DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14.10.2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 15 Seiten. Zusätzlich zu den 15 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoausgleich und Modelle der Risikotheorie] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen. Bitte notieren Sie Ihre Lösungen ausschließlich auf den Lösungsblättern.

(a) *[1 Punkt]* Eine *notwendige* Voraussetzung für den Ausgleich im Kollektiv ist [......] der Risiken. Vervollständigen Sie die Lücke [......] im vorherigen Satz.

(i) lediglich Homogenität

(ii) lediglich stochastische Unabhängigkeit

(iii) stochastische Unabhängigkeit und Homogenität

(iv) weder Homogenität noch stochastische Unabhängigkeit

(b) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt ein Kollektiv von Feuerrisiken in einem neu gebauten Wohngebiet identischer Mehrfamilienhäuser *zumindest in der Theorie*?

(i) Homogenität der Risiken

(ii) stochastische Unabhängigkeit der Risiken

(iii) Homogenität und stochastische Unabhängigkeit der Risiken

(iv) weder Homogenität noch stochastische Unabhängigkeit

(c) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Aussagen trifft *sowohl* für die Definition des individuellen *als auch* des kollektiven Modells der Risikotheorie zu?

(i) Betrachtung der Gesamtsumme aller Finanzaufwände eines Kollektivs

(ii) Betrachtung einer Zufallssumme (d. h. zufällige Anzahl Summanden)

(iii) Betrachtung kumulierter Finanzaufwände je Risiko

(iv) Betrachtung nur strikt positiver Summanden

(d) *[1 Punkt]* Welche Eigenschaft ist Grundvoraussetzung für die Wahl einer Verteilung bei der Modellierung der Höhe des Finanzaufwands eines Risikos X?

(i) nicht-negativer Wertebereich der Verteilung

(ii) endlicher Erwartungswert der Verteilung

(iii) endliche Varianz der Verteilung

(iv) Faltungsstabilität der Verteilung

(e) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Verteilungen wird *typischerweise nicht* für die Modellierung der Höhe des Finanzaufwands eines Risikos X herangezogen?

(i) Gamma-Verteilung

(ii) Lognormal-Verteilung

(iii) Poisson-Verteilung

(iv) Weibull-Verteilung

(f) *[1 Punkt]* Für welche Berechnung wird beim kollektiven Modell *typischerweise* unter anderem die *erste* Formel von Wald verwendet?

(i) Rekursionsformel für Anzahl der Finanzaufwände

(ii) Standardabweichung der Höhe eines einzelnen Finanzaufwands

(iii) Varianz der Anzahl der Finanzaufwände

(iv) Variationskoeffizient des Gesamtaufwands

(g) *[1 Punkt]* Für welche Berechnung wird in der Risikotheorie *typischerweise* die *zweite* Formel von Wald verwendet?

(i) erwarteter Gesamtaufwand im individuellen Modell

(ii) erwarteter Gesamtaufwand im kollektiven Modell

(iii) Varianz des Gesamtaufwands im individuellen Modell

(iv) Varianz des Gesamtaufwands im kollektiven Modell

(h) *[1 Punkt]* Wie hoch ist der erwartete Gesamtschaden in einem kollektivem Modell mit Anzahl $N \sim \mathrm{Poi}(8)$ und Höhe der Finanzaufwände $X \sim \mathrm{Exp}(0{,}002)$?

(i) 0,0016

(ii) 8,002

(iii) 320

(iv) 4.000

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Kalkulation von Prämien] [16 Punkte]*

Ein Erstversicherer hat einen neuen innovativen Versicherungsschutz entwickelt. Hierfür liegen dem Aktuariat zum Leistungsprozess $L_\bullet$ des Produkts folgende Annahmen vor:

- Versicherungsdauer $n = 2$ Jahre
- Zinssatz für Diskontierung $r = 1\%$
- Leistung $L_0 = 0$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $q_0 = 100\%$
- Leistung $L_1 = 80.000$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $q_1 = 0{,}8080\%$
- Leistung $L_2 = 100.000$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $q_2 = 1{,}0201\%$

Bearbeitungshinweise für Aufgabenteile (a) bis (c):
Ziel ist es, für das Produkt **Nettorisikoprämienprozesse** $P_\bullet$ zu ermitteln. Legen Sie in den Teilen (a) bis (c) jeweils die Rechenschritte bzw. Herleitung für jede Komponente von $P_\bullet$ dar. Als Ergebnis sind je Teilaufgabe (a) bis (c) der berechnete Prämienprozess in der Form $P_\bullet = (P_0;\, P_1;\, P_2)$ und der zugehörige Zeilenvektor $(w_0;\, w_1;\, w_2)$ der Wahrscheinlichkeiten der Prämienzahlung zu benennen.
Runden Sie bei Bedarf jede Komponente des Prämienprozesses $P_\bullet$ auf zwei Nachkommastellen und geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten exakt an. *Antwortbeispiel:*

$$P_\bullet = (88{,}00;\, 93{,}70;\, 99{,}75) \text{ mit Wkt. } (62{,}4\%;\, 90{,}031\%;\, 100\%)$$

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie für das gegebene Produktkonzept den Nettorisikoprämienprozess $P_\bullet$ für die **natürliche Prämie**. Beachten Sie o.g. Hinweise.

(b) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie für das gegebene Produktkonzept den Nettorisikoprämienprozess $P_\bullet$ bei **konstanter vorschüssiger Prämienzahlung** unter der **Nebenbedingung**, dass für das zweite Jahr die Zahlung nur dann erfolgt, wenn am Ende des ersten Jahres kein Leistungsfall eingetreten ist. Beachten Sie o.g. Hinweise.

(c) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie für das gegebene Produktkonzept den Nettorisikoprämienprozess $P_\bullet$ bei **konstanter vorschüssiger Prämienzahlung ohne die Nebenbedingung**, also unabhängig vom Eintritt eines Leistungsfalls am Ende des ersten Jahres. Beachten Sie o.g. Hinweise.

(d) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie verbal ohne Rechnung, wodurch sich im Rahmen der Prämienkalkulation die *Nettoprämie* und die *Bruttoprämie* jeweils von der *Nettorisikoprämie* unterscheiden?
Verwenden Sie entsprechende Fachbegriffe und gehen Sie bei Bedarf auf Besonderheiten verschiedener Teilgebiete der Versicherungsmathematik ein.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Risikoteilung] [12 Punkte]*

Ein Erstversicherer hat für seine beiden Sparten A und B proportionale Rückversicherung in Form von drei Summenexzedenten (kurz SX) gezeichnet. Hierzu liegen folgende Vertragsdaten vor:

- **SX Sparte A**: Maximum ${v_0}^{(A)} = 30$ u. Haftstrecke von $m^{(A)} = 2$ Maxima
- **1. SX Sparte B**: Maximum ${v_0}^{(B1)} = 5$ u. Haftstrecke von $m^{(B1)} = 4$ Maxima
- **2. SX Sparte B**: Maximum ${v_0}^{(B2)} = 25$ u. Haftstrecke von $m^{(B2)} = 1$ Maximum

Außerdem soll folgende Notation für die SX-Verträge gelten:

- v_i **Versicherungssumme** der (Erstversicherungs-)Police i **(**$i \in \mathbb{N}$**)**
- q_i **Quote** von Police i <u>ohne</u> Haftungsbegrenzung beim SX-Vertrag
- $q_i^{(m)}$ **Quote** von Police i bei Haftungsbegrenzung auf m Maxima des SX-Vertrags

(a) *[6 Punkte]* Für **Sparte A** werden Erstversicherungspolicen mit Versicherungssummen in Höhe von 60, 100 und 120 angeboten.
Berechnen Sie gemäß oben genannter Angaben für alle drei Versicherungssummen die **Quoten** q_i und $q_i^{(m)}$ für den SX-Vertrag für Sparte A als Prozentwerte. Verwenden Sie für Ihre Berechnungen eine Tabelle folgender Form:

i	v_i	(Berechnungsspalten)		q_i	$q_i^{(m)}$
1	60	...	...	...	...
2	100	...	...	...	...
3	120	...	...	...	...

(b) *[1 Punkt]* Prüfen Sie per Rechnung, ob für **Sparte B** die beiden SX-Verträge direkt aneinandergereiht sind.

(c) *[5 Punkte]* In **Sparte B** ist bei Police $i = 4$ mit einer Versicherungssumme von $v_4 = 30$ eine Versicherungsleistung in Höhe von $Y = 18$ eingetreten.
Zerlegen Sie diesen Finanzaufwand von $Y = 18$ in die Anteile des 1. und des 2. SX-Vertrages $\underline{\underline{Y}}^{(B1)}$ und $\underline{\underline{Y}}^{(B2)}$ und den verbleibenden Teil $\underline{Y}$ des Erstversicherers.

Aufgabe 4. *[Personenversicherungsmathematik, Prämien- und Leistungsbarwerte] [12 Punkte]*

Wir betrachten im allgemeinen Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematik eine zum Vertragsbeginn x-jährige Person einer Hauptgesamtheit bezüglich der h vorzeitige Ereignisse auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanwartschaften führen. Es bestehe folgende Verpflichtung:

- Bei Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit im Altersintervall $]x+m, x+m+1]$ aufgrund der Ausscheideursache i, $i = 1, \ldots, h$, wird die Reserve zum Ende des Jahres ${}_{m+1}V_x$ am Ende des Jahres ausgezahlt.
- Bei Erreichen der Altersgrenze z wird eine Altersleistung fällig, deren Barwert mit ${}_nL_x^{(0)}$ bezeichnet werde (mit $n = z - x$).

(a) *[8 Punkte]* Bekanntlich wird mit ${}_m\hat{L}_x$ der Erwartungswert der gesamten Leistung bezeichnet, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x + m, x + m + 1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres.
Geben Sie ${}_m\hat{L}_x, m = 0, 1, \ldots, n$, für die beschriebene Verpflichtung an und berechnen Sie die Prämie ${}_m\hat{P}_x, m = 0, 1, \ldots, n-1$.

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie nun die Sparprämie ${}_mP_x^S$ und die Risikoprämie ${}_mP_x^R$ für $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5. *[Personenversicherungsmathematik, Zustandsmodell, Ausscheideordnung] [22 Punkte]*

Wir betrachten eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod (sogenannte Aktivengesamtheit). Für einen x-jährigen Aktiven ($x \in \mathbb{N}_0$) betrachten wir die beiden stetigen reellwertigen Zufallsgrößen:

X_1: Alter bei Eintritt der Invalidität und
X_2: Alter bei Eintritt des Todes.

Wir definieren einen Zustandsraum $S = \{0, 1, 2\}$ mit der Bedeutung 2=„aktiv“, 1=„invalide“ und 0=„tot“ und einen stochastischen Prozess $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gemäß:

$$\begin{aligned} Z_t &= 0, \text{falls } X_2 \leq x + t \\ &= 1, \text{falls } X_1 \leq x + t, X_2 > x + t \\ &= 2, \text{falls } X_1 > x + t, X_2 > x + t \end{aligned}$$

(a) *[6 Punkte]* Wir betrachten für ein $t \in \mathbb{N}_0$ die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t) := \mathbb{P}[Z_{t+1} = j \mid Z_t = i]$, $i, j \in S$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $p_{00}(t)$, $p_{10}(t)$, $p_{11}(t)$, $p_{20}(t)$, $p_{21}(t)$ und $p_{22}(t)$ mit Hilfe von X_1 und X_2 an.

(b) *[7 Punkte]* Wir definieren für ein $t \in \mathbb{N}_0$ die Übergangsmatrix $Q_t := \left(p_{ij}(t) \right)_{0 \leq i,j \leq 2}$. Geben Sie die Übergangsmatrix Q_t unter Verwendung der üblichen versicherungsmathematischen Notation im Modell der Heubeck Richttafeln 2018 G für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ an.

(c) *[9 Punkte]* Berechnen Sie für ein $t \in \mathbb{N}_0$ das Produkt der Matrizen Q_t und Q_{t+1}, also $Q := Q_t \cdot Q_{t+1}$. Interpretieren Sie kurz die Bedeutung der einzelnen Elemente q_{ij}, $0 \leq i, j \leq 2$, der Matrix Q. Gehen Sie dabei auch explizit auf die Bedeutung der Einträge in der Diagonale ein.

Aufgabe 6. *[Pensionsversicherungsmathematik, Bevölkerungsmodell, Barwerte] [16 Punkte]*

Wir betrachten eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod (sogenannte Aktivengesamtheit).

(a) *[6 Punkte]* Geben Sie die drei Axiome an, welche üblicherweise bei diesem Bevölkerungsmodell in der Pensionsversicherungsmathematik (und damit insbesondere in den Heubeck Richttafeln 2018 G) zu Grunde gelegt werden.

(b) *[4 Punkte]* Auf Basis dieses Axiomensystems gilt bekanntlich unter gewissen Voraussetzungen der sogenannte Invarianzsatz. Wie lautet dieser?

(c) *[6 Punkte]* Beschreiben Sie für eine x-jährige Person, $x \in \mathbb{N}_0$, im Modell der Heubeck Richttafeln 2018 G die Bedeutung der Größen ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{i}$ und ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai}$, $t \in \mathbb{N}$. Gilt für diese beiden Größen der Invarianzsatz? (keine Begründung erforderlich)

Aufgabe 7. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Standardformeln] [11 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Sortieren Sie folgende Werte der Größe nach:

$$_{20}p_{40}, \quad _{40}p_{20}, \quad _{20}E_{40} \quad \text{und} \quad _{40}E_{20}.$$

Unterstellen Sie dabei, dass bei allen Werten die gleiche Sterbetafel und der gleiche Rechnungszins von $i = 0{,}25\,\%$ verwendet wird und, dass $_{20}p_{20} = 0{,}9822$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Sie erhalten Punkte für korrekte Begründungen.

(b) *[6 Punkte]* Wie können die Leistungsbarwerte $_{20}E_{40}$, $A_{40:\overline{20}|}$ und $_{20|}\ddot{a}_{40}$ ausschließlich mit einer Auswahl aus folgenden Leistungsbarwerten berechnet werden?

$$_{10}E_{40}, \ \ddot{a}_{50:\overline{10}|}, \ A_{50:\overline{10}|}, \ \ddot{a}_{50}, \ _{10}E_{50}, \ _{10}A_{40}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8. *[Lebensversicherungsmathematik, Überschüsse und Bewertungsreserven] [9 Punkte]*

Wenn ChatGPT (Version 3.5) aufgefordert wird, die Beteiligung an den Bewertungsreserven in der Lebensversicherung in Deutschland zu erläutern, dann erhält man folgenden Text:

JP Erläutere, wie Versicherungsnehmer:innen in der Lebensversicherung in Deutschland an den Bewertungsreserven beteiligt werden.

In Deutschland gibt es bei Lebensversicherungen die sogenannten Bewertungsreserven, die aus der Differenz zwischen dem Buchwert und dem aktuellen Marktwert der Vermögenswerte des Versicherungsunternehmens resultieren. Dies bedeutet, dass wenn der Marktwert der Vermögenswerte über dem Buchwert liegt, eine Bewertungsreserve entsteht.

Versicherungsnehmer:innen in der Lebensversicherung können an diesen Bewertungsreserven beteiligt werden. Dies geschieht in der Regel durch die Beteiligung an den stillen Reserven, die sich im Wert der Versicherungsverträge selbst befinden. Stillen Reserven sind die Differenz zwischen dem Buchwert und dem tatsächlichen Wert der Versicherungsverträge, die das Versicherungsunternehmen in seinem Portfolio hält.

Wenn ein Versicherungsunternehmen beschließt, die Bewertungsreserven an seine Versicherungsnehmer:innen weiterzugeben, geschieht dies in der Regel über eine Beteiligung an den stillen Reserven. Hierbei werden die Bewertungsreserven in Form von Zinsgutschriften auf den Sparanteil der Versicherungsverträge ausgeschüttet. Die Höhe der Zinsgutschrift richtet sich dabei nach der Höhe der stillen Reserven im Verhältnis zum Gesamtwert der Versicherungsverträge.

Es ist jedoch zu beachten, dass die Beteiligung an den Bewertungsreserven nicht verpflichtend ist und von Versicherungsunternehmen zu Versicherungsunternehmen unterschiedlich gehandhabt werden kann. Zudem kann es sein, dass Versicherungsunternehmen die Beteiligung an den Bewertungsreserven zeitweise oder vollständig aussetzen, falls sich die wirtschaftliche Lage ändert oder die Marktzinsen sinken.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(a) *[4 Punkte]* Identifizieren Sie zwei Aussagen von ChatGPT, die offensichtlich nicht korrekt oder unpräzise sind, und verbessern Sie diese Aussagen.

(b) *[3 Punkte]* Welche Besonderheit bei der Beteiligung an den Bewertungsreserven, auf die ChatGPT bei der Antwort nicht eingeht, ist bei festverzinslichen Wertpapieren zu beachten? Erläutern Sie diese Besonderheit.

(c) *[2 Punkte]* Wann ist ein Vertrag in der Regel anspruchsberechtigt für eine Beteiligung an den Bewertungsreserven?

Aufgabe 9. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Prämien] [11 Punkte]*

In einem PKV-Aktuariat ist folgender Ausschnitt eines Tabellenkalkulationsprogramms zu finden:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	G=	1.000,00				B	3.475,09			
2	i=	2%	v=	0,98039216		b	289,59			
3										
4	m	x+m	q	w	k	B	alpha	gamma	Delta	
5	0	40	0,000441	0,0207	1,000	3.475,09	75%	500,00	12%	0,00
6	1	41	0,000485	0,0196	1,033	3.475,09	0%	500,00	12%	
7	2	42	0,000536	0,0186	1,067	3.475,09	0%	500,00	12%	450,48
8	3	43	0,000592	0,0179	1,102	3.475,09	0%	500,00	12%	2.019,03
9	4	44	0,000650	0,0173	1,139	3.475,09	0%	500,00	12%	3.611,39
10	5	45	0,000715	0,0170	1,176	3.475,09	0%	500,00	12%	5.224,86
11	6	46	0,000795	0,0163	1,215	3.475,09	0%	500,00	12%	6.860,61
12	7	47	0,000896	0,0159	1,257	3.475,09	0%	500,00	12%	8.513,30
13	8	48	0,001021	0,0157	1,304	3.475,09	0%	500,00	12%	
14	9	49	0,001171	0,0157	1,354	3.475,09	0%	500,00	12%	11.862,82
15	10	50	0,001346	0,0161	1,409	3.475,09	0%	500,00	12%	13.556,96
16	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Die verschiedenen Zellen sind miteinander verknüpft. Die grau hinterlegten Werte sind fest eingetragene Werte.

(a) *[3 Punkte]* Wie hoch sind die einmalig einkalkulierten (gezillmerten) Abschlusskosten in Euro? Wie groß ist der Kopfschaden im Alter 50? Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbleibt eine 45-jährige Person ein Jahr gemäß der gezeigten Rechnungsgrundlagen im Bestand?

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die fehlenden Werte in den Zellen J6 und J13. Erläutern Sie etwaige Besonderheiten Ihrer Ergebnisse.

(c) *[4 Punkte]* Wie muss dieser Ausschnitt des Tabellenkalkulationsprogramms verändert werden, um $\ddot{a}_{40}$ berechnen zu können? Wie führen Sie die Berechnung nach Änderung des Ausschnitts im Tabellenkalkulationsprogramm konkret durch?

Aufgabe 10. *[Krankenversicherungsmathematik, „Altenproblem“] [9 Punkte]*

Wenn ChatGPT (Version 3.5) aufgefordert wird, das versicherungsmathematische Altenproblem in der Privaten Krankenversicherung in Deutschland zu erläutern, dann erhält man folgenden Text:

JP

Erkläre das versicherungsmathematische Altenproblem in der Privaten Krankenversicherung in Deutschland.

Das versicherungsmathematische Altenproblem in der privaten Krankenversicherung (PKV) bezieht sich auf die Herausforderungen, die sich aus der steigenden Lebenserwartung und der damit einhergehenden höheren Gesundheitsrisiken älterer Versicherter ergeben. Insbesondere geht es darum, die langfristigen Kosten der Gesundheitsversorgung älterer Versicherter korrekt zu kalkulieren und sicherzustellen, dass die Versicherungsunternehmen auch in Zukunft in der Lage sind, ihre Verpflichtungen zu erfüllen.

Im Gegensatz zur gesetzlichen Krankenversicherung (GKV) basiert die PKV auf dem Prinzip der Risikoselektion, d.h. die Versicherer können die Versicherten nach ihrem individuellen Risikoprofil tarifieren. Dies führt dazu, dass ältere Versicherte aufgrund ihrer höheren Gesundheitsrisiken im Allgemeinen höhere Beiträge zahlen müssen als jüngere Versicherte. Gleichzeitig haben ältere Versicherte oft auch höhere Leistungsansprüche, was das versicherungsmathematische Altenproblem verstärkt.

(a) *[4 Punkte]* Identifizieren Sie zwei Aussagen von ChatGPT, die offensichtlich nicht korrekt oder unpräzise sind, und verbessern Sie diese Aussagen.

(b) *[5 Punkte]* Welche Auswirkungen, auf die ChatGPT bei der Antwort nicht eingeht, hat das versicherungsmathematische Altenproblem auf eine Beitragsanpassung? Erläutern Sie diese Besonderheit ohne Berücksichtigung von Kosten. Quantifizieren Sie diesen Effekt an einem selbstgewählten fiktiven Zahlenbeispiel.

Aufgabe 11. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [12 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Welche Bedeutung hat die Versicherungssumme in der Schadenversicherung – insbesondere in Abgrenzung zur Lebensversicherung.

(b) *[5 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen		
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter	Dritter
1	01.01.	**30.09.**	100	18	6		
2	01.01.	**30.09.**	100	22			
3	01.01.	31.12.	300	30	11		
4	01.01.	31.12.	400	30	12	2	10
5	**01.07.**	31.12.	500	40	25		

Berechnen Sie den Schadendurchschnitt und die Schadenquote.

Hinweis: Die Fragen (c) und (d) beziehen sich nicht auf den konkreten in b) gegebenen Bestand.

(c) *[2 Punkte]* In einem Bestand eines Wohngebäudeversicherers unterschreitet die durchschnittliche Bruttorisikoprämie (= Erwartungswert + Sicherheitszuschlag) seit Jahren den Schadendurchschnitt. Beurteilen Sie diese Situation.

(d) *[3 Punkte]* Erläutern Sie den Unterschied zwischen Schadensatz und Schadengrad.

Aufgabe 12. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Kommentieren Sie die auf die Gegebenheiten der Tarifierung bezogene Aussage *„In Risikoklassen befinden sich Risiken mit identischen Verteilungen der Schadenkomponenten (Anzahlen, Einzelschadenhöhen, Gesamtschäden pro Risiko).“*

(b) *[5 Punkte]* Erläutern Sie den Begriff eines Marginalparameters im Kontext der Tarifierung.
Was haben Marginalparameter mit Ausgleichseffekten (Glättung) zu tun?

(c) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass das Marginalsummenverfahren (MSV) für den Spezialfall von zwei Tarifmerkmalen ($r = 2$) und für identische Volumenmaße $v_{i,j} = v \; \forall i, j$ mit dem Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten (MDV) übereinstimmt.

(d) *[4 Punkte]* Inwiefern sind Großschäden hinsichtlich der Methodik der Tarifierung mit besonderer Aufmerksamkeit zu berücksichtigen?
Benennen und erläutern Sie kurz Techniken, die in diesem Zusammenhang zur Verfügung stehen.

Aufgabe 13. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

Hinweise zu (a) und (b): Die Schätzer der Reserven und Prädiktoren sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

(a) *[8 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre $i = 2019, \ldots, 2022$ und für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$ die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ sowie die Prämieneinnahmen π_i:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2019	200	300	370	518	925
2020	100	200	430		575
2021	300	520			500
2022	300				1.100

Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2021 und 2022 mit dem Chain-Ladder-Verfahren (CL).
Interpretieren und beurteilen Sie den sich ergebenden Wert des CL-Faktors $\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}}$.

(b) (i) *[6 Punkte]* Schätzen Sie die Reserve (nur) für das Anfalljahr 2022 mit dem Additiven Verfahren unter Verwendung der Prämien als Volumenmaße.

(ii) *[3 Punkte]* Schätzen Sie mit den Größen des Additiven Verfahrens die Endschadenquote dieses Bestandes (ohne Nachlauf).

(c) *[3 Punkte]* Was verstehen Sie darunter, wenn *„Basisverfahren der Reservierung durch stochastische Modellierung erweitert werden“*?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a) *[1 Punkt]* (iv)

(b) *[1 Punkt]* (i)

(c) *[1 Punkt]* (i)

(d) *[1 Punkt]* (i)

(e) *[1 Punkt]* (iii)

(f) *[1 Punkt]* (iv)

(g) *[1 Punkt]* (iv)

(h) *[1 Punkt]* (iv)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[3 Punkte]*

Für die natürliche Prämie gilt per definitionem $P_t := \mathrm{E}(L_t) \quad (0 \le t \le 2)$. Somit liefert der gegebene Leistungsprozess folgende Prämienkomponenten:

$$P_0 = \mathrm{E}(L_0) = q_0 \cdot L_0 = 0$$
$$P_1 = \mathrm{E}(L_1) = q_1 \cdot L_1 = 0{,}00808 \cdot 80.000 = 646{,}40$$
$$P_2 = \mathrm{E}(L_2) = q_2 \cdot L_2 = 0{,}010201 \cdot 100.000 = 1.020{,}10$$

In der geforderten Darstellung lautet das Ergebnis:

$$P_\bullet = (0{,}00;\ 646{,}40;\ 1.020{,}10) \text{ mit Wkt. } (100\%;\ 100\%;\ 100\%)$$

(b) *[5 Punkte]*

Der erwartete Prämienbarwert einer konstanten Nettorisikoprämie $\bar{P}$ bei vorschüssiger Zahlung <u>mit</u> Nebenbedingung lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P) &= 1 \cdot \mathrm{E}(P_0) + \frac{1}{1{,}01} \cdot \mathrm{E}(P_1) + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot \mathrm{E}(P_2) \\ &= 1 \cdot 100\% \cdot \bar{P} + \frac{1}{1{,}01} \cdot (1 - q_1) \cdot \bar{P} + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot 100\% \cdot 0 \\ &= \bar{P} + \frac{0{,}99192}{1{,}01} \cdot \bar{P} + 0 = \bar{P} \cdot \left(1 + \frac{0{,}99192}{1{,}01}\right)\end{aligned}$$

Für den erwarteten Leistungsbarwert folgt mit den Werten aus Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= 0 + \frac{1}{1{,}01} \cdot \mathrm{E}(L_1) + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot \mathrm{E}(L_2) \\ &= \frac{1}{1{,}01} \cdot 646{,}40 + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot 1.020{,}10 = 640 + 1.000 = 1.640\end{aligned}$$

Aus dem Äquivalenzprinzip folgt somit:

$$\bar{P} \cdot \left(1 + \frac{0{,}99192}{1{,}01}\right) = 1.640 \qquad \Rightarrow \bar{P} = \frac{1.640}{1 + \frac{0{,}99192}{1{,}01}} \approx 827{,}4056905$$

In der geforderten Darstellung lautet das Ergebnis:

$$P_\bullet \approx (827{,}41;\ 827{,}41;\ 0{,}00) \text{ mit Wkt. } (100\%;\ 99{,}192\%;\ 100\%)$$

(c) *[4 Punkte]*

Der erwartete Prämienbarwert einer konstanten Nettorisikoprämie $\bar{P}$ bei vorschüssiger Zahlung <u>ohne</u> Nebenbedingung lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(P) &= 1 \cdot \mathrm{E}(P_0) + \frac{1}{1{,}01} \cdot \mathrm{E}(P_1) + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot \mathrm{E}(P_2) \\
&= 1 \cdot 100\% \cdot \bar{P} + \frac{1}{1{,}01} \cdot 100\% \cdot \bar{P} + \frac{1}{1{,}01^2} \cdot 100\% \cdot 0 \\
&= \bar{P} + \frac{1}{1{,}01} \cdot \bar{P} + 0 = \bar{P} \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}01}\right)
\end{aligned}$$

Für den erwarteten Leistungsbarwert gilt gemäß Teilaufgabe (b):

$$\mathrm{E}(L) = 1.640$$

Aus dem Äquivalenzprinzip folgt somit:

$$\bar{P} \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}01}\right) = 1.640 \qquad \Rightarrow \bar{P} = \frac{1.640}{1 + \frac{1}{1{,}01}} \approx 824{,}07960199$$

In der geforderten Darstellung lautet das Ergebnis:

$$P_\bullet \approx (824{,}08;\ 824{,}08;\ 0{,}00) \text{ mit Wkt. } (100\%;\ 100\%;\ 100\%)$$

(d) *[4 Punkte]*

Die *Nettoprämie* enthält zusätzlich zur *Nettorisikoprämie* Sicherheitszuschläge, wobei zwei Vorgehensweisen zu unterscheiden sind. Im Bereich der Schadenversicherung werden typischerweise explizite Sicherheitszuschläge auf die *Nettorisikoprämie* addiert und diese *Bruttorisikoprämie* entspricht dann der *Nettoprämie*. Im Bereich der Personenversicherung wird typischerweise bereits bei der Ermittlung der *Nettorisikoprämie* mit impliziten Sicherheitszuschlagen in den Rechnungsgrundlagen, z.B. Zins und Eintrittswahrscheinlichkeiten des Leistungsfalls, gerechnet, so dass diese *Nettorisikoprämie* inkl. Sicherheitszuschlägen bereits der *Nettoprämie* entspricht. Die *Bruttoprämie* enthält zusätzlich zur *Nettoprämie* noch Kosten für die Risikoübernahme durch den Versicherer und Sicherheitszuschläge auf diese Kosten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) *[6 Punkte]*
Für ${v_0}^{(A)} = 30$ und $m^{(A)} = 2$ gilt:

i	v_i	$\left(v_i - {v_0}^{(A)}\right)^+ =: a$	$m^{(A)} \cdot {v_0}^{(A)} =: b$	$\min\{a; b\} =: c$	$q_i = \frac{a}{v_i}$	$q_i^{(m)} = \frac{c}{v_i}$
1	60	30	60	30	50%	50%
2	100	70	60	60	70%	60%
3	120	90	60	60	75%	50%

(b) *[1 Punkt]*
Die mit dem 1. SX-Vertrag erreichte Zeichnungskapazität des Erstversicherers beträgt

$$ {v_0}^{(B1)} + m^{(B1)} \cdot {v_0}^{(B1)} = \left(m^{(B1)} + 1\right) \cdot {v_0}^{(B1)} = (4+1) \cdot 5 = 25 = {v_0}^{(B2)} $$

und entspricht somit gerade dem Maximum von 25 des 2. SX-Vertrages. Also sind die beiden SX-Verträge für Sparte B direkt aneinander gereiht.

(c) *[5 Punkte]*
Für die Quote des 1. SX-Vertrages von Police $i = 4$ gilt:

$$ q_4^{\left(m^{(B1)}\right)} = \min\left\{\left(\frac{v_4 - {v_0}^{(B1)}}{v_4}\right)^+ ; \frac{m^{(B1)} \cdot {v_0}^{(B1)}}{v_4}\right\} = \min\left\{\left(\frac{30-5}{30}\right)^+ ; \frac{4 \cdot 5}{30}\right\} = \frac{2}{3} $$

Analog gilt für die Quote des 2. SX-Vertrages von Police $i = 4$:

$$ q_4^{\left(m^{(B2)}\right)} = \min\left\{\left(\frac{v_4 - {v_0}^{(B2)}}{v_4}\right)^+ ; \frac{m^{(B2)} \cdot {v_0}^{(B2)}}{v_4}\right\} = \min\left\{\left(\frac{30-25}{30}\right)^+ ; \frac{1 \cdot 25}{30}\right\} = \frac{1}{6} $$

Somit folgt für die Zerlegung des Finanzaufwands von $Y = 18$:

$$ \underline{\underline{Y}}^{(B1)} = q_4^{\left(m^{(B1)}\right)} \cdot Y = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12 $$

$$ \underline{\underline{Y}}^{(B2)} = q_4^{\left(m^{(B2)}\right)} \cdot Y = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3 $$

$$ \underline{Y} = Y - \underline{\underline{Y}}^{(B1)} - \underline{\underline{Y}}^{(B2)} = 3 $$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) *[8 Punkte]* Es gilt:

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{L}_x &= \sum_{i=1}^{h} v \, {}_{m+1}V_x \, q_{x+m}^{(i)} \quad \text{für } m < n \\
{}_m\hat{L}_x &= {}_nL_x^{(0)} \quad \text{für } m = n.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung folgt für $m < n$:

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x + {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v \, p_{x+m} \, {}_{m+1}V_x \\
&= \sum_{i=1}^{h} v \, {}_{m+1}V_x \, q_{x+m}^{(i)} \\
&\quad + v \left(1 - \sum_{i=1}^{h} q_{x+m}^{(i)}\right) {}_{m+1}V_x \\
&= v \, {}_{m+1}V_x
\end{aligned}
$$

Und somit gilt: ${}_m\hat{P}_x = v \, {}_{m+1}V_x - {}_mV_x$

(b) *[4 Punkte]* Es gilt ${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R$ und ${}_mP_x^S = v \, {}_{m+1}V_x - {}_mV_x$.
Damit folgt ${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S$ und ${}_mP_x^R = 0$.
Interpretation: Die gesamte Prämie steht für den Aufbau der Reserve zur Verfügung, es handelt es sich somit um einen reinen Sparprozess.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) *[6 Punkte]* Die Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe von X_1 und X_2 wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}
p_{00}(t) &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+t+1 \mid X_2 \leq x+t] \\
p_{10}(t) &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+t+1 \mid X_1 \leq x+t, X_2 > x+t] \\
p_{11}(t) &= \mathbb{P}[X_1 \leq x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 \leq x+t, X_2 > x+t] \\
p_{20}(t) &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t] \\
p_{21}(t) &= \mathbb{P}[X_1 \leq x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t] \\
p_{22}(t) &= \mathbb{P}[X_1 > x+t+1, X_2 > x+t+1 \mid X_1 > x+t, X_2 > x+t]
\end{aligned}$$

(b) *[7 Punkte]* In der üblichen versicherungsmathematischen Notation im Modell der Heubeck Richttafeln 2018 G lautet die Übergangsmatrix:

$$Q_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q^i_{x+t} & p^i_{x+t} & 0 \\ q^a_{x+t} & p^{ai}_{x+t} & p^a_{x+t} \end{pmatrix}$$

(c) *[9 Punkte]* Basierend auf (b) ergibt sich für $Q = Q_t \cdot Q_{t+1}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q^i_{x+t} + p^i_{x+t} \cdot q^i_{x+t+1} & p^i_{x+t} \cdot p^i_{x+t+1} & 0 \\ q^a_{x+t} + p^{ai}_{x+t} \cdot q^i_{x+t+1} + p^a_{x+t} \cdot q^a_{x+t+1} & p^{ai}_{x+t} \cdot p^i_{x+t+1} + p^a_{x+t} \cdot p^{ai}_{x+t+1} & p^a_{x+t} \cdot p^a_{x+t+1} \end{pmatrix}$$

Interpretation: Offenbar ist Q eine Matrix, deren Elemente q_{ij} jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Zustand $i \in S$ zum Zeitpunkt t zum Zustand $j \in S$ zum Zeitpunkt $t+2$ angeben. Die Einträge in der Diagonale q_{ii}, $0 \leq i \leq 2$, geben dabei die jeweiligen Verbleibewahrscheinlichkeiten in den Zuständen aktiv ($i = 2$), invalide ($i = 1$) und tot ($i = 0$) an.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[6 Punkte]* Die Axiome lauten wie folgt:

- Die Austrittszeitpunkte aus dem Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestand sind innerhalb des Jahres gleichverteilt.
- Die Verzinsung innerhalb des Jahres erfolgt banküblich, d.h. linear, die Zinsgutschrift erfolgt also erst zum Ende des Jahres (Gemischte Verzinsung).
- Die Zahlungen der Renten erfolgen determiniert zum Beginn bzw. Ende der Zahlungsabschnitte, zu deren Beginn bzw. Ende ein Anspruch besteht (Determinierte Fälligkeit der Rentenzahlungen).

(b) *[4 Punkte]* Bei Anwartschaften auf Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe gilt der Invarianzsatz, der wie folgt lautet:
Auf der Basis des Axiomensystems hängen Anwartschaftsbarwerte von Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe nicht von der Zahlungsweise ab, wenn sowohl der Zeitpunkt des die Rente auslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendigenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind.

(c) *[6 Punkte]* ${}^{(t)}\ddot{a}_x^i$ beschreibt den Barwert des Anspruchs eines Invalidenrentners ($x \leq z$) auf eine lebenslänglich laufende Rente, jährlich in t Raten vom Betrag $1/t$ jeweils zum Beginn des Ratenzeitraums (also vorschüssig) zahlbar. Der Invarianzsatz ist nicht auf ${}^{(t)}\ddot{a}_x^i$ anwendbar, da er nur für Anwartschaftsbarwerte von Renten gilt, bei denen das auslösende Ereignis gleichverteilt ist. Diese Voraussetzung ist bei einer laufenden Rente nicht erfüllt. Diese Begründung war aber nicht verlangt.
${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai}$ beschreibt den Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters x auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in t Raten p.a. Für ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai}$ gilt der Invarianzsatz, d.h. es gilt ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^{ai}$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) *[5 Punkte]* Die richtige Reihenfolge lautet:

$$ {}_{40}E_{20} < {}_{20}E_{40} < {}_{40}p_{20} < {}_{20}p_{40}. $$

- Die Ungleichung ${}_{40}E_{20} < {}_{20}E_{40}$ gilt, da

$$ {}_{40}E_{20} = v^{40} \cdot {}_{40}p_{20} = v^{20} \cdot {}_{20}p_{20} \cdot {}_{20}E_{40} < {}_{20}E_{40}. $$

- Die Ungleichung ${}_{40}p_{20} < {}_{20}p_{40}$ gilt, da ${}_{40}p_{20} = {}_{20}p_{20} \cdot {}_{20}p_{40}$ und ${}_{20}p_{20} < 1$ nach Voraussetzung.

- Die Ungleichung ${}_{20}E_{40} = v^{20} \cdot {}_{20}p_{40} < {}_{40}p_{20}$ gilt, da:

$$ {}_{20}p_{20} \cdot {}_{20}E_{40} = v^{20} \cdot {}_{40}p_{20} \iff {}_{20}E_{40} = \frac{v^{20}}{{}_{20}p_{20}} \cdot {}_{40}p_{20} $$

  und $\frac{v^{20}}{{}_{20}p_{20}} = \frac{1{,}0025^{-20}}{0{,}9822} \approx 0,9685 < 1$ nach Voraussetzung.

(b) *[6 Punkte]*

- Es gilt:

$$ {}_{20}E_{40} = {}_{10}E_{40} \cdot {}_{10}E_{50}. $$

- Außerdem ist:

$$ A_{40:\overline{20}|} = {}_{20}E_{40} + {}_{20}A_{40}. $$

  Für ${}_{20}A_{40}$ gilt:

$$ {}_{20}A_{40} = {}_{10}A_{40} + {}_{10}E_{40} \cdot {}_{10}A_{50}. $$

  Ingesamt können wir schlussfolgern:

$$ \begin{aligned} A_{40:\overline{20}|} &= {}_{10}E_{40} \cdot {}_{10}E_{50} + {}_{10}A_{40} + {}_{10}E_{40} \cdot {}_{10}A_{50} \\ &= {}_{10}E_{40} \cdot ({}_{10}E_{50} + {}_{10}A_{50}) + {}_{10}A_{40} \\ &= {}_{10}E_{40} \cdot A_{50:\overline{10}|} + {}_{10}A_{40} \end{aligned} $$

- Der letzte Leistungsbarwert kann wie folgt mit den gegebenen Größen kalkuliert werden:

$$ \begin{aligned} {}_{20|}\ddot{a}_{40} &= {}_{10}E_{40} \cdot {}_{10|}\ddot{a}_{50} \\ &= {}_{10}E_{40} \cdot (\ddot{a}_{50} - \ddot{a}_{50:\overline{10}|}). \end{aligned} $$

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) *[4 Punkte]* Verschiedene Aussagen sind fehlerhaft bzw. unpräzise:

- „... Differenz zwischen dem Buchwert und dem aktuellen Marktwert der Vermögenswerte“: Diese Formulierung ist unpräzise, denn positive Bewertungsreserven ergeben sich aus der Differenz zwischen Marktwert und Buchwert.

- „... den stillen Reserven, die sich im Wert der Versicherungsverträge selbst befinden“: Diese Formulierung ist unpräzise und unklar.

- „... dass die Beteiligung an den Bewertungsreserven nicht verpflichtend ist“: Diese Aussage ist – im Falle von überschussberechtigten Verträgen – falsch, vgl. §153 (1) VVG.

(b) *[3 Punkte]* ChatGPT berücksichtigt bei der Antwort nicht den Sicherungsbedarf. Die Beteiligung an den Bewertungsreserven aus festverzinslichen Wertpapieren erfolgt nur, wenn der Sicherungsbedarf überschritten wird (vgl. § 139 (3) VAG).

(c) *[2 Punkte]* Anspruchsberechtigt sind in der Regel Verträge der kapitalbildenden Lebens- und Rentenversicherung, während Versicherungen, die mit der Deckungsrückstellung lediglich den Risikoverlauf glätten, wie z. B. Risikolebensversicherungen, oder fondsgebundene Versicherungen nicht anspruchsberechtigt sind.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

(a) *[3 Punkte]*

- Die gesuchten Abschlusskosten betragen:

$$0{,}75 \cdot 3.475{,}09 \text{ Euro} = 2.606{,}32 \text{ Euro}$$

- Der Kopfschaden im Alter 50 beträgt:

$$1{,}409 \cdot 1.000{,}00 \text{ Euro} = 1.409{,}00 \text{ Euro}$$

- Die einjährige Verbleibewahrscheinlichkeit einer 45-jährigen Person ist:

$$1 - 0{,}000715 - 0{,}0170 = 0{,}982285 \quad \text{also } 98{,}2285 \text{ Prozent.}$$

(b) *[4 Punkte]* Mit der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung erhalten wir in Zelle J6:

$$\begin{aligned}&\frac{1,02}{1 - 0{,}000441 - 0{,}0207} \cdot (0 + 3.475{,}09 \cdot (1 - 0{,}12) \ldots \\ &\qquad \ldots - 500{,}00 - 1.000{,}00 - 2.606{,}32) = -1.092{,}30.\end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

$$\begin{aligned}&1.033 + 500,00 - (1 - 0,12) \cdot 3.475,09 + \ldots \\ &\qquad (1 - 0,000485 - 0,0196) \cdot 450,48/1,02 = -1.092,30.\end{aligned}$$

Für Zelle J13 gilt:

$$\begin{aligned}10.181,67 &= \frac{1,02}{1 - 0,000896 - 0,0159} \cdot (8.513,30 + \ldots \\ &\qquad \ldots 3.475,09 \cdot (1 - 0,12) - 500,00 - 1.257,00) \\ &= 1.304,00 + 500,00 - (1 - 0,12) \cdot 3.475,09 + \ldots \\ &\qquad \ldots (1 - 0,001021 - 0,0157) \cdot 11.862,82/1,02\end{aligned}$$

(c) *[4 Punkte]* Es müssen verschiedene Anpassungen durchgeführt werden:

- Spalte E ab Zeile 5 den Wert 0 eintragen
- Spalte F ab Zeile 5 den Wert -1 eintragen
- Spalte G, H und I ab Zeile 5 den Wert 0 eintragen

Nach diesen Anpassungen steht in der Zelle J5 der Wert für $\ddot{a}_{40}$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[4 Punkte]* Das versicherungsmathematische Altenproblem resultiert aus der Tatsache, dass der Ausgleich in der Zeit zu einem späteren Zeitpunkt als der Vertragsbeginn oder die letzte Beitragsanpassung aufgrund der geringeren erwarteten Restlaufzeit (bedingt durch ein höheres Alter) schlechter funktioniert und in überproportionalen Beitragssteigerungen (im Vergleich zu steigenden Kopfschäden) resultiert. Die „höheren Gesundheitsrisiken älterer Versicherter“ oder die „die langfristigen Kosten der Gesundheitsversorgung älterer Versicherter“ sind nicht unmittelbar mit dem versicherungsmathematischen Altenproblem gemeint. Auch die Aussagen zur Risikoselektion treffen nicht zu, da das „individuelle Risikoprofil“ nur sehr grob abgeschätzt wird (auch wenn „risikogerechte Prämien“ in der PKV kalkuliert werden). Die Diskrepanz in Bezug auf die Beiträge ist auch nicht präzise formuliert worden.

(b) *[5 Punkte]* Die Beitragssteigerung fällt in der Regel überproportional aus. Wenn der Nettojahresbeitrag vor Beitragsanpassung bspw. 2.000 Euro beträgt und die Kopfschäden um 15 % steigen, dann beträgt die Beitragssteigerung mehr als 15 %; der Beitrag steigt nämlich um zusätzlich 15 % der Differenz aus Neugeschäftsprämie (zum erreichten Alter) mit den alten Rechnungsgrundlagen, bspw. 2.400 Euro, und Nettojahresbeitrag (vor Beitragsanpassung), also zusätzlich $15\,\% \cdot (2.400 \text{ Euro} - 2.000 \text{ Euro}) = 600$ Euro.

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[2 Punkte]* Die Versicherungssumme (VS) stellt in der Schadenversicherung die Höchstgrenze der Entschädigung (E) dar. In der Regel sind die Versicherungsleistungen in der Schadenversicherung deutlich geringer als die Versicherungssummen, während in der Lebensversicherung – etwa in der Risikolebensversicherung – häufig im Versicherungsfall die Versicherungssumme gezahlt wird, also VS = E gilt.
(Die Kennzahlen Schadensatz und Schadengrad gehen auf das Verhältnis der Entschädigungen zu den Versicherungssummen ein. Sie weisen regelmäßig Werte unter 10% auf und werden meist in Promille angegeben.)

(b) *[2+3 = 5 Punkte]* Es sind $N = 6$ Schäden eingetreten. Die Summe dieser (Einzel-)Schäden ist der Gesamtschaden

$$S = 6 + 11 + 12 + 2 + 10 + 25 = 66\,.$$

Der Schadendurchschnitt ist somit

$$SD = \frac{S}{N} = \frac{66}{6} = 11\,.$$

Für die Schadenquote ist die Summe der verdienten Beiträge zu berechnen:

$$b = 18 \cdot 0{,}75 + 22 \cdot 0{,}75 + 30 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 0{,}50 = 110\,.$$

Die Schadenquote ist somit:

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{66}{110} = 60\%.$$

(Die Versicherungssummen gehen nicht in die hier gefragten Kennzahlen ein.)

(c) *[2 Punkte]* Dass die durchschnittliche (Bruttorisiko-)Prämie den Schadendurchschnitt unterschreitet, ist eher typisch und nicht offensichtlich kritisch. Man beachte, dass die (erwartete) Schadenanzahl den Schadendurchschnitt kaum beeinflusst, wohl aber in die Prämie eingeht.
(Beispielsweise in der Kfz-Haftpflichtversicherung (PKW) liegt der Schadendurchschnitt bei ca. 4.000 EUR, die durchschnittliche Prämie aber unter 1.000 EUR).

(d) *[3 Punkte]* Sowohl der Schadensatz (SS) als auch der Schadengrad (SG) bewerten das Verhältnis von Schäden (Entschädigungen) zu Versicherungssummen (Höchstentschädigungen). Während in den Schadengrad im Wesentlichen

keine Überlegungen zur Größe des Bestandes und den schadenfreien Verträgen eingehen, sondern eine Mittelwertbildung über die eingetretenen Einzelschadenereignisse vorgenommen wird, berücksichtigt der Schadensatz dies in Form der Schadenhäufigkeit (H) und ist insofern eher als Bestandskennzahl anzusehen.
(Es gilt die Beziehung $SS = H \cdot SG$.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) *[3 Punkte]* Die Aussage ist im engen Sinne in aller Regel falsch, denn in der Realität ist es nahezu ausgeschlossen, dass zwei (oder gar noch mehr) Risiken identische Verteilungen aufweisen. Allerdings bestehen Risikoklassen in der Tarifierung gemäß Definition aus Risiken, die bei sämtlichen Tarifmerkmalen die gleichen Ausprägungen aufweisen. Im Sinne einer (Arbeits-)Hypothese wird für diese (dann homogenen) Risiken angenommen, dass sie gleiche Verteilungen aufweisen (und ihnen also gleiche Prämien zugeordnet werden).

(b) *[3+2 = 5 Punkte]* Marginalparameter repräsentieren in Tarifierungsmodellen die mittleren Einflüsse der verschiedenen Ausprägungen der einzelnen (deshalb „marginalen“) Tarifmerkmale. Sie werden im Rahmen von Tarifierungsverfahren geschätzt.
Marginalparameter in additiven bzw. multiplikativen Modellen werden als Marginalsummanden bzw. Marginalfaktoren bezeichnet. Beide sind i. A. nicht eindeutig bestimmt.
Durch den Ansatz von Marginalparametern geht man quasi von der Betrachtung aller Tarifzellen (Anzahl = Produkt der Anzahlen der Ausprägungen aller Merkmale) auf die meist deutlich kleinere Summe dieser Anzahlen der Ausprägungen über. Durch diese Konzentration wirkt man dem Overfitting entgegen und glättet den Tarifierungsansatz.

(c) *[10 Punkte]* Es wird gezeigt, dass – mit den üblichen Bezeichnungen – für identische Volumenmaße $v_{i,j} = v, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q,$ die normierten Marginaldurchschnitte

$$x_i := \frac{sb_{i\circ}}{sb}, i = 1, .., p; \quad y_j := \frac{sb_{\circ j}}{sb}, j = 1, .., q,$$

mit

$$sb_{i\circ} := \frac{s_{i\bullet}}{v_{i\bullet}}, i = 1, .., p; \quad sb_{\circ j} := \frac{s_{\bullet j}}{v_{\bullet j}}, j = 1, .., q; \quad sb := \frac{s_{\bullet\bullet}}{v_{\bullet\bullet}}$$

die Marginalsummengleichungen des MSV erfüllen:

$$\begin{aligned}
sb \cdot x_i \cdot \sum_{j=1}^{q} v_{i,j} \cdot y_j &= sb \cdot \frac{sb_{i\circ}}{sb} \cdot \sum_{j=1}^{q} v \cdot \frac{sb_{\circ j}}{sb} \\
&= \frac{s_{i\bullet}}{v_{i\bullet}} \cdot \frac{v}{sb} \cdot \sum_{j=1}^{q} \frac{s_{\bullet j}}{v_{\bullet j}} \\
&= \frac{s_{i\bullet}}{q \cdot v} \cdot \frac{v}{p \cdot v} \cdot \frac{1}{sb} \cdot \sum_{j=1}^{q} s_{\bullet j} \\
&= \frac{s_{i\bullet}}{p \cdot q \cdot v} \cdot \frac{1}{sb} \cdot s_{\bullet\bullet} \\
&= \frac{s_{i\bullet}}{v_{\bullet\bullet}} \cdot \frac{1}{sb} \cdot s_{\bullet\bullet} = s_{i\bullet} \quad , i = 1, \dots, p.
\end{aligned}$$

Analog gilt:

$$sb \cdot y_j \cdot \sum_{i=1}^{p} v_{i,j} \cdot x_i = s_{\bullet j} \quad , j = 1, \ldots, q.$$

(d) *[2+2 = 4 Punkte]* Großschäden sind naturgemäß unangenehm und belasten die Profitabilität der Versicherer. Im Kontext der Tarifierungsmethoden geht es aber auch um die Frage, ob und inwieweit Großschadendaten vorab aufbereitet werden sollten, um unerwünschte Effekte (Verzerrungen, übermäßige quadratische Abstände etc.) zu reduzieren. Bei der sogenannten Kupierung werden Schäden an bestimmten (Kupierungs-)Grenzen „gestutzt" bzw. „abgeschnitten", d. h. pro Schaden stellt die Kupierungsgrenze die maximale Höhe dar, mit der Schadenaufwendungen in den weiteren Analysen berücksichtigt werden. Diese z. T. erheblichen Kürzungen werden nach der Anwendung der Verfahren durch die sogenannte Umverteilung wieder in die Prämienkalkulation reintegriert.

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

(a) *[6+2 = 8 Punkte]* Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2019,3}}{S_{2019,2}} = \frac{518}{370} = 1{,}4$$
$$\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2019,2}+S_{2020,2}}{S_{2019,1}+S_{2020,1}} = \frac{370+430}{300+200} = \frac{800}{500} = 1{,}6$$
$$\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}} := \frac{S_{2019,1}+S_{2020,1}+S_{2021,1}}{S_{2019,0}+S_{2020,0}+S_{2021,0}} = \frac{300+200+520}{200+100+300} = \frac{1.020}{600} = 1{,}7$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2021,3}^{\mathrm{CL}} := S_{2021,1}\cdot\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}}\cdot\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 520\cdot 1{,}6\cdot 1{,}4 = 1.164{,}8$$

und

$$\widehat{S}_{2022,3}^{\mathrm{CL}} := S_{2022,0}\cdot\widehat{\varphi}_1^{\mathrm{CL}}\cdot\widehat{\varphi}_2^{\mathrm{CL}}\cdot\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 300\cdot 1{,}7\cdot 1{,}6\cdot 1{,}4 = 1.142{,}4$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus:

$$R_{2021}^{\mathrm{CL}} := \widehat{S}_{2021,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2021,1} = 1.164{,}8 - 520 = 644{,}8$$
$$R_{2022}^{\mathrm{CL}} := \widehat{S}_{2022,3}^{\mathrm{CL}} - S_{2022,0} = 1.142{,}4 - 300 = 842{,}4$$

Der CL-Faktor

$$\widehat{\varphi}_3^{\mathrm{CL}} = 1{,}4$$

besagt, dass – auf Basis der gegebenen Abwicklungsdaten – davon auszugehen ist, dass die kumulierten Schadenaufwendungen beim Übergang von Abwicklungsjahr 2 auf 3 im Mittel um 40% steigen. Da hier das Abwicklungsjahr 3 das letzte im unterstellten Abwicklungszeitraum ist, ist dieser Wert ungewöhnlich hoch. Es wäre zu prüfen, ob die Abwicklungsdauer (n) zu gering gewählt wurde.

(b) (i) *[6 Punkte]* Für die Schätzer der Endschadenstände im Additiven Verfahren sind zunächst aus den Schadenständen durch Differenzenbildung die Zuwächse $Z_{i,k}$ zu ermitteln. Man erhält:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2019	200	100	70	148
2020	100	100	230	
2021	300	220		
2022	300			

Daraus ergeben sich die folgenden Schätzer der Schadenquotenzuwächse:

$$\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2019,1}+Z_{2020,1}+Z_{2021,1}}{\pi_{2019}+\pi_{2020}+\pi_{2021}} = \frac{100+100+220}{925+575+500} = \frac{420}{2.000} = 0{,}21$$
$$\widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2019,2}+Z_{2020,2}}{\pi_{2019}+\pi_{2020}} = \frac{70+230}{925+575} = \frac{300}{1.500} = 0{,}20$$
$$\widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}} := \frac{Z_{2019,3}}{\pi_{2019}} = \frac{148}{925} = 0{,}16$$

Es resultiert der folgende Schätzer für den Endschadenstand des Anfalljahres 2022:

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{2022,3}^{\mathrm{AD}} &:= S_{2022,0} + \pi_{2022} \cdot \left(\widehat{\zeta}_1^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_2^{\mathrm{AD}} + \widehat{\zeta}_3^{\mathrm{AD}}\right) \\ &= 300 + 1.100 \cdot (0,21 + 0,20 + 0,16) \\ &= 300 + 1.100 \cdot 0{,}57 = 300 + 627 = 927\end{aligned}$$

($\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}}$ wird <u>hier</u> nicht benötigt.)
Für die gesuchte Reserve ergibt sich:

$$R_{2022}^{\mathrm{AD}} := \widehat{S}_{2022,3}^{\mathrm{AD}} - S_{2022,0} = 927 - 300 = 627$$

(ii) *[3 Punkte]* Für die Schätzung der Endschadenquote ist nun auch noch

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_0^{\mathrm{AD}} &:= \frac{Z_{2019,0}+Z_{2020,0}+Z_{2021,0}+Z_{2022,0}}{\pi_{2019}+\pi_{2020}+\pi_{2021}+\pi_{2022}} \\ &= \frac{200+100+300+300}{925+575+500+1.100} = \frac{900}{3.100} = 0{,}2903\ldots \approx 0{,}29\end{aligned}$$

zu berechnen. Ein Schätzer für die Endschadenquote ist durch die Summe der Schadenquotenzuwächse gegeben:

$$\sum_{k=0}^{3} \widehat{\zeta}_k^{\mathrm{AD}} = 0{,}29 + 0{,}21 + 0{,}20 + 0{,}16 = 0{,}86 = 86\%.$$

(c) *[3 Punkte]* Die Basisverfahren der Reservierung operieren weitgehend ohne stochastische Modellierungen, insbesondere ohne den Ansatz konkreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen. „Stochastische Erweiterungen“ setzen genau hier an. Den Schadenständen und/oder Zuwächsen bzw. ihren Relativzahlen wie Schadenquoten werden geeignete parametrische Verteilungen angepasst, sodass z. B. Konfidenzintervalle für künftige Schadenstände und Reserven angegeben werden können.