn die Schadenhäufigkeit $H > 1$ ist. Dies ist (in der Schadenversicherung) sehr selten, aber möglich. (In der Krankenversicherung ist es bei älteren Versicherten die Regel.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) *[3 Punkte]* Hier sind solche Risikomerkmale zu nennen, die die Aufsicht durch das Diskriminierungsverbot untersagt, also insbesondere Geschlecht und Nationalität. Der Bezug auf die Aufsicht/das Diskriminierungsverbot ist hier notwendig. Etwaige sonstige Gründe wie Multikollinearität, schwierige Messbarkeit und fehlende Stabilität reichen hier nicht aus.

(b) *[9 Punkte]* Additive Modelle der Tarifierung sind spezielle Tarif(ierungs)-modelle. Ein Tarifmodell ordnet den Risikoklassen – formal eindeutig festgelegt durch ein r-Tupel $i := (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ – (Nettorisiko-)Prämien

$$b_i := b_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$$

zu. Ausgangspunkt ist der Schadenbedarf (Kollektivmittel) des gesamten Bestands

$$sb := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Kumulierte Jahreseinheiten (Volumenmaße)}}\,.$$

Der individuelle Einfluss der Risikoklasse (i) wird bei additiven Modellen durch die Marginalsummanden u_{j,i_j} berücksichtigt. Es resultiert der Ansatz

$$b_i = b_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = sb + \sum_{j=1}^{r} u_{j,i_j}\,.$$

Die Marginalparameter sind durch geeignete Verfahren, etwa Ausgleichsverfahren, zu schätzen. (In der Praxis dominieren die multiplikativen Verfahren.)

Marginalsummanden können durchaus negativ sein. Sie sind als additive Zu- bzw. Abschläge vom Kollektivmittel sb aufzufassen. Insofern entspricht ein Marginalsummand von 30 Geldeinheiten einem absoluten additiven Zuschlag von 30 Geldeinheiten. Es liegt tendenziell ein unterdurchschnittlich gutes Risiko vor. Über die relative Abweichung von sb (Zuschlag in %) ist hier keine Aussage möglich.

(c) *[6 Punkte]* Das MSV bei 2 Merkmalen setzt wie folgt an:

- Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen. Die Grundlage der Bestimmung der Marginalfaktoren sind somit die folgenden Marginalsummengleichungen:

$$\sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot b_{i,j} = sb \cdot x_i \cdot \sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot y_j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{q} s_{i,j} = s_{i\bullet} \quad , i = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{i=1}^{p} v_{i,j} \cdot b_{i,j} = sb \cdot y_j \cdot \sum_{i=1}^{p} v_{i,j} \cdot x_i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{p} s_{i,j} = s_{\bullet j} \quad , j = 1, \ldots, q$$

Dabei sind $x_i = u_{1,i}$ bzw. $y_j = u_{2,j}$ die Marginalfaktoren des 1. bzw. 2. Merkmals.

- Die Lösungen $\left(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q\right)$ ergeben sich durch ein System von $p + q$ nichtlinearen Fixpunktgleichungen und nur iterativ. Die Lösungen sind nicht eindeutig bestimmt, nur deren Produkte $x_i \cdot y_j$ und damit die Nettorisikoprämien $b_{i,j}$.

Zur Anwendung:

- Das MSV generiert Nettorisikoprämien (Schätzer der Schadenerwartungswerte) durch den Ansatz:
$$b_{i,j} = sb \cdot x_i \cdot y_j \,.$$

- Das MSV ist – etwa im Vergleich zum Verfahren von Bailey und Simon – weniger ausreißerempfindlich, also robuster. Der beobachtete Gesamtschaden wird exakt angenommen.

- Das MSV wird vom GDV seit 1995 zum Ausgleich von Schadentafeln eingesetzt.

(d) *[4 Punkte]* In verallgemeinerten linearen Modellen

$$Y = g^{-1}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot X_i\right) + \tilde{\varepsilon}$$

mit Link-Funktion g ist der lineare Prädiktor gegeben durch

$$\eta(x) = \eta(x_1, \ldots, x_r) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i \,.$$

Er ist also im Kontext der Tarifierung eine (verschobene) Linearkombination der Ausprägungen $x_1, \ldots, x_r$ der Tarifmerkmale $X_1, \ldots, X_r$. Falls ein GLM mit Link-Funktion g in der Tarifierung eingesetzt wird, ist durch den bedingten Erwartungswert

$$\mu(x) := E[Y|X = x] = g^{-1}\big(\eta(x)\big)$$

ein Schätzer für den Erwartungswert der Schadenaufwendungen Y eines Risikos mit den (Tarifmerkmal-)Ausprägungen $x = (x_1, \ldots, x_r)$ gegeben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[5 Punkte]* Die Notwendigkeit der Bildung von Reserven in der Schadenreservierung ergibt sich daraus, dass sich in manchen Versicherungszweigen (der Schadenversicherung) der Prozess über

- die Entstehung eines Schadens,
- die Entdeckung,
- die Meldung,
- die administrative Erfassung,
- die Bewertung und (hier vor allem)
- bis hin zu der vollständigen und abschließenden Regulierung (Abwicklung) eines Schadens

über mehrere Jahre hinziehen kann.
Diese Notwendigkeit stellt sich grundsätzlich in allen Versicherungszweigen, vornehmlich in den Zweigen mit langer Schadenabwicklung, d. h. in dem sogenannten *long tail business*, etwa der Haftpflichtversicherung, weniger hingegen in der Kraftfahrzeugversicherung.

(b) *[5 Punkte]* Schadenquotenzuwächse sind – nomen est omen – die Zuwächse der Schadenquoten, also die (zufälligen) Größen

$$\frac{Z_{i,k}}{\pi_i} \quad, i, k = 0, \dots, n,$$

wobei die $Z_{i,k}$ die Zuwächse der Schadenstände und die π_i die Prämieneinnahmen des i-ten Anfalljahres sind.
Ein Abwicklungsmuster für diese Schadenquotenzuwächse unterstellt (üblicherweise), dass die Erwartungswerte (!) dieser relativen Kennzahlen anfalljahrunabhängig sind. Demnach gibt es Kennzahlen $\zeta_k, k = 0, \dots, n$, mit:

$$\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i} \quad, i, k = 0, \dots, n.$$

Insbesondere das Additive Verfahren basiert auf einem Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse.

(c) *[6 Punkte]* Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2018,3}}{S_{2018,2}} = \frac{165}{150} = 1{,}1$$

$$\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2018,2} + S_{2019,2}}{S_{2018,1} + S_{2019,1}} = \frac{150 + 201}{120 + 150} = \frac{351}{270} = 1{,}3$$

$$\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2018,1} + S_{2019,1} + S_{2020,1}}{S_{2018,0} + S_{2019,0} + S_{2020,0}} = \frac{120 + 150 + 498}{80 + 100 + 300} = \frac{768}{480} = 1{,}6$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2020,3}^{\mathrm{CL}} := S_{2020,1} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 498 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1 = 712{,}14 \approx 712{,}1$$

und

$$\widehat{S}_{2021,3}^{\mathrm{CL}} := S_{2021,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 400 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1 = 915{,}2$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus schließlich:

$$R_{2020}^{\mathrm{CL}} := \widehat{S}_{2020,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2020,1} = 712,1 - 498 = 214,1$$
$$R_{2021}^{\mathrm{CL}} := \widehat{S}_{2021,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2021,0} = 915,2 - 400 = 515,2$$

(d) *[2 Punkte]* Das LD-Verfahren kann als Grenzwert/Grenzverfahren des iterierten BF-Verfahrens aufgefasst werden. Der Einfluss der a-priori-Schätzer der erwarteten Endschadenstände des iterierten BF-Verfahrens wird im Rahmen der Iteration schrittweise eliminiert. Es verbleibt lediglich der Effekt der a-priori-Schätzer der Quoten des LD-Verfahrens.

(e) *[2 Punkte]* Stochastische verteilungsabhängige Modelle eröffnen die Möglichkeit, die Schätzqualität zu überprüfen (z. B. hinsichtlich Erwartungstreue). Es können qualifizierte Angaben zu den Prognosefehlern und Konfidenzintervalle für interessierende Größen abgeleitet werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) (i) *[2 Punkte]* Zyklenfreiheit bedeutet, dass die betrachtete Person nach dem Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit nicht mehr in die Hauptgesamtheit zurückkehren kann. In der Praxis ist diese Voraussetzung z.B. bei der Ausscheideursache „Invalidität“ im Falle der Reaktivierung (Wiedereingliederung) von Invaliden nicht erfüllt.

(ii) *[5 Punkte]* Als Beispiel einer einfachen Ordnung wird eine Gesamtheit von Lebenden betrachtet (Hauptgesamtheit). Die einzige Ausscheideursache ist der Tod. Als Beispiel einer zusammengesetzten Ausscheideordnung mit 2 Ausscheideursachen wird die Aktivengesamtheit betrachtet. In diesem Fall wird als Hauptgesamtheit der Bestand der „Aktiven“ betrachtet mit den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen „Invalidität“ und „Tod als Aktiver“.

(iii) *[2 Punkte]* Um die sogenannte „Zwillingsfreiheit“ zu erreichen, wird im Fall $X_1 = X_2$ durch Konvention festgelegt, dass die Ursache mit dem kleineren Index, also in diesem Fall die Ursache 1, zum Ausscheiden führt.

(b) *[3 Punkte]* Typische Rechnungsgrundlagen in der Personenversicherungsmathematik sind:

- biometrische Rechnungsgrundlagen
- Rechnungszins
- Kosten

(c) *[4 Punkte]* Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung sind diejenigen Werte, die einer erwarteten Entwicklung der betrachteten Größe entsprechen. Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung unterscheiden sich dadurch, dass sie vorsichtig unter Berücksichtigung von Sicherheitszu- oder -abschlägen gewählt werden.

Ein Beispiel für biometrische Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung sind die DAV 2004 R (dort: Tafeln 1. Ordnung). Ein Beispiel für biometrische Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung sind die Heubeck Richttafeln 2018 G.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) *[3 Punkte]* B stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zu zahlenden Witwenrente. Diese beginnt am Ende des Jahres des Todes des Mannes und endet am Beginn des Jahres des Todes der Witwe.

(b) *[3 Punkte]*

$$\mathbb{P}[M = m] = {}_m p_x \, q_{x+m}$$

mit

$${}_m p_x = \prod_{j=0}^{m-1} p_{x+j} = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - q_{x+j})$$

(c) *[2 Punkte]*

$$\mathbb{P}[N \geq n] = {}_n p_y$$

mit

$${}_n p_y = \prod_{j=0}^{n-1} p_{y+j} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_{y+j})$$

(d) *[6 Punkte]* Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n>m} \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \, \mathbb{P}[N = n] &= \sum_{n>m} \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \, \mathbb{P}[N = n] \\
&= \sum_{k \geq 0} v^k \sum_{n \geq m+k+1} \mathbb{P}[N = n] \text{ lt. Hinweis} \\
&= \sum_{k \geq 0} v^k \underbrace{\mathbb{P}[N \geq m+k+1]}_{= {}_{m+k+1}p_y = {}_{m+1}p_y \, {}_k p_{y+m+1}} \\
&= {}_{m+1}p_y \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_k p_{y+m+1} \\
&= {}_{m+1}p_y \, \ddot{a}_{y+m+1}
\end{aligned}$$

(e) *[6 Punkte]* Es gilt $\mathbb{E}[B] = \sum_{m,n \geq 0} b_{mn} \, \mathbb{P}[M = m, N = n]$, wobei

$$\begin{aligned}
b_{mn} &= v^{m+1} \, \ddot{a}_{\overline{n-m}|} \quad \text{f.} \quad n > m \\
&= 0 \quad \text{f.} \quad n \leq m
\end{aligned}$$

die Realisierungen von B sind.

Und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B] &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1}\, \ddot{a}_{\overline{n-m|}}\, \mathbb{P}[M=m, N=n] \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1}\, \ddot{a}_{\overline{n-m|}}\, \mathbb{P}[N=n]\mathbb{P}[M=m], \text{ da M,N unabhängig} \\
&= \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\, \mathbb{P}[M=m] \left(\sum_{n>m} \ddot{a}_{\overline{n-m|}}\, \mathbb{P}[N=n]\right)
\end{aligned}$$

Also folgt mit (d):

$$\mathbb{E}[B] = \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\ {}_{m}p_x\ q_{x+m}\ {}_{m+1}p_y\ \ddot{a}_{y+m+1}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

(a) *[8 Punkte]* Wesentliche Unterschiede zwischen der handelsbilanziellen und der steuerlichen Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen sind z. B. :

Differenzierungsmerkmal	Handelsbilanz	Steuerbilanz
Rechnungszins	Durchschnittlicher Marktzinssatz der vergangenen 10 Geschäftsjahre entsprechend der Restlaufzeit der Verpflichtungen	Rechnungszinsfuß von 6 % vorgeschrieben
Finanzierungsverfahren	Projected Unit Credit Methode oder (modifiziertes) Teilwertverfahren	Steuerliches Teilwertverfahren
Trendannahmen	Künftige dynamische Entwicklungen sind einzubeziehen	Künftige Erhöhungen sind nur einzubeziehen, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen
Fluktuation	Ist explizit bei der Bewertung zu berücksichtigen	Pauschale Berücksichtigung über Mindestalter

(b) *[6 Punkte]* Das steuerliche Teilwertverfahren lautet:

$$_mV_x = {}_mB_x^L - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m}^a$$
$$\text{mit } P_x = \frac{{}_0B_x^L}{\ddot{a}_x^a}$$

Das modifizierte Teilwertverfahren (nach Engbroks) lautet:

$$_mV_x = {}_mB_x^L - P_x^{mod} \cdot \ddot{a}_{x+m}^a$$
$$P_{xm}^{mod} = \frac{v^m \cdot {}_mB_x^L}{\ddot{a}_{\overline{m}|} + v^m \cdot \ddot{a}_{x+m}^a}$$

In die Ermittlung der Prämie beim modifizierten Teilwertverfahren fließt damit das Wissen ein, dass in der Zeit zwischen Finanzierungsbeginn (Eintrittsalter x) und Bilanzstichtag (Alter $x+m$) keine Versorgungsfälle eingetreten sind.

Beim steuerlichen Teilwertverfahren hingegen werden auch die aus Sicht des Finanzierungsbeginns möglichen Versorgungsfälle zwischen Finanzierungsbeginn und Bilanzstichtag berücksichtigt.

(c) *[4 Punkte]* Durch die Einführung einer Wartezeit ab Eintritt sinkt der Barwert der künftigen Leistungen ${}_0B_x^L$ im Eintrittsalter x. Somit sinkt beim steuerlichen Teilwertverfahren die Teilwertprämie P_x und damit steigt der Teilwert im Alter $x+m$, obwohl die Wartezeit bereits abgelaufen ist (sogenanntes Wartezeitparadoxon).

Beim modifizierten Teilwertverfahren nach Engbroks hängt ${}_mV_x$ nicht von ${}_0B_x^L$ ab, sondern von ${}_mB_x^L$. Damit taucht das Wartezeitparadoxon beim modifizierten Teilwertverfahren nach Engbroks nicht auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[4 Punkte]* Die Wahrscheinlichkeit ${}_2q_{65}$ kann bestimmt werden durch:

$$ {}_2q_{65} = 1 - {}_2p_{65} = 1 - p_{65} \cdot p_{66} = 1 - (1 - q_{65}) \cdot (1 - q_{66}) $$

Unter Berücksichtigung des Trendansatzes ergibt sich:

$$ \begin{aligned} q_{65} &= q_{65}^{\text{Basistafel}} \cdot \exp(-(2023 - 1999) \cdot F(65)) \\ &= 0{,}00483 \cdot \exp(-24 \cdot 0{,}02494674) \\ q_{66} &= q_{66}^{\text{Basistafel}} \cdot \exp(-(2024 - 1999) \cdot F(65)) \\ &= 0{,}005278 \cdot \exp(-25 \cdot 0{,}02535629) \end{aligned} $$

Daher ist:

$$ {}_2q_{65} = 1 - (1 - 0{,}002654151) \cdot (1 - 0{,}002800058) = 0{,}005447, $$

also 0,5447 Prozent.

(b) *[5 Punkte]* Es gilt:

$$ \begin{aligned} \ddot{a}_x &= \underbrace{1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{n-1}E_x}_{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + \ldots \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot (\underbrace{1 + {}_1E_{x+n} + {}_2E_{x+n} + \ldots}_{\ddot{a}_{x+n}}) \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n} \end{aligned} $$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass für eine natürliche Zahl j gilt:

$$ {}_{n+j}E_x = {}_nE_x \cdot {}_jE_{x+n}, $$

denn $v^{n+j} \cdot {}_{n+j}p_x = v^n \cdot {}_np_x \cdot v^j \cdot {}_jp_{x+n}$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[6 Punkte]* Die HGB-Deckungsrückstellung pro Vertrag ergibt sich zu:

$$12.120 \cdot \ddot{a}_{65}^{(4\,\%)} = 12.120 \cdot 17{,}64006 = 213.797{,}48,$$

d. h. für den gesamten Bestand:

$$213.797{,}48 \cdot 500 = 106.898.740$$

Unter Berücksichtigung des Bezugszinses für die ersten 15 Jahre ist:

$$12.120 \cdot \left(\ddot{a}_{65}^{(0{,}298\,\%)} + {}_{15}E_{65}^{(0{,}298\,\%)} \cdot \left(\ddot{a}_{80}^{(4\,\%)} - \ddot{a}_{80}^{(0{,}298\,\%)}\right)\right) = 305.889{,}48,$$

so dass sich insgesamt ein Sicherungsbedarf in Höhe von:

$$500 \cdot (305.889{,}48 - 213.797{,}48) = 46.046.002$$

ergibt.

(b) *[3 Punkte]* Wenn die Bewertungsreserven aus festverzinslichen Wertpapieren den Sicherungsbedarf übersteigen, dann werden die Rentenversicherungsverträge an den Bewertungsreserven (zum 31.12.2021) mindestens hälftig beteiligt, da dort das Ende der Ansparphase liegt. Für Bewertungsreserven aus Aktien, Immobilien, etc. ist die Höhe des Sicherungsbedarfs irrelevant.

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

[9 Punkte]

Risikolebensversicherung
Bei der Festlegung des Rechnungszinses einer Risikolebensversicherung muss das Versicherungsunternehmen insbesondere das Vorsichtsprinzip gemäß § 138 (1) VAG berücksichtigen. Die Orientierung am Höchstrechnungszins der DeckRV ist die übliche aktuarielle Praxis, allerdings kann – sofern das Vorsichtsprinzip eingehalten ist – für die Prämienkalkulation auch ein höherer Rechnungszins (als in der DeckRV für die Deckungsrückstellungen festgelegt) angesetzt werden. Auch die Ausscheideordnung und die Kosten sind unter Berücksichtigung des Vorsichtsprinzips festzulegen. Eine Festlegung in Höhe des besten Schätzwertes genügt gemäß DeckRV nicht.

Die Ausscheideordnung umfasst in der Regel Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten, die geschlechtsneutral festzulegen sind (vgl. § 19 (1) AGG sowie § 138 (2) VAG). Hier werden zunächst geschlechtsspezifische Werte ermittelt, die dann gemäß der Bestandszusammensetzung umgerechnet werden. Für die Sterbewahrscheinlichkeiten wird eine Periodensterbetafel (DAV 2008 T) inkl. Sicherheitszuschläge verwendet.

Die Kosten werden in Abschluss- und Verwaltungskosten untergliedert und fließen üblicherweise über einen parametrischen Ansatz in die Prämienkalkulation ein. Hier ist der Höchstzillmersatz aus § 4 (1) DeckRV zu beachten.

Private Krankheitskostenvollversicherung
Die Rechnungsgrundlagen einer privaten Krankheitskostenvollversicherung müssen sich – im Unterschied zur Risikolebensversicherung – insbesondere an den Vorgaben der Krankenversicherungsaufsichtsverordnung (KVAV) orientieren. Der Rechnungszins darf bspw. nicht mehr als 3,5 % betragen. In der Praxis ist der Aktuarielle Unternehmenszins (AUZ) zu kalkulieren. Der Rechnungszins orientiert sich am AUZ.

Auch für eine private Krankheitskostenvollversicherung kommen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten zum Einsatz. Typischerweise werden hier Sterbetafeln basierend auf PKV-Branchendaten verwendet. Dies sind Periodensterbetafeln mit Sicherheitsabschlägen.

Auch gibt es Vorgaben zu Kosten in der KVAV. Insbesondere sind die unmittelbaren Abschlusskosten in ihrer Höhe begrenzt (vgl. § 8 (3) KVAV) und es sind nur altersunabhängige absolute Kostenzuschläge (vgl. § 8 (4) KVAV) erlaubt (mit Ausnahmen). In der Praxis werden oft proportionale Zuschläge in einen altersunabhängigen absoluten Kostenzuschlag umgerechnet.

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

(a) *[4 Punkte]* Der tatsächliche Grundkopfschaden für das Jahr 2021 berechnet sich wie folgt:

$$\frac{58.800}{10 \cdot (0{,}72 + 1 + 1{,}28)} = \frac{58.800}{30} = 1.960$$

(b) *[4 Punkte]* Der Auslösende Faktor Schaden ergibt sich aus folgenden Berechnungen:

$$\frac{3}{2} \cdot (1.960 - 1.706) + \frac{1}{3} \cdot (1.706 + 1.805 + 1.960) = 2.205$$

und daher:

$$\frac{2.205}{1.800} = 1{,}225$$

Die erforderlichen Versicherungsleistungen haben die kalkulierten Versicherungsleistungen um 22,5 % überschritten.

(c) *[1 Punkt]* Eine Anpassung erfolgt beispielsweise insoweit nicht, als die Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt der Erst- oder einer Neukalkulation unzureichend kalkuliert waren und ein ordentlicher und gewissenhafter Aktuar dies insbesondere anhand der zu diesem Zeitpunkt verfügbaren statistischen Kalkulationsgrundlagen hätte erkennen müssen (vgl. § 155 (3) VAG).