DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12.10.2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 16 Seiten. Zusätzlich zu den 16 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Prämienkalkulation, Rückstellungen und Risikoteilung] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen. Bitte notieren Sie Ihre Lösungen ausschließlich auf den Lösungsblättern.

(a) *[1 Punkt]* Wodurch unterscheiden sich im Rahmen der Prämienkalkulation der *Schaden*versicherung die **Brutto<u>risiko</u>prämie** und die **Netto<u>risiko</u>prämie**?

(i) außertarifliche Nachlässe

(ii) Kosten

(iii) Sicherheitszuschläge

(iv) Versicherungssteuer

(b) *[1 Punkt]* Wodurch unterscheiden sich im Rahmen der Prämienkalkulation der *Personen*versicherung die **Bruttoprämie** und die **Nettoprämie**?

(i) Berücksichtigung der Zahlweise

(ii) Kosten

(iii) Sicherheitszuschläge

(iv) Rückversicherung

(c) *[1 Punkt]* Welche der folgenden **Rückstellungen** gibt es typischerweise *nicht* in der *Personen*versicherung?

(i) Alterungsrückstellung

(ii) bilanzielle Deckungsrückstellung

(iii) einzelvertragliche versicherungsmathematische Deckungsrückstellung

(iv) Schwankungsrückstellung

(d) *[1 Punkt]* Welche der folgenden **Rückstellungen** gibt es typischerweise *nicht* in der *Kompositversicherung*?

(i) Deckungskapital

(ii) Einzelschadenreserve

(iii) Einzelspätschadenreserve

(iv) Schwankungsrückstellung

(e) *[1 Punkt]* Bei welchem der nachfolgenden Beispiele von **Risikoteilung** sind ***abhängig von der realisierten Höhe*** eines positiven Finanzaufwands *nicht notwendigerweise* beide Akteure an Zahlungen beteiligt?

(i) Jahresfranchise in der privaten Krankenversicherung

(ii) partielle Absicherung von Pensionsverpflichtungen

(iii) Quotenrückversicherung für Cyberpolicen

(iv) Summenexzedentenrückversicherung für Risikolebensversicherungen

(f) *[1 Punkt]* Bei welcher der folgenden Risikoteilungen zahlen bei *jedem* eingetretenen (positiven) Finanzaufwand beide Akteure einen positiven Anteil?

(i) Abzugsfranchise in der Feuerversicherung

(ii) Integralfranchise in der privaten Pflegeversicherung

(iii) Schadenexzedentenrückversicherung in der privaten Unfallversicherung

(iv) Unterversicherung in der Hausratversicherung

(g) *[1 Punkt]* Wie hoch ist bei einer **Summenexzedentenrückversicherung** die vertragsindividuelle Quote für eine Versicherungssumme von 400 bei einem Maximum von 100 und einer Haftungsbegrenzung auf 2 Maxima?

(i) 0%

(ii) 25%

(iii) 50%

(iv) 75%

(h) *[1 Punkt]* Welche Formel beschreibt das Erstrisiko $\underline{X}$ für eine **Schadenexzedentenrückversicherung** mit einem Limit von 5 und einem Plafond von 12?

(i)
$$\underline{X} = \max\{\min\{X; 5\}; X - 12\}$$

(ii)
$$\underline{X} = \max\{\min\{X; 12\}; X - 17\}$$

(iii)
$$\underline{X} = \min\{X; 5\} + \max\{X - 7; 0\}$$

(iv)
$$\underline{X} = \min\{X; 7\} + \max\{X - 12; 0\}$$

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Grundlegende Eigenschaften von Verträgen] [16 Punkte]*
In dieser Aufgabe sollen die Charakteristika typischer Verträge aus unterschiedlichen Teilgebieten der Versicherungsmathematik beschrieben und miteinander verglichen werden.

(a) *[8 Punkte]* Eine 25-jährige angehende Aktuarin schließt nach ihrem Berufseinstieg zwei Versicherungsverträge ab:

- eine **Risiko-Lebensversicherung** mit Endalter 67 Jahre sowie
- eine **Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung** für ihren Neuwagen

Dieses Beispiel dient der Beschreibung **vertragstypischer Eigenschaften** von Produkten der Lebensversicherung und der Schadenversicherung.
Verfassen Sie jeweils vier Aussagesätze zur o.g. Risikolebensversicherung und vier Aussagesätze zur o.g. Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung. Erläutern Sie hierbei konkret folgende vier Aspekte der beiden Verträge:

(i) *[2 Punkte]* Höhe der Versicherungsleistung (zu Vertragsbeginn)

(ii) *[2 Punkte]* Versicherungsdauer

(iii) *[2 Punkte]* Anzahl Leistungsfälle (je Versicherungspolice)

(iv) *[2 Punkte]* Anzahl relevanter Parameter für die Prämienkalkulation

(b) *[3 Punkte]* Aus Versicherungsverträgen übernommene Risiken und die daraus resultierenden Leistungen lassen sich in der Versicherungsmathematik mittels Zufallsvariablen modellieren. Es werden inhaltlich im Allgemeinen **drei verschiedene Formen von Ungewissheit** unterschieden. Benennen Sie in Stichworten alle drei Formen.

(c) *[2 Punkte]* Bei manchen Versicherungsverträgen treten **nicht** alle drei Formen von Ungewissheit aus Teilaufgabe (b) auf. Geben Sie hierfür ein konkretes Beispiel an. Nennen Sie hierfür ein Versicherungsprodukt und nennen Sie eine Form der Ungewissheit, die bei dem genannten Produkt **nicht** vorliegt.

(d) *[3 Punkte]* Bei einem Vorstellungsgespräch im Aktuariat eines Kompositversicherers wird mit folgender Aussage für eine offene Stelle geworben:

- *Schadenversicherungsmathematik ist die Königsdisziplin der Versicherungsmathematik.*

Erläutern Sie kurz, wie diese Aussage gemeint sein könnte. Leiten Sie aus den Fragestellungen zu Teilaufgaben (b) und (c) ab, wie die Aussage gemeint sein könnte.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation: Kalkulation von Prämien, Modelle der Risikotheorie und Risikoteilung] [12 Punkte]*
Ein Versicherungsvertrag erzeugt pro Jahr N Finanzaufwände mit Höhen der Finanzaufwände X_j ($1 \leq j \leq N$), wobei alle Zufallsvariablen unabhängig sind.

Für die Anzahl der Finanzaufwände N ist bekannt

- $\mathrm{E}(N) = 2$
- $\mathrm{Var}(N) = 1$

Für die Verteilung der Höhen der Finanzaufwände X_j ($1 \leq j \leq N$) gilt:

x	**50**	**200**	**2.000**
$P(X_j = x)$	0,7	0,29	0,01

(a) *[5 Punkte]* Berechnen Sie unter den gegebenen Angaben für den vorliegenden Vertrag eine jährliche Prämie P mittels **Varianzprinzip** mit Parameter $\delta = 0{,}001$. Runden Sie die Prämie auf zwei Nachkommastellen.

(b) *[5 Punkte]* Zur Reduzierung von Bearbeitungsrückständen in der Leistungsbearbeitung wird künftig ein **Selbstbehalt von 100** pro Finanzaufwand eingeführt. Berechnen Sie analog zu Teilaufgabe (a) eine Prämie unter Berücksichtigung des Selbstbehalts. Runden Sie die Prämie auf zwei Nachkommastellen.

(c) *[1 Punkt]* In der Versicherungsmathematik gibt es mehrere Prämienbegriffe. Wie wird die Prämie exakt bezeichnet, welche in Teilaufgabe (a) und (b) berechnet wird?

(d) *[1 Punkt]* In der Versicherungsmathematik finden verschiedene Modelle Anwendung. Wie wird das Modell genannt, welches für die Berechnung in Teilaufgabe (a) und (b) angewendet wird?

Aufgabe 4. *[Personen- und Pensionsversicherungsmathematik, Allgemeines Modell, Bevölkerungsmodell und Ausscheideordnung] [25 Punkte]*

Wir betrachten im Rahmen des allgemeinen Bevölkerungsmodells der Personenversicherungsmathematik eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Auf der Basis eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien bei einem Aktiven des Alters x und mit Geburtsjahrgang G die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 wie folgt definiert:

X_1: Alter bei Eintritt der Invalidität
X_2: Alter bei Eintritt des Todes

Bekanntlich werden im Rahmen dieses Bevölkerungsmodells neben der Hauptgesamtheit der Aktiven auch die Nebengesamtheit der Invaliden sowie der Gesamtbestand betrachtet.

Wir betrachten die folgenden Wahrscheinlichkeiten

- q_x^a: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- i_x: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres invalide zu werden
- q_x^g: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person des Gesamtbestandes innerhalb eines Jahres zu sterben
- q_x^i: Wahrscheinlichkeit eines Invaliden des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- l_x^a: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person zum Aktivenbestand zu gehören
- l_x^g: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person zum Gesamtbestand zu gehören

(a) *[10 Punkte]* Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus.

(b) *[5 Punkte]* In dem Bevölkerungsmodell wird auch die Wahrscheinlichkeit q_x^{aa} betrachtet. Drücken Sie auch diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus und erläutern Sie die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit q_x^{aa}.

Erläutern Sie auch, worin der Unterschied zwischen q_x^a und q_x^{aa} besteht.

(c) *[4 Punkte]* Vergleichen Sie die formelmäßige Darstellung der Wahrscheinlichkeiten q_x^{aa} und i_x und geben Sie an, welche Unsymmetrie zwischen den beiden Definitionen besteht. Erläutern Sie ferner die Bedeutung des Ereignisses $\{X_1 = X_2\}$ und die Folge der festgestellten Unsymmetrie für dieses Ereignis (d. h. welche Ausscheideursache führt in diesem Fall modellhaft zum Ausscheiden).

(d) *[4 Punkte]* Auf Grundlage des Axiomensystems der Pensionsversicherungsmathematik lässt sich der folgende formelmäßige Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten q_x^g, q_x^a und q_x^i beweisen (sogenannte erste Konsistenzgleichung):

$$q_x^g = \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^a + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i$$

Zeigen Sie, dass sich die erste Konsistenzgleichung in der üblichen Darstellung der Heubeck Richttafeln 2018 G wie folgt formulieren lässt:

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot \left(q_x^i - q_x^{aa} - i_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^i \right)$$

(e) *[2 Punkte]* Im Axiomensystem der Pensionsversicherungsmathematik findet sich auch eine Festlegung zur Verteilung der Austrittszeitpunkte aus der Gesamtheit der Aktiven innerhalb eines Jahres. Wie lautet dieses Axiom?

Aufgabe 5. *[Personen- und Pensionsversicherungsmathematik, Prämien- und Leistungsbarwerte] [29 Punkte]*
Wir betrachten im allgemeinen Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematik eine zum Vertragsbeginn x-jährige Person der Hauptgesamtheit bezüglich der h Ereignisse auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanwartschaften führen.

(a) *[6 Punkte]* Der Leistungsbarwert einer ungewissen Verpflichtung gegenüber dieser Person zu Vertragsbeginn lässt sich bekanntlich in folgender Form darstellen:

$$_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_k\widehat{L}_x$$

${}_k\hat{L}_x$ ist hierbei der Erwartungswert der gesamten Leistungen, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1]$ ausgelöst werden können, diskontiert auf den Beginn dieses Altersintervalls ($k = 0, 1, \ldots$).

Geben Sie die formelmäßige Definition von ${}_k\widehat{L}_x$ in dieser Darstellung an und erläutern Sie die Bedeutung der drei in der anzugebenen Formel von ${}_k\widehat{L}_x$ vorkommenden Größen.

(b) *[5 Punkte]* Geben Sie in analoger Darstellung zu (a) den Prämienbarwert ${}_0B_x^P$ zum Alter x an und erläutern Sie die Bedeutung der drei darin vorkommenden Größen.

(c) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie kurz die Aussage des individuellen Äquivalenzprinzips (ohne Berücksichtigung von Kosten).

(d) *[4 Punkte]* Was versteht man unter der prospektiven Reserve? Erläutern Sie den Begriff in Worten und geben Sie die Formel für die prospektive Reserve zum Alter $x + m$ an.

(e) *[3 Punkte]* Wir betrachten nun eine einfache Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Rentner und der einzigen Ausscheideursache Tod.

Gegeben sei ein x-jähriger Rentner ($x \geq z$, z = Pensionierungsalter) mit Anspruch auf eine lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Rente vom Jahresbetrag 1.

Geben Sie zunächst die übliche versicherungsmathematische Bezeichnung für diesen Leistungsbarwert in der Pensionsversicherungsmathematik an.

Geben Sie dann den Leistungsbarwert ${}_0B_x^L$ dieser Verpflichtung unter Verwendung der Darstellung in (a) an. Spezifizieren Sie dabei die ${}_kp_x$ im Hinblick auf den zugrunde liegenden Bestand und geben Sie die ${}_k\widehat{L}_x$ konkret an.

(f) *[9 Punkte]* Wir betrachten ferner eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Gegeben sei ein x-jähriger Aktiver ($x < z$, $z =$ Pensionierungsalter). Für diesen Aktiven betrachten wir zwei Verpflichtungen:

(i) *[4 Punkte]* die Anwartschaft des Aktiven auf eine ab Erreichen des Alters z lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vom Jahresbetrag 1

(ii) *[5 Punkte]* die Anwartschaft des Aktiven auf eine lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrag 1

Geben Sie zunächst in jeder der beiden Teilaufgaben die übliche versicherungsmathematische Bezeichnung für den Leistungsbarwert in der Pensionsversicherungsmathematik an. Geben Sie dann jeweils den Leistungsbarwert ${}_0B_x^L$ der vorliegenden Verpflichtung unter Verwendung der Darstellung in (a) an. Spezifizieren Sie dabei die ${}_kp_x$ im Hinblick auf den zugrunde liegenden Bestand, geben Sie die ${}_k\widehat{L}_x$ konkret an und vereinfachen Sie falls möglich die Darstellung von ${}_0B_x^L$.

Aufgabe 6. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Standardformeln] [10 Punkte]*

Eine 43-jährige Person schließt eine aufgeschobene Rentenversicherung ab: Ab Alter 67 sollen jährlich vorschüssig Renten in Höhe von 24.000 Euro gezahlt werden. Abschlusskosten werden einerseits einmalig mit 25 Promille der Beitragssumme und andererseits laufend als 1 Prozent des Beitrags einkalkuliert. Inkassokosten und Verwaltungskosten werden bis zum Rentenbeginn mit jährlich 30 Euro einkalkuliert und während des Rentenbezugs mit 60 Euro. Beitragszahlungen sollen bis Alter 60 jährlich vorschüssig erfolgen, sofern die Person zum Zeitpunkt der Beitragszahlung noch lebt.

(a) *[2 Punkte]* Welcher Sterblichkeitstafel-Typ kommt zur Anwendung und warum?

(b) *[5 Punkte]* Wie lautet das Äquivalenzprinzip für diesen Vertrag? Verwenden Sie die Standardnotation. Erläutern Sie die inhaltliche Bedeutung der von Ihnen verwendeten Leistungsbarwerte in Standardnotation.

(c) *[3 Punkte]* Es soll eine Beitragsrückgewähr berücksichtigt werden, d. h. bei Tod innerhalb der Beitragszahlungszeit werden die bis dahin gezahlten Beiträge an die Hinterbliebenen ausgezahlt. Wie muss das Äquivalenzprinzip verändert werden? Erklären Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 7. *[Lebensversicherungsmathematik, Rekursive Ansätze und Überschussbeteiligung] [8 Punkte]*

In der Kalkulation eines konkreten Lebensversicherungsvertrags können folgende Gleichungen zum Einsatz kommen:

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + n_1 \cdot \alpha^Z \cdot P + P \cdot v \cdot q_{x+m} + \gamma_1 - P && \text{für } m = 0\\
{}_mV_x &= v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + \gamma_1 + (m+1) \cdot P \cdot v \cdot q_{x+m} - P && \text{für } 0 < m < n_1\\
{}_mV_x &= v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + \gamma_1 && \text{für } n_1 \le m < n_2\\
{}_mV_x &= v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x + R + \gamma_2 && \text{für } m \ge n_2
\end{aligned}
$$

(a) *[1 Punkt]* Welche inhaltliche Bedeutung haben n_1 und n_2?

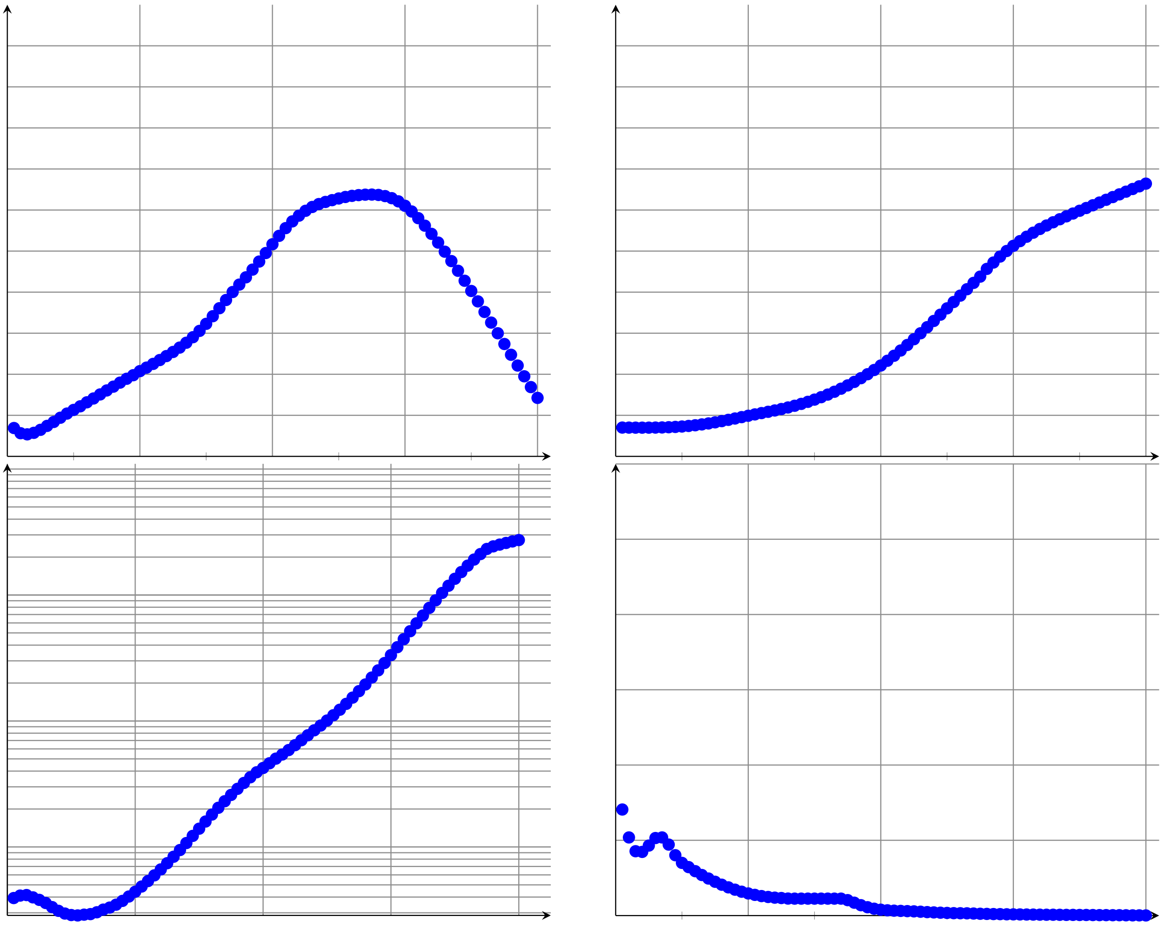
(b) *[3 Punkte]* Welche Terme – in Abhängigkeit von m – gehören zu ${}_m\hat{L}_x$?

(c) *[3 Punkte]* Charakterisieren Sie die Eigenschaften dieses Lebensversicherungsvertrags möglichst präzise.

(d) *[1 Punkt]* Sofern Bewertungsreserven entstehen: Wann erfolgt im vorliegenden Fall die Zuteilung?

Aufgabe 8. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und Prämien] [8 Punkte]*

Betrachten Sie die folgenden vier Abbildungen. Bitte notieren Sie Ihre Lösungen ausschließlich auf den Lösungsblättern.



(a) *[4 Punkte]* Ordnen Sie diese vier Abbildungen den Rechnungsgrundlagen zu: *Rechnungszins*, *Sterbewahrscheinlichkeiten*, *Stornowahrscheinlichkeiten*, *Übertrittswahrscheinlichkeiten zur Berechnung des Übertragungswertes*, *Kopfschäden für ambulante Leistungen*, *Kopfschäden für stationäre Leistungen*, *Kopfschäden für Zahnersatz*
Hinweis: Sie müssen hier die richtigen vier Rechnungsgrundlagen von den sieben genannten Rechnungsgrundlagen auswählen.

(b) *[1 Punkt]* Wie lauten Anfangs- und Endpunkt der horizontalen Achse (x-Achse)?

(c) *[3 Punkte]* Geben Sie für jede Abbildung die Anfangs- und Endpunkte der vertikalen Achse (y-Achse) an. *Hinweis:* Es geht hier nicht um die exakten Werte, sondern um die richtige Größenordnung.

Aufgabe 9. *[Krankenversicherungsmathematik, Beitragsanpassungsklausel]*
[10 Punkte]

Überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen im Kontext einer Beitragsanpassung in der privaten Krankenversicherung (Kalkulation nach Art der Lebensversicherung) und begründen Sie Ihre Antwort. Sie können pro Aussage *2 Punkte* für die korrekte Begründung erhalten.

(a) „Der Rechnungszins ist eine maßgebliche Rechnungsgrundlage."

(b) „Der unabhängige Treuhänder legt die Höhe des Rechnungszinses fest."

(c) „Der Auslösende Faktor für die Sterblichkeit ist für alle Tarife eines Unternehmens identisch."

(d) „Wenn der Auslösende Faktor für die Versicherungsleistungen anspringt, dann kommt es in jedem Fall zur Beitragsanpassung in der betroffenen Beobachtungseinheit."

(e) „Bei der Bestimmung der erforderlichen Versicherungsleistungen werden die rechnungsmäßigen Leistungen der letzten fünf Jahre extrapoliert."

Aufgabe 10. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [14 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Was ist ein Exposuremaß?
Ist die kumulierte Versicherungssumme ein Exposuremaß? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen		
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter	Dritter
1	01.01.	**30.03.**	1000	20	5	4	
2	01.01.	**30.09.**	2000	24			
3	01.01.	31.12.	4000	32	17		
4	01.01.	31.12.	4750	44	12	7	9
5	**01.04.**	31.12.	6000	68	21		

Berechnen Sie den Schadenbedarf und den Schadensatz.

(c) *[4 Punkte]* Beurteilen Sie die Profitabilität des Bestandes aus b) mit einer geeigneten Kennzahl.

Aufgabe 11. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [20 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Erläutern und unterscheiden Sie – im Kontext der Tarifierung – die Begriffe Risikomerkmal und Tarifmerkmal. Geben Sie auch ein Beispiel zur Unterscheidung an.

(b) *[10 Punkte]* Die Tarifierung für einen Bestand operiert mit zwei Merkmalen (A und B). Beide Merkmale weisen je drei Ausprägungen auf. Die Anzahl der Risiken $v_{i,j}$ und die Gesamtschäden $s_{i,j}$ sind für jede Risikoklasse (i, j) gegeben durch:

Risiko	Anzahl der Risiken $v_{i,j}$			Gesamtschaden $s_{i,j}$		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	5	10	25	150	150	200
$i = 2$	10	20	20	150	350	500
$i = 3$	10	20	30	50	125	125

Berechnen Sie die (Nettorisiko-)Prämien für die beiden Tarifzellen $(1, 3)$ und $(2, 2)$ mit dem "Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten".
Hinweis: Die Prämien sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

(c) *[2 Punkte]* Herkömmliche Tarifierungsmodelle operieren nicht mit Copulas. Wie könnten Ausbaustufen dieser Modelle mit Einbeziehung von Copulas ansatzweise aussehen?

(d) *[4 Punkte]* Inwiefern unterscheiden sich die verallgemeinerten linearen Modelle (GLM) von Tarifierungsmodellen wie dem Marginaldurchschnittsverfahren, dem Verfahren von Bailey & Simon und/oder dem Marginalsummenverfahren?
Hinweis: Es geht nicht um die Unterschiede der drei letztgenannten Verfahren untereinander.

Aufgabe 12. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Erläutern Sie die Begriffe Anfalljahr, Abwicklungsdauer und Abwicklungsdreieck im Kontext der Schadenreservierung. Begründen Sie insbesondere die Dreiecksstruktur.

(b) *[8 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre $i = 2020, \ldots, 2023$ und für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$ die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ sowie die Prämieneinnahmen π_i:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k				Prämie π_i
	0	1	2	3	
2020	250	330	475	570	725
2021	150	220	350		550
2022	410	908			1800
2023	600				2400

Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2022 und 2023 mit dem Chain-Ladder-Verfahren (CL).
Beurteilen Sie die Gegebenheiten der beiden Anfalljahre anhand der berechneten Reserven kurz.

(c) *[3 Punkte]* Erläutern Sie verbal (ohne auf Formeln einzugehen) das Cape-Cod-Verfahren. Welche Daten gehen – neben individuellen Schadenständen – in das Cape-Cod-Verfahren ein?

(d) *[2 Punkte]* Was ist (unabhängig von der Tabelle in b)) im Kontext der Reservierung der Nachlauf?

DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Formelsammlung Versicherungsmathematik

X, Y und Z seien Zufallsvariable. Die Existenz der auftretenden (bedingten) Momente sei stets vorausgesetzt.

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
1_A = Indikatorfunktion für die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, d.h. $1_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $1_A(x) = 0$ sonst

Verteilungsfunktion und Dichte von Zufallsvariablen

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion bei stetiger Zufallsvariable X: $f_X(x) = F'_X(x)$ fast sicher
- Zähldichte bei diskreter Zufallsvariable X: $f_X(x) = P(X = x)$

Momente von Zufallsvariablen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}$): $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \, dF_X(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x) \, dx$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x)$
  - falls X nichtnegativ:
$$\mathrm{E}\left(X^n\right) = n \int_0^\infty x^{n-1} \cdot (1 - F_X(x)) \, dx$$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(X^1\right)$
- Varianz (2. zentrales Moment von X): $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$
- Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- Variationskoeffizient: $\mathrm{Vko}(X) = \dfrac{\sigma(X)}{\mathrm{E}(X)} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}$
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
- Korrelationkoeffizient: $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, \dfrac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right) \in [-1, 1]$

Ungleichung von Cantelli

Für alle $c > 0$ gilt:

$$P\left(X \geq \mathrm{E}(X) + c\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2 + \mathrm{Var}(X)}$$

Rechenregeln für bedingte Erwartungen

- Iterativität des Erwartungswerts: $\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X)$
- Falls X, Y unabhängig: $\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}(X)$
- Für messbare Funktionen f, g: $\mathrm{E}[f(Z)\cdot X + g(Z)\cdot Y\,|\,Z] = f(Z)\cdot \mathrm{E}(X|Z) + g(Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$
- Bedingte Varianz: $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}\left(X^2|Y\right) - \mathrm{E}(X|Y)^2$
- Iterativität der Varianz: $\mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|Y)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|Y)] = \mathrm{Var}(X)$
- Bedingte Covarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y\,|\,Z) = \mathrm{E}(XY|Z) - \mathrm{E}(X|Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right)$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right)$, $t \in [0, 1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_{x\in\mathbb{R}} t^x \cdot f_X(x)$

Kollektives Modell

- *Kollektives Modell*
  Sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und $X_1, X_2, \ldots$ nichtnegative Zufallsvariablen. Die Zufallssumme
  $$S^{\mathrm{koll}} = \sum_{j=1}^{N} X_j$$
  heißt kollektives Modell, wenn $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig sind und $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt wie eine Zufallsvariable X sind.
- *Formeln von Wald*
  - 1. Formel von Wald: $\mathrm{E}\left(S^{\mathrm{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{E}(X)$
  - 2. Formel von Wald: $\mathrm{Var}\left(S^{\mathrm{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\cdot \mathrm{E}(X)^2$
  - Falls $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$: $\mathrm{E}\left(S^{\mathrm{koll}}\right) = \lambda \cdot \mathrm{E}(X)$, $\quad \mathrm{Var}\left(S^{\mathrm{koll}}\right) = \lambda\cdot \mathrm{E}\left(X^2\right)$
- *Fundamentalformeln*
  Für $d > 0$ sei X diskret verteilt auf dem Träger $\{0, d, 2d, 3d, \ldots\}$:
  $$\begin{aligned} \psi_{S^{\mathrm{koll}}}(t) &= m_N\left(\psi_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{MEF}_{S^{\mathrm{koll}}}(t) &= m_N\left(\mathrm{MEF}_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ m_{S^{\mathrm{koll}}}(t) &= m_N\left(m_X(t)\right) && \text{für alle } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Summen von Zufallsvariablen

Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:

- Stetige Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$

  für messbare $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.

- Diskrete Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$

  für $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ sind.

Layer-Identität Für Priorität a und Limit l gilt:

$$\min(\max(X-a;0);l) = \min(X;a+l) - \min(X;a) = \max(X-a;0) - \max(X-(a+l);0)$$

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	**Zähldichte** $\boldsymbol{f_k := f_N(k) = \mathrm{P}(N=k)}$	**Erwartungs-wert** $\mathbf{E}(\boldsymbol{N})$	**Varianz** $\mathbf{Var}(\boldsymbol{N})$
Diskrete Gleichverteilung $N \sim \mathrm{U}(m)$ $m \in \mathbb{N}$	$f_k = \frac{1}{m+1}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m \cdot (m+1)}{12}$
Poisson-Verteilung $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$f_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
Negative Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{NegBin}(\beta, p)$ $\beta > 0, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{k+\beta-1}{k} \cdot p^\beta \cdot (1-p)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p}$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p^2}$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	Dichte $f_X(x)$	Verteilungsfunktion $F_X(x)$	Erwartungs- wert $\mathrm{E}(X)$	Varianz $\mathrm{Var}(X)$
Stetige Gleichverteilung $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ $a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{1}{b-a} \cdot 1_{(a,b)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } x \in (a,b) \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential-Verteilung $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$1 - e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma-Verteilung $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}\, dt$ für $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Stetige Verteilungen (II)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	Dichte $f_X(x)$	Verteilungsfunktion $F_X(x)$	Erwartungs-wert $\mathrm{E}(X)$	Varianz $\mathrm{Var}(X)$
Normal-Verteilung $X \sim \mathrm{Norm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Lognormal-Verteilung $X \sim \mathrm{LogNorm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x > 0$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ für $x > 0$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$
Pareto-Verteilung (European Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > t$	$1 - \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}$ für $x > t$	$\frac{t\alpha}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$
Nullpunkt-Pareto-Verteilung (American Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}_0(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > 0$	$1 - \left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha}$ für $x > 0$	$\frac{t}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a) *[1 Punkt]* (iii)

(b) *[1 Punkt]* (ii)

(c) *[1 Punkt]* (iv)

(d) *[1 Punkt]* (iii)

(e) *[1 Punkt]* (i)

(f) *[1 Punkt]* (iv)

(g) *[1 Punkt]* (iii)

(h) *[1 Punkt]* (iv)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[8 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Die Höhe der Versicherungsleistung wird bei einer Risiko-LV typischerweise zu Vertragsbeginn fest vereinbart und garantiert. In der KH-Versicherung ist die Versicherungsleistung typischerweise zu Vertragsbeginn ungewiss und nach oben begrenzt, z. B. durch vereinbarte Deckungssummen.

(ii) *[2 Punkte]* In der Risiko-LV liegen typischerweise langjährige Verträge mit teils mehreren Jahrzehnten Laufzeit vor (im Beispiel 42 Jahre). In der KH-Versicherung beträgt die Vertragslaufzeit ohne Verlängerung jeweils nur 1 Jahr.

(iii) *[2 Punkte]* In der Risiko-LV kann maximal ein Leistungsfall eintreten. In der KH-Versicherung sind mehrere Schäden pro versichertem Fahrzeug und Jahr möglich.

(iv) *[2 Punkte]* In der Risiko-LV werden typischerweise abgesehen von Kostenparametern nur sehr wenige Parameter wie Alter, Zins und Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet. In der KH-Versicherung ist typischerweise eine größere Anzahl verschiedener Tarifmerkmale möglich und üblich.

(b) *[3 Punkte]*

- Ungewissheit, ob ein Leistungsfall eintritt
- Ungewissheit, wann ein Leistungsfall eintritt
- Ungewissheit, wie hoch der finanzielle Mittelbedarf für einen Leistungsfall ausfällt

(c) *[2 Punkte]*
Es sind verschiedene Antworten möglich. Nachfolgend werden exemplarisch drei verschiedene Antwortmöglichkeiten genannt:

- Bei einer Risiko-LV steht durch die vereinbarte Versicherungssumme fest, wie hoch der Leistungsfall sein wird (abgesehen von der Überschussbeteiligung).
- Bei einer klassischen Rentenversicherung steht durch den vereinbarten Rentenbeginn fest, zu welchen Zeitpunkten die Rentenzahlungen beginnen könnten.
- Bei einer Todesfallversicherung steht fest, dass genau ein Leistungsfall eintreten wird.

(d) *[3 Punkte]*

Im Teilgebiet der Schadenversicherungsmathematik sind in der Regel immer alle drei Formen von Ungewissheit vorhanden, während in der Personenversicherungsmathematik nicht immer alle Formen der Ungewissheit vorliegen, was die mathematische Komplexität reduziert. Aus diesem Grund könnten die behandelten Themen und verwendeten Methoden der Schadenversicherungsmathematik im Vergleich zu den anderen Teilgebieten der Versicherungsmathematik als mathematisch / statistisch aufwändiger oder besonders anspruchsvoll bezeichnet werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) *[5 Punkte]*
Zunächst werden für die Höhen der Finanzaufwände $X_1, \ldots, X_N \sim X$ der Erwartungswert und die Varianz berechnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 50 \cdot 0{,}7 + 200 \cdot 0{,}29 + 2.000 \cdot 0{,}01 = 113 \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = 50^2 \cdot 0{,}7 + 200^2 \cdot 0{,}29 + 2.000^2 \cdot 0{,}01 - 113^2 \\ &= 53.350 - 12.769 = 40.581 \end{aligned}$$

Als nächstes werden für den Versicherungsvertrag – modelliert als $S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N} X_j$ – Erwartungswert und Varianz mittels der beiden Formeln von Wald berechnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X) = 2 \cdot 113 = 226 \\ \mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 \cdot \mathrm{Var}(N) = 2 \cdot 40.581 + 113^2 \cdot 1 = 93.931 \end{aligned}$$

Daraus folgt aus dem Varianzprinzip mit $\delta = 0{,}001$ für die gesuchte Prämie:

$$\begin{aligned} P = H\left(S^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) + \delta \cdot \mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = 226 + 0{,}001 \cdot 93.931 = 319{,}931 \\ &\approx 319{,}93 \end{aligned}$$

(b) *[5 Punkte]*
Wegen des Selbstbehalts ergeben sich die modifizierten Höhen der Finanzaufwände durch die Zufallsvariablen $Z_j := \left(X_j - 100\right)^+ = \max\left\{X_j - 100; 0\right\}$ $(1 \leq j \leq N)$.
Analog Teilaufgabe (a) werden zunächst für $Z_1, \ldots, Z_N \sim Z$ der Erwartungswert und die Varianz berechnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= 0 \cdot 0{,}7 + 100 \cdot 0{,}29 + 1.900 \cdot 0{,}01 = 48 \\ \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}\left(Z^2\right) - \mathrm{E}(Z)^2 = 0^2 \cdot 0{,}7 + 100^2 \cdot 0{,}29 + 1.900^2 \cdot 0{,}01 - 48^2 \\ &= 39.000 - 2.304 = 36.696 \end{aligned}$$

Als nächstes werden für den Versicherungsvertrag mit Selbstbehalt – modelliert als $\tilde{S}^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N} Z_j$ – analog Erwartungswert und Varianz berechnet:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\tilde{S}^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(Z) = 2 \cdot 48 = 96 \\ \mathrm{Var}\left(\tilde{S}^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(Z) + (\mathrm{E}(Z))^2 \cdot \mathrm{Var}(N) = 2 \cdot 36.696 + 48^2 \cdot 1 = 75.696 \end{aligned}$$

Daraus folgt aus dem Varianzprinzip mit $\delta = 0{,}001$ für die gesuchte Prämie:

$$\begin{aligned} P = H\left(\tilde{S}^{\text{koll}}\right) &= \mathrm{E}\left(\tilde{S}^{\text{koll}}\right) + \delta \cdot \mathrm{Var}\left(\tilde{S}^{\text{koll}}\right) = 96 + 0{,}001 \cdot 75.696 = 171{,}696 \\ &\approx 171{,}70 \end{aligned}$$

(c) *[1 Punkt]*
Bruttorisikoprämie

(d) *[1 Punkt]*
Kollektives Modell der Risikotheorie

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a)

$$
\begin{aligned}
q_x^a &= \mathbb{P}\left[X_2 \leq x+1 \,|X_1 > x,\, X_2 > x\right]\\
i_x &= \mathbb{P}\left[X_1 \leq x+1,\, X_1 \leq X_2 \,|X_1 > x,\, X_2 > x\right]\\
q_x^g &= \mathbb{P}\left[X_2 \leq x+1 \,|X_2 > x\right]\\
q_x^i &= \mathbb{P}\left[X_2 \leq x+1 \,|X_1 \leq x,\, X_2 > x\right]\\
l_x^a &= \mathbb{P}\left[X_1 > x,\, X_2 > x\right]\\
l_x^g &= \mathbb{P}\left[X_2 > x\right]
\end{aligned}
$$

(b) $q_x^{aa} = \mathbb{P}\left[X_2 \leq x+1,\, X_2 < X_1 | X_1 > x,\, X_2 > x\right]$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven innerhalb eines Jahres wegen Todes aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden.

q_x^a hingegen beschreibt die Wahrscheinlichkeit des x-jährigen Aktiven, innerhalb eines Jahres zu sterben. Der Unterschied liegt also darin, dass bei q_x^a auch Todesfälle eines zu Beginn des Jahres Aktiven erfasst sind, die innerhalb eines Jahres nach vorherigem Eintritt der Invalidität eintreten.

(c) Die Unsymmetrie besteht darin, dass bei q_x^{aa} der Zusammenhang $X_2 < X_1$ gefordert wird, während bei i_x der Zusammenhang $X_1 \leq X_2$ besteht. Das Ereignis $\{X_1 = X_2\}$ beschreibt das zeitgleiche Eintreten von Invalidität und Tod als Aktiver. Aus der festgestellten Unsymmetrie der beiden Definitionen folgt, dass im Falle von $\{X_1 = X_2\}$ die Invalidität modellhaft zum Ausscheiden aus dem Aktivenbestand führt.

(d) Mit $q_x^a = q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{1}{2} q^i_{x+\frac{1}{2}}$ folgt:

$$
\begin{aligned}
q_x^g &= q_x^a \cdot \frac{l_x^a}{l_x^g} \quad + \quad q_x^i \cdot \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}\\
&= \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot \left(q_x^{aa} + i_x \cdot \tfrac{1}{2} q^i_{x+\frac{1}{2}}\right) \quad + \quad \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i\\
&= q_x^i \quad - \quad \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot \left(q_x^i - q_x^{aa} - i_x \cdot \tfrac{1}{2} q^i_{x+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

(e) Axiom 1 besagt, dass die Austrittszeitpunkte aus der Gesamtheit der Aktiven innerhalb des Jahres gleichverteilt sind.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) ${}_k\widehat{L}_x$ kann ganz allgemein dargestellt werden durch:

$${}_k\widehat{L}_x = {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} \cdot q_{x+k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Bezeichnungen:

- ${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+k, x+k+1]$ in der Hauptgesamtheit unmittelbar ausgelöst werden, diskontiert auf den Beginn dieses Altersintervalls

- ${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Ausscheiden im Altersintervall $]x+k, x+k+1]$ durch Ursache i ausgelöst werden, diskontiert auf den Beginn dieses Altersintervalls

- $q_x^{(i)}$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person der Hauptgesamtheit innerhalb des Intervalls $]x, x+1]$ aufgrund der Ursache i auszuscheiden

(b) Der Prämienbarwert zum Alter x lässt sich ganz allgemein darstellen als:

$${}_0B_x^P \quad = \quad \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_k\hat{P}_x \quad , \quad \text{wobei}$$

- v^k: Diskontierungsfaktor für k Jahre, $k = 0, 1, \ldots$

- ${}_kp_x$: Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person noch (mindestens) k Jahre in der Hauptgesamtheit zu verbleiben

- ${}_k\hat{P}_x$: Erwartungswert der Prämieneinnahmen des Jahres $]k, k+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit anfallen, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres ($k = 0, 1, \ldots$)

(c) Das individuelle Äquivalenzprinzip besagt, dass zum Beginn der Verpflichtung bzw. des Versicherungsvertrags der Barwert der zukünftigen Leistungen und der Barwert der zukünftigen Prämien pro Berechtigtem übereinstimmen:

$${}_0B_x^L \;=\; {}_0B_x^P$$

(d) Die prospektive Reserve ist der Betrag, der zum jeweiligen Stichtag vorhanden sein müsste, wenn der Versicherungsvertrag - im Mittel - erfüllbar sein soll; der Betrag also, der bei „rechnungsmäßigem Ablauf” des Vertrags genau ausreicht, um unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien die zukünftigen Leistungen zu erbringen.

Es gilt für die prospektive Reserve zum Alter $x+m$:

$$ {}_mV_x^{pro} \; = \; {}_mB_x^L \; - \; {}_mB_x^P \; \left(= \; \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_{x+m} \cdot ({}_{m+k}\hat{L}_x \; - \; {}_{m+k}\hat{P}_x) \right), \quad m = 0, 1, \ldots $$

(e) Der Leistungsbarwert des Anspruchs eines Rentners auf lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Rente vom Jahresbetrag 1 lautet

$$ {}_0B_x^L \;\; = \;\; \ddot{a}_x^r \; = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x^r \cdot {}_k\hat{L}_x^r \; = \; \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_kp_x^r $$

denn $\quad {}_k\hat{L}_x^r \; = \; 1 \quad$ für $x + k \geq z$.

(f) Sei $x < z$.

(i) Der Leistungsbarwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine ab Erreichen des Pensionierungsalters z lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Rente vom Jahresbetrag 1 lautet

$$ {}_0B_x^L \;\; = \;\; \ddot{a}_x^{aA} \; = \; \sum_{k=0}^{z-x} {}_kp_x^a \cdot {}_k\hat{L}_x^{aA} \; = \; v^{z-x} \cdot {}_{z-x}p_x^a \cdot \ddot{a}_z^r \;\; , $$

mit

$$ {}_k\hat{L}_x^{aA} \; = \; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x + k < z \\ \ddot{a}_z^r & \text{für} \quad x + k = z \end{cases} $$

(ii) Der Leistungsbarwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrag 1 lautet

$$ {}_0B_x^L \;\; = \;\; \ddot{a}_x^{ai} = \; \sum_{k=0}^{z-x} \; v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k\,\hat{L}_x^{ai} \; = \; \sum_{k=0}^{z-x-1} \; v^k \cdot {}_kp_x^a \cdot {}_k\,\hat{L}_x^{ai}\,, $$

mit

$$ {}_k\hat{L}_x^{ai} \quad = \quad \begin{cases} i_{x+k} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+k+\frac{1}{2}} \cdot v \cdot \ddot{a}^i_{x+k+1} & \text{für} \;\; x + k < z \\ 0 & \text{für} \;\; x + k = z\,, \end{cases} $$

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[2 Punkte]* Da es sich um eine Rentenversicherung handelt und das Langlebigkeitsrisiko abgesichert ist, kommt eine Generationensterbetafel zum Einsatz.

(b) *[5 Punkte]* Das Äquivalenzprinzip lautet:

$$P \cdot \ddot{a}_{43:\overline{17}|} = 24.000 \cdot {}_{24|}\ddot{a}_{43} + 2{,}5\,\% \cdot 17 \cdot P + 1\,\% \cdot P \cdot \ddot{a}_{43:\overline{17}|} + 30 \cdot \ddot{a}_{43:\overline{24}|} + 60 \cdot {}_{24|}\ddot{a}_{43}$$

Die Leistungsbarwerte in Standardnotation haben folgende Bedeutung:

- $\ddot{a}_{43:\overline{17}|}$: Leistungsbarwert einer temporären, jährlich vorschüssigen Rente (der Höhe 1) von Alter 43 bis Alter 60
- ${}_{24|}\ddot{a}_{43}$: Leistungsbarwert einer ab Alter 43 um 34 Jahre aufgeschobenen, lebenslangen Rente (der Höhe 1) mit jährlich vorschüssigen Zahlungen
- $\ddot{a}_{43:\overline{24}|}$: Leistungsbarwert einer temporären, jährlich vorschüssigen Rente (der Höhe 1) von Alter 43 bis Alter 67

(c) *[3 Punkte]* Der erwartete Barwert der Leistungen muss um die Komponente der Beitragsrückgewähr erweitert werden. Der erwartete Barwert der Beitragsrückgewähr kann z. B. wie folgt aufgeschrieben werden:

$$P \cdot {}_1A_{43} + 2 \cdot P \cdot {}_1E_{43} \cdot {}_1A_{44} + \ldots + 17 \cdot P \cdot {}_{16}E_{43} \cdot {}_1A_{59}$$

Mit jedem zusätzlich erlebten Jahr steigt die Todesfallleistung (also die Beitragsrückgewähr) um die zusätzlich gezahlte Prämie.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) *[1 Punkt]* n_1 gibt die Beitragszahlungsdauer an und n_2 die Zeit bis zum Rentenbeginn.

(b) *[3 Punkte]* Für $m = 0$ gilt:

$$_m\hat{L}_x = n_1 \cdot \alpha^Z \cdot P + P \cdot v \cdot q_x + \gamma_1$$

Für $0 < m < n_1$ ist:

$$_m\hat{L}_x = \gamma_1 + (m+1) \cdot P \cdot v \cdot q_{x+m}$$

Für $n_1 \leq m < n_2$ ist $_m\hat{L}_x = \gamma_1$ und sonst $_m\hat{L}_x = R + \gamma_2$.

(c) *[3 Punkte]* Es handelt sich um eine aufgeschobene Rentenversicherung mit Beitragszahlungsdauer von n_1 Jahren und einem Rentenbeginn nach n_2 Jahren. Die Rentenzahlungen von R erfolgen jährlich vorschüssig. Abschlusskosten werden einmalig in Höhe von α^Z der Beitragssumme einkalkuliert. Außerdem gibt es Verwaltungskosten der Höhe γ_1 bis Renteneintritt und in Höhe von γ_2 ab Renteneintritt. Zudem ist eine Beitragsrückgewähr (während der Beitragszahlungsdauer) vereinbart.

(d) *[1 Punkt]* Die Zuteilung der Bewertungsreserven erfolgt zum Renteneintritt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) *[4 Punkte]* Links oben ist die Kopfschadenreihe bzw. das Profil von Zahnersatz (BaFin-Werte) zu sehen. Rechts oben ist eine Kopfschadenreihe bzw. das Profil von ambulanten Leistungen dargestellt. Links unten sind Sterbewahrscheinlichkeiten visualisiert (y-Achse logarithmiert) und rechts unten sind Stornowahrscheinlichkeiten zu sehen.

(b) *[1 Punkt]* Die horizontale Achse zeigt das Alter. In den vorliegenden Abbildungen ist das Alter von 20 bis 100 dargestellt.

(c) *[3 Punkte]* Links oben (bei Kopfschäden für Zahnleistungen): 0 Euro bis 1.000 Euro, rechts oben (bei Kopfschäden): 0 Euro bis 10.000 Euro, links unten: 10^{-4} bis $10^0 = 1$, rechts unten (bei Sterbewahrscheinlichkeiten): 0 % bis 60 %.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

Die Aussagen sind alle falsch, da ...

(a) Maßgebliche Rechnungsgrundlagen sind im Kontext der Beitragsanpassung nur die Versicherungsleistungen und die Sterbewahrscheinlichkeiten (vgl. § 203 (2) VVG).

(b) Die Höhe des Rechnungszinses wird im Zuge einer Beitragsanpassung unter Verwendung des AUZ-Verfahrens durch die Aktuare des Unternehmens festgelegt.

(c) Der Auslösende Faktor für die Sterblichkeit basiert auf Leistungsbarwerten, in deren Kalkulation auch die Kopfschäden einfließen, sodass er in der Regel für jede Beobachtungseinheit eines Tarifs verschieden ist.

(d) Eine Beitragsanpassung darf nur bei einer nicht nur vorübergehenden Entwicklung erfolgen (vgl. § 203 (2) VVG).

(e) Die erforderlichen Versicherungsleistungen sind aus den beobachteten Versicherungsleistungen der letzten drei Jahre abzuleiten (vgl. § 15 (1) und (2) KVAV).

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[4 Punkte]* Exposuremaße messen – auf sehr unterschiedliche Weise – das Gefährdungspotenzial („Exposure“) eines (versicherten) Bestandes oder (seltener) einer versicherungstechnischen Einheit (Vertrag). Die Versicherungssumme einer versicherungstechnischen Einheit ist insofern ein Risikomaß, als sie – in der Schadenversicherung – den *worst case* der Höchstentschädigung angibt. Somit ist auch die kumulierte Versicherungssumme eines Bestandes als Exposuremaß aufzufassen.

(b) *[3+3 = 6 Punkte]* Die Anzahl der Jahreseinheiten oder die durchschnittliche Anzahl der Verträge ist

$$n_o = 0{,}25 + 0{,}75 + 1 + 1 + 0{,}75 = 3{,}75\,.$$

Die Summe der (Einzel-)Schäden ist der Gesamtschaden

$$S = 5 + 4 + 17 + 12 + 7 + 9 + 21 = 75\,.$$

Der Schadenbedarf ist somit:

$$SB = \frac{S}{n_O} = \frac{75}{3{,}75} = 20\,.$$

Für den Schadensatz ist die durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme zu berechnen:

$$v = 1.000 \cdot 0{,}25 + 2.000 \cdot 0{,}75 + 4.000 \cdot 1 + 4.750 \cdot 1 + 6.000 \cdot 0{,}75 = 15.000\,.$$

Der Schadensatz ist somit:

$$SS = \frac{S}{v} = \frac{75}{15.000} = 0{,}5\% = 5‰\,.$$

(Die Beiträge gehen nicht in die hier gefragten Kennzahlen ein. Aber in c).)

(c) *[4 Punkte]* Zur Beurteilung der Profitabilität sind die Schadenaufwendungen mit den Beiträgen zu vergleichen. Dazu ist die Summe der verdienten Beiträge zu berechnen:

$$b = 20 \cdot 0{,}25 + 24 \cdot 0{,}75 + 32 \cdot 1 + 44 \cdot 1 + 68 \cdot 0{,}75 = 150\,.$$

Die Schadenquote ist somit

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{75}{150} = 50\%\,.$$

Eine Schadenquote von 50 % ist als sehr gering zu bewerten. Der Bestand scheint profitabel zu sein.
(Allerdings erfordern fundierte Beurteilungen der Profitabilität mehrperiodische Betrachtungen und das Einbeziehen der Kosten.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[4 Punkte]* Als ein Risikomerkmal gilt ein Merkmal dann, wenn es in einem statistisch signifikanten Zusammenhang zu dem Schadenverhalten steht. Ein Merkmal, das im Rahmen der Tarifierung eingesetzt wird, wird als Tarifmerkmal bezeichnet. Etwa aus aufsichtsrechtlichen und/oder geschäftspolitischen Gründen werden nicht alle Risikomerkmale zur Tarifierung verwendet, wie z. B. das Risikomerkmal Geschlecht.
(Andererseits werden auch Merkmale, die keine Risikomerkmale sind, in der Tarifierung eingesetzt werden, wie z. B. Zahlungsweise, das Alter der Kinder oder Anzahl weiterer Verträge beim Unternehmen.)

(b) *[10 Punkte]* Zunächst ist der Schadenbedarf zu bestimmen:

$$\begin{aligned} sb &= \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} s_{i,j}}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_{i,j}} \\ &= \frac{150+150+200+150+350+500+50+125+125}{5+10+25+10+20+20+10+20+30} \\ &= \frac{1.800}{150} = 12 \end{aligned}$$

Da nur die Prämien für die beiden Zellen $(1,3)$ und $(2,2)$ zu berechnen sind, genügt es, die folgenden vier (statt sechs) Marginaldurchschnitte zu bestimmen:

$$sb_{1O} = \frac{s_{1\bullet}}{v_{1\bullet}} = \frac{\sum_{j=1}^{3} s_{1,j}}{\sum_{j=1}^{3} v_{1,j}} = \frac{150+150+200}{5+10+25} = \frac{500}{40} = 12{,}5$$

$$sb_{2O} = \frac{s_{2\bullet}}{v_{2\bullet}} = \frac{\sum_{j=1}^{3} s_{2,j}}{\sum_{j=1}^{3} v_{2,j}} = \frac{150+350+500}{10+20+20} = \frac{1.000}{50} = 20$$

$$sb_{O2} = \frac{s_{\bullet 2}}{v_{\bullet 2}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_{i,2}}{\sum_{i=1}^{3} v_{i,2}} = \frac{150+350+125}{10+20+20} = \frac{625}{50} = 12{,}5$$

$$sb_{O3} = \frac{s_{\bullet 3}}{v_{\bullet 3}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_{i,3}}{\sum_{i=1}^{3} v_{i,3}} = \frac{200+500+125}{25+20+30} = \frac{825}{75} = 11$$

Die gesuchten Prämien ergeben sich nun durch Multiplikation der Marginaldurchschnitte und Normierung durch den Schadenbedarf:

$$b_{1,3} = \frac{sb_{1O}\cdot sb_{O3}}{sb} = \frac{12{,}5\cdot 11}{12} = 11{,}458\ldots \approx 11{,}5$$

$$b_{2,2} = \frac{sb_{2O}\cdot sb_{O2}}{sb} = \frac{20\cdot 12{,}5}{12} = 20{,}833\ldots \approx 20{,}8$$

(c) *[2 Punkte]* Copulas modellieren die Wechselwirkungen zwischen Zufallsvariablen. Im Kontext der Tarifierung ist erwünscht, dass die Tarifmerkmale

$$(X_1, X_2, \ldots, X_r)$$

untereinander stochastisch unabhängig sind (Stichwort: Multikollinearität).
In aller Regel ist dies in der Realität nicht gegeben. Durch Copulas (und andere Ansätze) könnten die tatsächlichen Abhängigkeiten der Tarifmerkmale modelliert und somit Verzerrungen in der Tarifierung reduziert werden.

(d) *[4 Punkte]* Ein wesentlicher Unterschied der GLMs zu den anderen drei Verfahren besteht darin, dass GLMs (ohne Details) eine explizite Formel vom Typ

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_r) = g^{-1}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i\right)$$

generieren, die einem r-Tupel der Ausprägungen $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ der Tarifmerkmale eine Prämie $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ zuordnen. Im Gegensatz dazu erfordern die drei anderen Verfahren eine Einteilung in Risikoklassen und nur in Ausnahmefällen sind explizite (Prämien-)Formeln abzuleiten.
(Außerdem sind die GLMs den stochastischen Verfahren zuzuordnen, während die anderen drei verteilungsfreie Ausgleichsverfahren sind.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) *[(1+2+2) + 2 = 5 + 2 = 7 Punkte]* Die Modelle der Schadenreservierung operieren mit Variablen, die nach Anfalljahren (Jahr i des Schadeneintritts) und Abwicklungsjahren (k) strukturiert sind und in sogenannten Abwicklungsdreiecken dargestellt werden. Diese tabellarischen Dreiecke enthalten entweder

- die Zuwächse ($Z_{i,k}$) oder
- die Schadenstände ($S_{i,k}$) (= kumulierte Zuwächse)

der Schadenanzahlen, Schadenzahlungen oder Schadenaufwände für Schäden aus den betrachteten Anfall- und Abwicklungsjahren.
Die Abwicklungsdauer ist die modellhaft unterstellte Anzahl der Jahre vom Eintritt bis zur vollständigen Abwicklung eines Schadens bzw. (fast) aller Schäden eines Bestandes.
Die Struktur eines (Abwicklungs-)Dreiecks ergibt sich weniger in der Modellierung, sondern bei den Modellanwendungen in Form von Reservierungsverfahren, da diese überwiegend datenbasiert vorgehen und für weiter zurückliegende Anfalljahre Daten aus relativ vielen Abwicklungsjahren gegeben sind, während umgekehrt aus jüngeren Anfalljahren nur Beobachtungen aus wenigen Abwicklungsjahren vorliegen. Diese Gegebenheiten der sogenannten beobachtbaren Schadenstände führen zu einer Dreiecksstruktur.

(b) *[6+2 = 8 Punkte]* Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} := \frac{S_{2020,3}}{S_{2020,2}} = \frac{570}{475} = 1{,}2$$
$$\widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} := \frac{S_{2020,2} + S_{2021,2}}{S_{2020,1} + S_{2021,1}} = \frac{475 + 350}{330 + 220} = \frac{825}{550} = 1{,}5$$
$$\widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} := \frac{S_{2020,1} + S_{2021,1} + S_{2022,1}}{S_{2020,0} + S_{2021,0} + S_{2022,0}} = \frac{330 + 220 + 908}{250 + 150 + 410} = \frac{1.458}{810} = 1{,}8$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2022,3}^{\text{CL}} := S_{2022,1} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 908 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1.634{,}4$$

und

$$\widehat{S}_{2023,3}^{\text{CL}} := S_{2023,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 600 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1.944{,}0\,.$$

Für die gesuchten Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus:

$$R_{2022}^{\text{CL}} := \widehat{S}_{2022,3}^{\text{CL}} - S_{2022,1} = 1.634{,}4 - 908 = 726{,}4$$
$$R_{2023}^{\text{CL}} := \widehat{S}_{2023,3}^{\text{CL}} - S_{2023,0} = 1.944{,}0 - 600 = 1.344{,}0$$

(Die Prämien werden hier nicht benötigt.)

Beurteilung: Die Schätzer für die Endschadenquoten der beiden Jahre sind:

$$\widehat{\kappa}_{2022}^{\mathrm{CL}} := \frac{\widehat{S}_{2022,3}^{\mathrm{CL}}}{\pi_{2022}} = \frac{1.634{,}4}{1.800} = 90{,}8\%$$

und

$$\widehat{\kappa}_{2023}^{\mathrm{CL}} := \frac{\widehat{S}_{2023,3}^{\mathrm{CL}}}{\pi_{2023}} = \frac{1.944{,}0}{2.400} = 81{,}0\%$$

Das Anfalljahr 2022 weist mit einer (geschätzten) Endschadenquote von über 90 % tendenziell kritisch(er)e Gegebenheiten auf. Die absolut höheren Schäden aus 2023 sind (vermutlich) gedeckt.

(c) *[3 Punkte]* Das CC-Verfahren ist eine Robustifizierung des Loss-Development-Verfahrens. Letzteres bezieht in das Vorgehen neben den aktuellen Schadenständen $S_{i,n-i}$ vorzugebende a-priori-Schätzer $\left(\widehat{\gamma}_0, \ldots, \widehat{\gamma}_n\right)$ für die Quoten. Das CC-Verfahren operiert zusätzlich mit Volumenmaßen $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ (i. d. R. Prämieneinnahmen), mit denen eine als anfalljahrunabhängig unterstellte Endschadenquote κ (ebenfalls auf Basis der aktuellen Schadenstände) geschätzt wird.

(d) *[2 Punkte]* Grundsätzlich gehen die (Basis-)Verfahren der Reservierung davon aus, dass sämtliche Schäden innerhalb der Abwicklungsdauer von $n+1$ Jahren vollständig abgewickelt sind. In Ausnahmefällen werden sich aber auch nach dem n-ten Abwicklungsjahr noch (geringfügige) Änderungen der Schadenstände ergeben, die als Nachlauf bezeichnet werden.
(Zur Modellierung des Nachlaufs werden i. d. R. die (endlichen) Abwicklungsmuster durch unendliche Abwicklungsmuster ersetzt, sodass auch Prädiktoren der Schadenstände über das Abwicklungsjahr n hinaus berechnet werden können.)