DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12.10.2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 17 Seiten.
- Zusätzlich zu den 17 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 6 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Grundlegende Eigenschaften von Verträgen] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen.

(a) *[1 Punkt]* Welches Versicherungsprodukt wird aufsichtsrechtlich oft nicht dem Bereich der Personenversicherungen zugeordnet, obwohl es sich inhaltlich um eine Personenversicherung handelt?

(i) Berufsunfähigkeitsversicherung

(ii) Private Krankenversicherung

(iii) Private Unfallversicherung

(iv) Risikolebensversicherung

(b) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Versicherungen erfordert gemäß § 164 (1) VAG ein eigenständiges Unternehmen für die Leistungsbearbeitung?

(i) Kraftfahrzeugversicherung

(ii) Private Unfallversicherung

(iii) Rechtsschutzversicherung

(iv) Verbundene Hausratversicherung

(c) *[1 Punkt]* Mit welchem der folgenden Produkte lässt sich das Risiko der Langlebigkeit *typischerweise nicht* absichern?

(i) Basisrente

(ii) Direktversicherung

(iii) Fondsgebundene Lebensversicherung

(iv) Risikolebensversicherung

(d) *[1 Punkt]* Welches der folgenden Produkte wird mittels expliziter staatlicher *Zulagen* gefördert?

(i) Basisrente

(ii) Berufsunfähigkeitsversicherung

(iii) Pensionszusage

(iv) Riesterrente

(e) *[1 Punkt]* Welches der folgenden Produkte eines Kompositversicherers deckt *typischerweise keine* Schäden ab, die durch Elementarereignisse verursacht werden?

   (i) Kraftfahrzeug-Kaskoversicherung

   (ii) Private Haftpflichtversicherung

   (iii) Verbundene Hausratversicherung

   (iv) Verbundene Wohngebäudeversicherung

(f) *[1 Punkt]* Bei welchem der folgenden Produkte wird für die Bestimmung der Höhe möglicher Versicherungsleistungen *keine* Versicherungssumme zu Vertragsbeginn vereinbart?

   (i) Krankheitskostenvollversicherung

   (ii) Private Unfallversicherung

   (iii) Risikolebensversicherung

   (iv) Verbundene Hausratversicherung

(g) *[1 Punkt]* Bei welchem der folgenden Produkte wird die Höhe der Versicherungsleistung *typischerweise nicht* in Form einer Leistungsstaffel geregelt?

   (i) Pflegetagegeldversicherung

   (ii) Private Unfallversicherung

   (iii) Verbundene Hausratversicherung

   (iv) Zahnzusatzversicherung

(h) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Zeitdauern spielt bei der Prämienkalkulation von Lebensversicherungsprodukten *typischerweise keine* Rolle?

   (i) Abwicklungsdauer

   (ii) Aufschubdauer

   (iii) Beitragszahlungsdauer

   (iv) Leistungsdauer

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Elemente der Prämienkalkulation]* *[16 Punkte]*

Ein Kraftfahrtversicherer plant die Einführung einer „Einstiegspolice" für 18-jährige Kundenkinder. Diese dürfen damit für insgesamt 3 Jahre mit allen PKWs ihrer Eltern fahren. Falls ein Kind zum Ablauf dieser Phase einen eigenen Pkw kauft, besteht zudem das Angebot dieses Fahrzeug 4 Jahre lang mit einer günstigeren SF-Einstufung in Kraftfahrt-Haftpflicht (KH) zu versichern. Die anschließende Einstufung hängt von der Schadenanzahl N der „Einstiegspolice"ab:
Bei Schadenfreiheit über die Gesamtzeit von 3 Jahren erfolgt die Einstufung in SF 3, bei einem Schaden in SF 2 und bei zwei Schäden in SF 1, jeweils anstelle des sonst üblichen Beginns in SF 0. Bei mehr als zwei Schäden erfolgt keine Vergünstigung.
Das Kraftfahrt-Aktuariat bewertet die angebotene vergünstigte SF-Einstufung eines 18-jährigen Kindes mit folgenden vereinfachten Annahmen:

- vorschüssige jährliche Prämienzahlung bei allen Produkten des Versicherers
- $q = 50\%$ Wkt., dass nach 3 Jahren *kein* eigenes Fahrzeug versichert oder $N > 2$
- $q' = 5\%$ Wkt., dass nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert mit $N = 2$
- $q'' = 5\%$ Wkt., dass nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert mit $N = 1$
- $q''' = 40\%$ Wkt., dass nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert mit $N = 0$
- schadenfreier Verlauf der eigenen Fahrzeugpolice des Kindes in ersten 4 Jahren nach Ablauf der Einstiegspolice
- Zinssatz für Diskontierung $r = 0\%$
- kein Storno in allen Policen des Versicherers

SF-Staffel des Versicherers mit folgenden SF-Klassen und SF-Faktoren f_i^{SF} (Auszug):

SF i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	...
f_i^{SF}	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	35%	33%	...

KH-Durchschnittsbeiträge $\hat{\pi}_\bullet^x$ abhängig vom VN-Alter x *vor* Anrechnung der SF-Faktoren f_i^{SF} aus dem Bestand des Versicherers:

Alter x	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	...
$\hat{\pi}_\bullet^x$	1300	1200	1100	1000	900	800	700	650	620	600	...

Beispielsweise lautet der durchschnittliche KH-Beitrag eines 19-jährigen Fahrers in SF 1 hiermit $\hat{\pi}_1^{19} = \hat{\pi}_\bullet^{19} \cdot f_1^{SF} = 1200 \cdot 90\% = 1080$.

(a) *[1 Punkt]* Geben Sie die Versicherungsdauer n und die Leistungsdauer n^+ der beschriebenen „Einstiegspolice“ (jeweils in Jahren) an.

(b) *[10 Punkte]* Berechnen Sie die Leistung L_t bzgl. der SF-Besserstellung in der Sparte KH mittels der Größen $\hat{\pi}^x_\bullet$ und f_i^{SF} für jeden Zeitpunkt t der aus (a) abgeleiteten Modelldauer $\bar{n}$.
Verwenden Sie dabei Fallunterscheidungen, wo erforderlich, und geben Sie für die verschiedenen Fälle die jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten an.

(c) *[5 Punkte]* Berechnen Sie den erwarteten SF-Anwartschaftsbarwert $\mathrm{E}(L)$ eines 18-jährigen Kindes für die Sparte KH basierend auf Ihren Ergebnissen aus (b).

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Modelle der Risikotheorie, Prämienprinzipien] [12 Punkte]*

Der Gesamtaufwand S^{koll} eines Risikos soll für die Tarifkalkulation analysiert werden mittels kollektivem Modell:

$$S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

Es ist bekannt, dass die Anzahl der Finanzaufwände N eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 0{,}5$ aufweist und die Höhen der Finanzaufwände X_j eine Exponentialverteilung mit Erwartungswert 2.000 besitzen.
Alle Zufallsvariablen werden als stochastisch unabhängig angenommen.

(a) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die Bruttorisikoprämie P^+ des Risikos S^{koll} mittels Varianzprinzip mit dem Parameter $\delta = 0{,}00005$.

(b) *[4 Punkte]* Es soll nun ein allgemeiner Vergleich zwischen kollektivem und individuellen Modell der Risikotheorie durchgeführt werden. Geben Sie eine analoge Formel zur obigen Formel für das individuelle Modell an und nennen Sie anhand Ihrer Formel drei wesentliche Unterschiede zum kollektivem Modell.

(c) *[2 Punkte]* Zeigen Sie mit einem Beweis, dass das *Varianzprinzip* für zwei stochastisch unabhängige Risiken R_1 und R_2 additiv ist.

(d) *[2 Punkte]* Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass das *Standardabweichungsprinzip* für zwei stochastisch unabhängige Risiken R_1 und R_2 <u>nicht</u> additiv ist. Verwenden Sie als Beispiel zwei *exponentialverteilte* Zufallsvariablen.

Aufgabe 4. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [12 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Was ist ein Exposuremaß? Welche Gütekriterien für Exposuremaße gibt es? Nennen Sie drei bekannte Exposuremaße.

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

Risiko	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen	
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter
1	01.01.	**30.09.**	100	6		
2	01.01.	**30.06.**	200	9	5	
3	01.01.	31.12.	200	11	10	20
4	**01.04.**	31.12.	500	20		
5	01.01.	31.12.	500	30	2	3

Berechnen Sie den Schadendurchschnitt und den Schadengrad dieses Bestandes.

(c) *[2 Punkte]* Ist die Profitabilität eines Bestandes (nicht speziell der Bestand aus (b)) gewährleistet, wenn die Schadenquote unter 100 % liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Was ist im Kontext der Tarifierung eine Risikoklasse?

(b) *[3 Punkte]* Ist das Geschlecht der versicherten Person(en) in der Schadenversicherung (in der EU) in der Regel ein Risikomerkmal und/oder ein Tarifmerkmal?

(c) *[10 Punkte]* Skizzieren Sie ein geeignetes additives Modell zur Tarifierung in der PKW-Haftpflichtversicherung, bei dem die Nettorisikoprämien in Abhängigkeit der drei Merkmale *Bundesland*, *PS* und *jährliche Kilometerleistung* angesetzt werden.
Hinweis: Verzichten Sie sowohl auf die Spezifizierung der möglichen Merkmalsausprägungen als auch auf die Angabe bzw. Schätzung etwaiger konkreter Zahlenwerte. Beschreiben Sie also ausschließlich den allgemeinen Modellansatz.

(d) *[4 Punkte]* Was beschreibt die Multikollinearität? Was hat der Begriff mit der Auswahl der Tarifmerkmale zu tun?

(e) *[3 Punkte]* Erläutern Sie grob den Einsatz verallgemeinerter linearer Modelle (GLM) in der Tarifierung.

Aufgabe 6. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Was versteht man unter einem Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse?

(b) *[11 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2015 bis 2018 die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2015	250	400	500	525
2016	300	600	700	
2017	240	422		
2018	400			

(i) *[6 Punkte]* Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2017 und 2018 mit dem Chain-Ladder-Verfahren.

(ii) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie die Loss-Development-Prädiktoren für das Anfalljahr 2018 unter Verwendung der a-priori-Schätzer

$$\widehat{\gamma}_0 = 0,60, \widehat{\gamma}_1 = 0,85, \widehat{\gamma}_2 = 0,95, \widehat{\gamma}_3 = 1,00$$

für die Quoten der Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$.
Hinweis: Die Schätzer der Reserven und Prädiktoren sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

(c) *[3 Punkte]* Was ist (unabhängig von der Tabelle in (b)) im Kontext der Reservierung der Nachlauf?

Aufgabe 7. *[Personenversicherungsmathematik, Zustandsmodell] [18 Punkte]*

Wir betrachten im Rahmen des allgemeinen Bevölkerungsmodells der Personenversicherungsmathematik das Modell einer zusammengesetzten Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden Ausscheideursachen

1. Invalidität und
2. Tod.

Es bedeuten auf der Basis eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bei einem Aktiven die folgenden Zufallsvariablen:

X_1: Alter bei Eintritt der Invalidität bei Geburtsjahrgang G
X_2: Alter bei Eintritt des Todes bei Geburtsjahrgang G

Es gilt insbesondere die Voraussetzung der Zyklenfreiheit.

(a) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die beiden Begriffe der Zwillingsfreiheit und der Zyklenfreiheit in diesem Modell.

(b) *[10 Punkte]* Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus:

- q_x^1: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der Aktiven durch Tod auszuscheiden
- q_x^2: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres zu versterben
- q_x^3: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der Aktiven durch Invalidität auszuscheiden und noch im gleichen Jahr als Invalider zu versterben
- q_x^4: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der Aktiven durch Invalidität auszuscheiden
- q_x^5: Wahrscheinlichkeit eines Invaliden des Alters x innerhalb eines Jahres aus dem Bestand der Invaliden durch Tod auszuscheiden

(c) *[4 Punkte]* Das obige Bevölkerungsmodell findet insbesondere in den Heubeck-Richttafeln 2018 G Anwendung.
Stellen Sie q_x^2 mit Hilfe der dort verwendeten Bezeichnungen für q_x^1, q_x^4 und q_x^5 dar.
Hinweis: Gefordert ist damit insbesondere, dass nur einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten bezogen auf $x \in \mathbb{N}_0$ in der Darstellung verwendet werden.

Aufgabe 8. *[Personenversicherungsmathematik, Prämien und Reserven] [12 Punkte]*

Wir betrachten im allgemeinen Bevölkerungsmodell der Personenversicherungsmathematik eine zum Vertragsbeginn x-jährige Person der Hauptgesamtheit bezüglich der h Ereignisse auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanwartschaften führen. Es bestehe folgende Verpflichtung:

- Bei Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit im Altersintervall $]x+m, x+m+1]$ aufgrund der Ausscheideursache i, $i = 1, \ldots, h$, wird die Reserve zum Ende des Jahres ${}_{m+1}V_x$ am Ende des Jahres ausgezahlt.
- Bei Erreichen der Altersgrenze z wird eine Altersleistung fällig, deren Barwert mit ${}_nL_x^{(0)}$ bezeichnet werde (mit $n = z - x$).

(a) *[8 Punkte]* Bekanntlich wird mit ${}_m\hat{L}_x$ der Erwartungswert der gesamten Leistung bezeichnet, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x + m, x + m + 1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres.

Geben Sie ${}_m\hat{L}_x, m = 0, 1, \ldots, n$, für die beschriebene Verpflichtung an und berechnen Sie die Prämie ${}_m\hat{P}_x, m = 0, 1, \ldots, n-1$.

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie nun die Sparprämie ${}_mP_x^S$ und die Risikoprämie ${}_mP_x^R$ für $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 9. *[Personenversicherungsmathematik, Erfüllungsbetrag] [6 Punkte]*

Es seien M und N Zufallsvariablen eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dabei sei:

> M: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod eines x-jährigen Mannes und
> N: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod einer y-jährigen Frau

mit M und N unabhängig.

Wir betrachten folgende Erfüllungsbeträge von ungewissen Verpflichtungen:

$$B_1 = v^{\min(M,N)+1}$$

$$B_2 = \ddot{a}_{\overline{\min(M,N)+1}|}$$

$$B_3 = v^{M+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{N-M}|} \cdot 1_{\{N>M\}}$$

Beschreiben Sie genau, um welche Art Verpflichtungen es sich bei B_1, B_2 und B_3 handelt (insbesondere unter Angabe wie viele Zahlungen zu leisten sind und wann diese fällig werden).

Aufgabe 10. *[Lebensversicherungsmathematik, Standardformeln] [8 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Menge der möglichen Zahlungsströme einer aufgeschobenen Rentenversicherung.
Wie lautet die Formel für den Erwartungswert des Erfüllungsbetrags?
(Konditionen der Versicherung:
jährliche Rentenhöhe 12.000; Alter bei Vertragsbeginn 45; Alter bei Rentenbeginn 65; die Renten werden am Jahresanfang vorschüssig gezahlt)

(b) *[3 Punkte]* Wie lautet das Äquivalenzprinzip, mit dem eine konstante jährlich vorschüssige Nettoprämie einer aufgeschobenen Rentenversicherung kalkuliert werden kann?
Leiten Sie damit eine Formel für die Prämie her, wenn die Prämienzahlung nur während der Aufschubphase erfolgt. Verwenden Sie dabei die Konditionen wie aus Teil (a). Kalkulieren Sie außerdem einen beitragsproportionalen Kostenschlag in Höhe von 5 % während der Beitragszahlungsdauer und einen rentenproportionalen Kostenzuschlag in Höhe von 1 % in der Rentenphase ein.
Bitte benutzen Sie die aktuarielle Notation für Leistungsbarwerte.

(c) *[2 Punkte]* Welche Art von Sterbetafel kommt für die Kalkulation in (a) und (b) zum Einsatz? Warum?

Aufgabe 11. *[Lebensversicherungsmathematik, Beteiligung an Bewertungsreserven] [10 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Was sind Bewertungsreserven (Stille Reserven/Stille Lasten)?

(b) *[5 Punkte]* Wie werden Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven beteiligt?
Gehen Sie insbesondere auch auf die Bewertungsreserven bei festverzinslichen Wertpapieren ein und erläutern Sie den Begriff des „Sicherungsbedarfs“.

(c) *[3 Punkte]* Wann sind Verträge für eine Beteiligung an Bewertungsreserven anspruchsberechtigt?
Geben Sie sowohl ein Beispiel für eine anspruchsberechtigte als auch für eine nicht anspruchsberechtigte Lebensversicherung an.

Aufgabe 12. *[Pensionsversicherungsmathematik, Besonderheiten der Prämien- und Reserveermittlung] [18 Punkte]*

In den internationalen Bilanzierungsstandards (IFRS und US-GAAP) findet die Projected Unit Credit Methode Anwendung, nach der die Rückstellung für übliche Leistungszusagen in folgender Form dargestellt werden kann:

$$_mV_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k \cdot {_kp^a_{x+m}} \cdot \tfrac{m}{m+k} \cdot {_{m+k}\hat{L}_x} \quad m = 0, 1, \ldots, n$$

Wir betrachten dabei wieder eine zum Vertragsbeginn x-jährige Person der Hauptgesamtheit der Aktiven bezüglich der die Ereignisse Invalidität und Tod auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanwartschaften führen.
$_{m+k}\hat{L}_x$ bezeichne den Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+m+k, x+m+k+1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres.
n bezeichne die Anzahl der Jahre bis zum Pensionierungsalter z, also $n = z - x$.

(a) *[10 Punkte]* Zeigen Sie mittels der versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen, dass sich die Prämie in dieser Definition der Projected Unit Credit Methode wie folgt darstellen lässt:

$$_m\hat{P}_x = \sum_{k=1}^{n-m} v^k \cdot {_kp^a_{x+m}} \cdot \tfrac{1}{m+k} \cdot {_{m+k}\hat{L}_x} \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

(b) *[8 Punkte]* Wir betrachten nun eine Verpflichtung, die nur eine ab dem Pensionierungsalter z beginnende, lebenslänglich laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vorsehe. Weitere Leistungen werden nicht gewährt.

Zeigen Sie, dass für eine solche Zusage in der Projected Unit Credit Methode ein steigender Prämienverlauf angesetzt wird, d.h. es gilt:

$$_m\hat{P}_x \leq {_{m+1}\hat{P}_x} \quad m = 0, 1, \ldots, n-2$$

Aufgabe 13. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [8 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Was verstehen Aktuare in der Krankenversicherung unter Wartezeit- und Selektionsersparnissen?

(b) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Methode von Rusam und die mit dieser Methode verbundenen Vorteile für die Kalkulation.

(c) *[2 Punkte]* Skizzieren Sie approximativ den Kopfschadenverlauf in Abhängigkeit vom Alter für Zahnersatz-Leistungen.

Aufgabe 14. *[Krankenversicherungsmathematik, Beitragsanpassungsklausel] [10 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Warum gibt es in der Privaten Krankenversicherung für gewisse Produkte eine Beitragsanpassungsklausel?

(b) *[4 Punkte]* Wie ist der Auslösende Faktor für die Kopfschäden definiert?
Erläutern Sie in diesem Zusammenhang jeweils unter Angabe einer Formel und einer Erklärung aller verwendeten Größen auch die Begriffe „erforderliche Versicherungsleistungen" sowie „kalkulierte Versicherungsleistungen".

(c) *[3 Punkte]* Die Neugeschäftsprämien (netto) in Abhängigkeit vom Alter seien wie folgt gegeben:

Eintrittsalter	25	30	35	40	45
Nettoprämie (in Euro)	1.255	1.547	1.856	2.183	2.541

Wir betrachten eine Person mit Vertragsabschluss im Alter 30 sowie eine zweite Person mit Vertragsabschluss im Alter 35.
Wie hoch fällt jeweils die Beitragsanpassung nach fünf Jahren aus, wenn alle Kopfschäden nach fünf Jahren um 10 % gestiegen sind? (Netto-Betrachtung)
Erläutern Sie die Ergebnisse für die beiden Personen und gehen Sie dabei insbesondere auch auf Unterschiede ein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

[jeweils 1 Punkt]

(a): (iii) (b): (iii) (c): (iv) (d): (iv) (e): (ii) (f): (i) (g): (iii) (h): (i)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[1 Punkt, es genügt die Angabe der Dauern, die genannten Begründungen dienen lediglich der Erläuterung.]*

- Versicherungsdauer $n = 3$ Jahre, nämlich für Fahren mit PKWs der Eltern und Entscheidung in $t = 3$ über optional anschließende SF-Besserstellung
- Leistungsdauer $n^+ = 7$ Jahre, nämlich 3 Jahre Versicherungsschutz als weiterer Fahrer ($t = 0$ bis $t = 3$) und optional 4 Jahre Beitragsersparnis durch vergünstigte SF-Einstufung ($t = 3$ bis $t = 7$)

(b) *[10 Punkte]* Aus a) folgt für die Modelldauer $\bar{n} = \max\{n\,;n^+\} = \max\{3\,;7\} = 7$. Die Leistungen L_t ($t = 0,\dots,7$) lauten unter der Voraussetzung eines 4 Jahre schadenfreien Verlaufs der eigenen Fahrzeugpolice des Kindes wie folgt:

$$L_0 = 0$$

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 0$$

$$L_3 = \begin{cases} 0 & \text{mit Wkt. } q \\ \hat{\pi}_0^{21} - \hat{\pi}_1^{21} = \hat{\pi}_\bullet^{21} \cdot \left(f_0^{SF} - f_1^{SF}\right) = 1000 \cdot (100\% - 90\%) = 100 & \text{mit Wkt. } q' \\ \hat{\pi}_0^{21} - \hat{\pi}_2^{21} = \hat{\pi}_\bullet^{21} \cdot \left(f_0^{SF} - f_2^{SF}\right) = 1000 \cdot (100\% - 80\%) = 200 & \text{mit Wkt. } q'' \\ \hat{\pi}_0^{21} - \hat{\pi}_3^{21} = \hat{\pi}_\bullet^{21} \cdot \left(f_0^{SF} - f_3^{SF}\right) = 1000 \cdot (100\% - 70\%) = 300 & \text{mit Wkt. } q''' \end{cases}$$

$$L_4 = \begin{cases} 0 & \text{mit Wkt. } q \\ \hat{\pi}_0^{22} - \hat{\pi}_1^{22} = \hat{\pi}_\bullet^{22} \cdot \left(f_1^{SF} - f_2^{SF}\right) = 900 \cdot (90\% - 80\%) = 90 & \text{mit Wkt. } q' \\ \hat{\pi}_0^{22} - \hat{\pi}_2^{22} = \hat{\pi}_\bullet^{22} \cdot \left(f_1^{SF} - f_3^{SF}\right) = 900 \cdot (90\% - 70\%) = 180 & \text{mit Wkt. } q'' \\ \hat{\pi}_0^{22} - \hat{\pi}_3^{22} = \hat{\pi}_\bullet^{22} \cdot \left(f_1^{SF} - f_4^{SF}\right) = 900 \cdot (90\% - 60\%) = 270 & \text{mit Wkt. } q''' \end{cases}$$

$$L_5 = \begin{cases} 0 & \text{mit Wkt. } q \\ \hat{\pi}_0^{23} - \hat{\pi}_1^{23} = \hat{\pi}_\bullet^{23} \cdot \left(f_2^{SF} - f_3^{SF}\right) = 800 \cdot (80\% - 70\%) = 80 & \text{mit Wkt. } q' \\ \hat{\pi}_0^{23} - \hat{\pi}_2^{23} = \hat{\pi}_\bullet^{23} \cdot \left(f_2^{SF} - f_4^{SF}\right) = 800 \cdot (80\% - 60\%) = 160 & \text{mit Wkt. } q'' \\ \hat{\pi}_0^{23} - \hat{\pi}_3^{23} = \hat{\pi}_\bullet^{23} \cdot \left(f_2^{SF} - f_5^{SF}\right) = 800 \cdot (80\% - 50\%) = 240 & \text{mit Wkt. } q''' \end{cases}$$

$$L_6 = \begin{cases} 0 & \text{mit Wkt. } q \\ \hat{\pi}_0^{24} - \hat{\pi}_1^{24} = \hat{\pi}_\bullet^{24} \cdot \left(f_3^{SF} - f_4^{SF}\right) = 700 \cdot (70\% - 60\%) = 70 & \text{mit Wkt. } q' \\ \hat{\pi}_0^{24} - \hat{\pi}_2^{24} = \hat{\pi}_\bullet^{24} \cdot \left(f_3^{SF} - f_5^{SF}\right) = 700 \cdot (70\% - 50\%) = 140 & \text{mit Wkt. } q'' \\ \hat{\pi}_0^{24} - \hat{\pi}_3^{24} = \hat{\pi}_\bullet^{24} \cdot \left(f_3^{SF} - f_6^{SF}\right) = 700 \cdot (70\% - 40\%) = 210 & \text{mit Wkt. } q''' \end{cases}$$

$$L_7 = 0$$

Gemäß Aufgabenstellung gilt für die Eintrittswahrscheinlichkeiten der vier möglichen Fälle:

- nach 3 Jahren *kein* eig. Fahrzeug versichert oder $N > 2$ mit Wkt. $q = 50\%$
- nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert in SF 1 mit Wkt. $q' = 5\%$
- nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert in SF 2 mit Wkt. $q'' = 5\%$
- nach 3 Jahren eigenes Fahrzeug versichert in SF 3 mit Wkt. $q''' = 40\%$

(c) *[5 Punkte]* Der erwartete SF-Anwartschaftsbarwert $\mathrm{E}(L)$ lässt sich berechnen als diskontierte wahrscheinlichkeitsgewichtete Summe aller möglichen Beitragsersparnisse L_t $(t = 0, \ldots, 7)$. Zunächst gilt für die Erwartungswerte der einzelnen Versicherungsleistungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(L_i) &= 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 7)\\
\mathrm{E}(L_3) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 100 + 0{,}05 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 300 = 135\\
\mathrm{E}(L_4) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 90 + 0{,}05 \cdot 180 + 0{,}4 \cdot 270 = 121{,}5\\
\mathrm{E}(L_5) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 80 + 0{,}05 \cdot 160 + 0{,}4 \cdot 240 = 108\\
\mathrm{E}(L_6) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 70 + 0{,}05 \cdot 140 + 0{,}4 \cdot 210 = 94{,}5\\
&\Rightarrow \mathrm{E}(L) = \sum_{t=0}^{7} D(t) \cdot \mathrm{E}(L_t) = \sum_{t=0}^{7} \frac{\mathrm{E}(L_t)}{1{,}00^t} = 135 + 121{,}5 + 108 + 94{,}5 = 459
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a) *[4 Punkte]* Anmerkung: Wegen $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ist S^{koll} zusammengesetzt Poisson-verteilt.

Für die Verteilung der Höhe der Finanzaufwände X gilt (1 Punkt):

$$
\begin{aligned}
X \sim Exp(\alpha),\ \mathrm{E}(X) = 2000 = \frac{1}{\alpha} \qquad &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2000} \\
&\Rightarrow \mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= 2000^2 + 2000^2 = 8.000.000
\end{aligned}
$$

Die erste und zweite Formel von Wald für Erwartungswert und Varianz von S^{koll} vereinfachen sich im Spezialfall der zusammengesetzten Poissonverteilung wie folgt (jeweils 1 Punkt):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) &= \lambda \cdot \mathrm{E}(X) = 0{,}5 \cdot 2000 = 1000 \\
\mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) &= \lambda \cdot \mathrm{E}\left(X^2\right) = 0{,}5 \cdot 8.000.000 = 4.000.000.
\end{aligned}
$$

Gemäß Varianzprinzip gilt für die Bruttorisikoprämie (1 Punkt):

$$P^+ = H\left(S^{\text{koll}}\right) = \mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) + \delta \cdot \mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = 1000 + 0{,}00005 \cdot 4.000.000 = 1200$$

(b) *[4 Punkte]* Eine analoge Formel für das individuelle Modell lautet (1 Punkt):

$$\text{Zufallsvariable} \quad S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Folgende wesentlichen Unterschiede lassen sich benennen (jeweils 1 Punkt, in der Aufgabenstellung sind nur 3 Punkte gefordert):

- Im individuellen Modell beschreibt n die Anzahl der individuell betrachteten Risiken und ist *deterministisch*, während im kollektiven Modell N die Anzahl der Finanzaufwände beschreibt und eine *Zufallsvariable* ist.

- Im individuellen Modell berechnet sich der Gesamtaufwand als *endliche Summe*, während er im kollektiven Modell eine *Zufallssumme* darstellt.

- Im individuellen Modell beschreiben die Y_i jeweils den *kumulierten Finanzaufwand* eines Risikos, während im kollektiven Modell die betrachten X_j jeweils die *Höhe eines einzelnen Finanzaufwands* beschreiben.

- Die Y_i können jeweils *mit positiver Wahrscheinlichkeit den Wert Null* annehmen, während die X_j jeweils *strikt positiv*, also insbesondere ungleich Null, sind.

- Die Y_i sind im Allgemeinen (abgesehen vom Fall Spezialfall eines homogenen Kollektivs) stochastisch unabhängig, aber *nicht notwendigerweise identisch verteilt*, während die X_j per Voraussetzung unabhängig und *identisch verteilt* sind.

(c) *[2 Punkte]* Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned} H(R_1+R_2) &= \mathrm{E}(R_1+R_2)+\delta\cdot\mathrm{Var}(R_1+R_2) \\ &= \mathrm{E}(R_1)+\mathrm{E}(R_2)+\delta\cdot\mathrm{Var}(R_1+R_2) \\ &= \mathrm{E}(R_1)+\mathrm{E}(R_2)+\delta\cdot(\mathrm{Var}(R_1)+\mathrm{Var}(R_2)) \\ &= \mathrm{E}(R_1)+\delta\cdot\mathrm{Var}(R_1)+\mathrm{E}(R_2)+\delta\cdot\mathrm{Var}(R_2) = H(R_1)+H(R_2). \end{aligned}$$

Die erste und letzte Identität ergibt sich direkt aus der Definition des Varianzprinzips, die zweite Identität folgt aus der Linearität des Erwartungswerts und die dritte Identität gilt für die Varianz unter der getroffenen Voraussetzung, dass R_1 und R_2 stochastisch unabhängig sind.

(d) *[2 Punkte; hier sind verschiedene Gegenbeispiele möglich]*
Widerlegung der Behauptung durch Gegenbeispiel $R_1,\, R_2 \sim Exp(1)$

Einerseits gilt für $i = 1,\, 2$:

$$\mathrm{E}(R_i)=1,\ \mathrm{Var}(R_i)=1 \quad \Rightarrow H(R_i)=\mathrm{E}(R_i)+\delta\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(R_i)}=1+\delta\cdot\sqrt{1}=1+\delta$$

Andererseits gilt für die Faltung der beiden Exponentialverteilungen:

$$\begin{aligned} R_1+R_2\sim\Gamma(1,2) \quad &\Rightarrow \mathrm{E}(R_1+R_2)=\frac{2}{1}=2,\ \mathrm{Var}(R_1+R_2)=\frac{2}{1^2}=2 \\ &\Rightarrow H(R_1+R_2)=\mathrm{E}(R_1+R_2)+\delta\cdot\mathrm{Var}(R_1+R_2)=2+\delta\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{2} < 2$ ergibt sich für beliebiges $\delta > 0$:

$$H(R_1+R_2)=2+\delta\cdot\sqrt{2}\neq 2+\delta\cdot 2=H(R_1)+H(R_2)$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) *[4 Punkte]* Exposuremaße messen das Gefährdungspotenzial (Exposure) eines (versicherten) Bestandes oder (seltener) einer versicherungstechnischen Einheit (Vertrag). Entsprechend bewerten Exposuremaße das versicherungstechnische Risiko bzw. den Schadenbedarf eines Bestandes oder einer versicherungstechnischen Einheit. Qualitätskriterien für Exposuremaße sind

- die Proportionalität zum Risiko,
- die Praktikabilität und
- die Zeitstabilität des Maßes.

Bekannte Beispiele für Exposuremaße (für Bestände) sind die folgenden Volumenmaße:

- Jahreseinheiten = Anteile eines Jahres, für die Versicherungsschutz besteht,
- Anzahl der Verträge,
- Anzahl der Risiken,
- Anzahl der Risiken,
- kumulierte Versicherungssumme,
- Summe der Beiträge.

(b) *[6 Punkte]* Wegen

$$S = \text{Gesamtschaden} = 5 + 10 + 20 + 2 + 3 = 40$$

und der Schadenanzahl $N = 5$ ergibt sich der Schadendurchschnitt als

$$SD = \frac{S}{N} = \frac{40}{5} = 8.$$

Für den Schadengrad SD ist noch die durchschnittliche Versicherungssumme v_0 unter Berücksichtigung der Jahreseinheiten zu bestimmen:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\text{Durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} = \frac{v}{n_0} \\ &= \frac{100 \cdot 0{,}75 + 200 \cdot 0{,}5 + 200 \cdot 1 + 500 \cdot 0{,}75 + 500 \cdot 1}{0{,}75 + 0{,}5 + 1 + 0{,}75 + 1} \\ &= \frac{1.250}{4} \\ &= 312{,}5 \end{aligned}$$

Der Schadengrad beträgt somit

$$SG = \frac{SD}{v_0} = \frac{8}{312{,}5} = 2{,}56\ \% = 25{,}6\ ‰.$$

(c) *[2 Punkte]* Eine Schadenquote unter 100 % sichert keinesfalls die Profitabilität eines Bestandes, da sie – im Gegensatz zur *Combined Ratio* – die Kosten des Versicherungsver- und -betriebs noch nicht berücksichtigt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) *[2 Punkte]* Eine Risikoklasse besteht aus genau den Risiken, die bei sämtlichen Tarifmerkmalen die gleichen Ausprägungen aufweisen. (Risikoklassen werden auch als Tarifklassen oder Tarifzellen bezeichnet.)

(b) *[3 Punkte]* Seit Einführung der EU-weiten Unisex-Tarifierung 2012 ist das Geschlecht nicht mehr als Tarifmerkmal zugelassen. In den meisten Zweigen der Schadenversicherung zählt es auch nicht zu den relevanten Risikomerkmalen. Ausnahmen sind die Unfall- und Kraftfahrtversicherung.

(c) *[10 Punkte]* In die Modellierung gehen insbesondere die folgenden Größen ein:

$$r := \text{Anzahl der Tarifmerkmale} = 3$$

$$M_1 := \text{1. Tarifmerkmal = Bundesland (Region)}$$

$$M_2 := \text{2. Tarifmerkmal = PS (kw) des versicherten PKW}$$

$$M_3 := \text{3. Tarifmerkmal = Jährliche Kilometerleistung (in km)}$$

$$n_k := \text{Anzahl der verschiedenen Ausprägungen des } k\text{-ten Tarifmerkmals, } k = 1, 2, 3$$

$$a_{j,k} := j\text{-te Ausprägung des } k\text{-ten Tarifmerkmals, } j = 1, \ldots, n_k;\ k = 1, 2, 3$$

Jedem Risiko wird das Tripel der Ausprägungen:

$$\left(a_{i_1,1}, a_{i_2,2}, a_{i_3,3}\right)$$

der drei Tarifmerkmale zugeordnet. Dieser Vektor legt dann genau eine Risikoklasse = Tarifzelle durch das Tripel (i_1, i_2, i_3) eindeutig fest. Mit dem Schadenbedarf des gesamten Bestandes:

$$sb = \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Kumulierte Jahreseinheiten (Volumenmaße)}}$$

wird die Nettorisikoprämie b_{i_1,i_2,i_3} für die Tarifzelle (i_1, i_2, i_3) in einem additiven Modell angesetzt als:

$$b_{i_1,i_2,i_3} = sb + u_{1,i_1} + u_{2,i_2} + u_{3,i_3}.$$

Dabei sind die Größen u_{k,i_k} die Marginalsummanden, die den mittleren additiven Einfluss der Ausprägungen auf die Schadenaufwendungen quantifizieren, $j = 1, \ldots, n_k; k = 1, 2, 3.$ Sie sind im Rahmen der verschiedenen Tarifierungsverfahren geeignet festzulegen.

(d) *[4 Punkte]* Multikollinearität ist eine unerwünschte Eigenschaft in (Regressions-) Modellen der multivariaten Statistik mit mehreren erklärenden Variablen. Sie liegt vor, wenn die erklärenden Variablen nicht unkorreliert, also auch nicht stochastisch unabhängig sind. Bei der Auswahl von mehr als einem Tarifmerkmal ist anzustreben, dass die ausgewählten Tarifmerkmale möglichst keine Multikollinearität aufweisen. Andernfalls kann es zu Verzerrungen bei Schätzern für die Modellparameter und bei Konfidenzintervallen kommen. So könnten z. B. gleichartige Einflüsse fälschlich mehrfach in die Prämien eingehen.

(e) *[3 Punkte]* Die verallgemeinerten linearen Modelle (GLM) entsprechen dem Ansatz

$$g\left(E(Y|X=x)\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot x_i$$

Dabei ist im Kontext der Tarifierung Y der zufällige (zu erklärende) Schadenaufwand (abhängige Variable/Regressand) und $X = (X_1, \ldots, X_r)$ ist der Zufallsvektor der r Tarifmerkmale (unabhängige Variablen/Regressanden). Das obige GLM setzt also den (durch die Link-Funktion g) transformierten bedingten Erwartungswert des Schadenaufwands, gegeben die Realisierungen $(x_1, \ldots, x_r)$ der Tarifmerkmale, als multiple lineare Funktion an.
Die (Regressions-)Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_r$ sind geeignet zu schätzen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[6 Punkte]* Abwicklungsmuster unterstellen generell für ausgewählte zentrale Kennzahlen der Schadenabwicklung bestimmte Systematiken und erklären die Abweichungen von diesen systematischen Größen (Erwartungswerte) als zufällige und unsystematische Schwankungen. Abwicklungsmuster speziell für Schadenquotenzuwächse verwenden die folgenden Größen:

$$Z_{i,k} = \text{ (Schadenstand-)Zuwachs im } k\text{-ten Abwicklungsjahr für das Anfalljahr } i$$

$$\pi_i = \text{Prämieneinnahmen (Volumenmaß) in Anfalljahr } i.$$

Somit bilden für jedes Anfalljahr i die erwarteten Schadenzuwächse im k-ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu den (deterministischen) Prämieneinnahmen die erwarteten Schadenquotenzuwächse

$$\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$$

Ein Abwicklungsmuster für diese erwarteten Schadenquotenzuwächse unterstellt, dass es anfalljahrunabhängige Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ gibt mit

$$\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$$

(b) (b1) *[6 Punkte]* Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} &:= \frac{S_{2015,3}}{S_{2015,2}} = \frac{525}{500} = 1{,}05 \\
\widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} &:= \frac{S_{2015,2} + S_{2016,2}}{S_{2015,1} + S_{2016,1}} = \frac{500+700}{400+600} = \frac{1.200}{1.000} = 1{,}20 \\
\widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} &:= \frac{S_{2015,1} + S_{2016,1} + S_{2017,1}}{S_{2015,0} + S_{2016,0} + S_{2017,0}} = \frac{400+600+422}{250+300+240} = \frac{1.422}{790} = 1{,}80
\end{aligned}$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2017,3}^{\text{CL}} := S_{2017,1} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 422 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}05 = 531{,}7$$

und

$$\widehat{S}_{2018,3}^{\text{CL}} := S_{2018,0} \cdot \widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 400 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}05 = 907{,}2$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
R_{2017}^{\text{CL}} &:= \widehat{S}_{2017,3}^{\text{CL}} - S_{2017,1} = 531,7 - 422 = 109{,}7 \\
R_{2018}^{\text{CL}} &:= \widehat{S}_{2018,3}^{\text{CL}} - S_{2018,0} = 907,2 - 400 = 507{,}2
\end{aligned}$$

(b2) *[5 Punkte]* Beim Loss–Development–Verfahren werden die aktuellen Schadenstände $S_{i,2018-i}$ per Division durch den Schätzer $\widehat{\gamma}_{2018-i}$ auf das Niveau des letzten Abwicklungsjahres n hochgerechnet und mit dem Faktor $\widehat{\gamma}_k$ auf das Niveau des k-ten Abwicklungsjahrs zurück skaliert (nur Erläuterung, nicht erforderlich für Lösung). Die zugehörigen LD–Prädiktoren sind somit:

$$\widehat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} := \widehat{\gamma}_k \cdot \frac{S_{i,2018-i}}{\widehat{\gamma}_{2018-i}}, \quad i = 2016, 2017, 2018; \quad k = 2018-i, \ldots, 3$$

Konkret für das Anfalljahr 2018 ergeben sich die LD-Prädiktoren:

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{2018,1}^{\mathrm{LD}} &= \widehat{\gamma}_1 \cdot \frac{S_{2018,0}}{\widehat{\gamma}_0} = 0{,}85 \cdot \frac{400}{0{,}60} = 566{,}7 \\
\widehat{S}_{2018,2}^{\mathrm{LD}} &= \widehat{\gamma}_2 \cdot \frac{S_{2018,0}}{\widehat{\gamma}_0} = 0{,}95 \cdot \frac{400}{0{,}60} = 633{,}3 \\
\widehat{S}_{2018,3}^{\mathrm{LD}} &= \widehat{\gamma}_3 \cdot \frac{S_{2018,0}}{\widehat{\gamma}_0} = 1{,}00 \cdot \frac{400}{0{,}60} = 666{,}7
\end{aligned}$$

(c) *[3 Punkte]* Grundsätzlich gehen die (Basis-)Verfahren der Reservierung davon aus, dass sämtliche Schäden innerhalb der Abwicklungsdauer von $n+1$ Jahren vollständig abgewickelt sind. In Ausnahmefällen werden sich aber auch nach dem n-ten Abwicklungsjahr noch (geringfügige) Änderungen der Schadenstände ergeben, die als Nachlauf bezeichnet werden. Zur Modellierung des Nachlaufs werden i. d. R. die (endlichen) Abwicklungsmuster durch unendliche Abwicklungsmuster ersetzt, so dass auch die Prädiktoren der Schadenstände über das Abwicklungsjahr n hinaus berechnet werden können.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) Zwillingsfreiheit: nur jeweils eine einzige Ausscheideursache führt zum Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit

Zyklenfreiheit: keine Übergänge von einer Nebengesamtheit (also z. B. vom Invalidenbestand) zurück zur Hauptgesamtheit

(b)
- $q_x^1 = P[X_2 \leq x+1, X_2 < X_1 \mid X_1 > x, X_2 > x]$
- $q_x^2 = P[X_2 \leq x+1 \mid X_1 > x, X_2 > x]$
- $q_x^3 = P[X_1 \leq X_2 \leq x+1 \mid X_1 > x, X_2 > x]$
- $q_x^4 = P[X_1 \leq x+1, X_1 \leq X_2 \mid X_1 > x, X_2 > x]$
- $q_x^5 = P[X_2 \leq x+1 \mid X_1 \leq x, X_2 > x]$

(c) Die Wahrscheinlichkeiten werden in den Heubeck Richttafeln 2018 G wie folgt bezeichnet:

$$q_x^1 = q_x^{aa}, \qquad q_x^4 = i_x \qquad \text{und} \qquad q_x^5 = q_x^i.$$

In den Richttafeln 2018 G gilt folgender Ansatz:

$$q_x^2 = q_x^{aa} + i_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$$

Ferner gilt:

$${}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i}$$

und somit:

$$q_x^2 = q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{L}_x &= \sum_{i=1}^{h} v \cdot {}_{m+1}V_x \cdot q_{x+m}^{(i)} \quad \text{für } m < n \\
{}_m\hat{L}_x &= {}_nL_x^{(0)} \quad \text{für } \; m = n.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung folgt für $m < n$:

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x + {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x \\
&= \sum_{i=1}^{h} v \cdot {}_{m+1}V_x \cdot q_{x+m}^{(i)} \\
&\quad + \; v \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{h} q_{x+m}^{(i)}\right) \cdot {}_{m+1}V_x \\
&= v \cdot {}_{m+1}V_x
\end{aligned}
$$

Und somit gilt:

$$
{}_m\hat{P}_x = v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x
$$

(b) Es gilt:

$$
{}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R
$$

und

$$
{}_mP_x^S = v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x.
$$

Damit folgt:

$$
{}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S
$$

und

$$
{}_mP_x^R = 0.
$$

Interpretation: Die gesamte Prämie steht für den Aufbau der Reserve zur Verfügung, es handelt es sich somit um einen reinen Sparprozess.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

B_1 stellt den Erfüllungsbetrag einer Todesfallversicherung dar, bei der einmalig die Versicherungssumme 1 zum Ende des Jahres des Todes des Erstversterbenden des betrachteten Paares eines Mannes und einer Frau gezahlt wird.

B_2 stellt den Erfüllungsbetrag einer jährlich im Voraus zahlbaren Rente vom Betrag 1 dar, die zu zahlen ist solange beide, Mann und Frau, leben. Es werden also $\min(M, N) + 1$ Renten fällig.

B_3 stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft auf eine lebenslänglich jährlich im Voraus zu zahlenden Witwenrente ab Ende des Jahres des Todes des Mannes dar. Es werden also $N - M$ Renten fällig (im Fall $N > M$).

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[3 Punkte]* Die möglichen Zahlungsströme sind:

$$S^{(m)} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{20 \text{ Einträge}}, \underbrace{12.000, 12.000, \ldots, 12.000}_{m-20 \text{ Einträge}}, 0, \ldots, 0),$$

wobei $m > 20$ das Jahr angibt, in dem die Person stirbt.
Außerdem ist: $S^{(m)} = (0, \ldots, 0)$ für $0 \leq m \leq 20$
Für den Erwartungswert des Erfüllungsbetrags einer aufgeschobenen Leibrente gilt:

$$_0B^L_{45} = 12.000 \cdot \sum_{m \geq 20} v^m \cdot {}_m p_{45} = 12.000 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{45}$$

(b) *[3 Punkte]* Das Äquivalenzprinzip lautet in aktuarieller Notation:

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20|}} = 12.000 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{45} + 0,05 \cdot P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20|}} + 120 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{45}$$

Damit ergibt sich für die Prämie:

$$P = \frac{12.120 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{45}}{0,95 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20|}}}$$

(c) *[2 Punkte]* Für die Kalkulation kommt eine Generationensterbetafel zum Einsatz, da das Erlebensfallrisiko mit der aufgeschobenen Leibrente abgesichert wird. Im Gegensatz zur Periodentafel berücksichtigt die Generationensterbetafel die Sterbewahrscheinlichkeiten der jeweiligen Generation der Versicherten, so dass eine niedrigere Sterbewahrscheinlichkeit der jüngeren Generationen (im Vergleich zu älteren Generationen) berücksichtigt wird.

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[2 Punkte]* Bewertungsreserven (alternativ: Stille Reserven) einer Kapitalanlage (z. B. eines Wertpapiers) entstehen, wenn der Zeitwert dieser Kapitalanlage über dem Buchwert der Kapitalanlage liegt. Im anderen Fall (Zeitwert kleiner als Buchwert) entstehen stille Lasten.

(b) *[5 Punkte]* Die Versicherungsnehmer sind an den saldierten Bewertungsreserven der Kapitalanlagen eines Lebensversicherungsunternehmens (ggf. maximiert mit 0) bei Abgang ihres Vertrages nach einem verursachungsorientierten Verfahren zu beteiligen. Es wird unterschieden zwischen Bewertungsreserven auf festverzinsliche Kapitalanlagen und Zinsabsicherungsgeschäften und Bewertungsreserven aus anderen Kapitalanlagen (z. B. Aktien, Immobilien etc.). Die Bewertungsreserven auf festverzinsliche Kapitalanlagen und Zinsabsicherungsgeschäfte werden nur insoweit in die Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven einbezogen, wie sie einen Sicherungsbedarf des Gesamtunternehmens übersteigen. Der Sicherungsbedarf ist geregelt in §139 (4) VAG i.V.m. der Deckungsrückstellungsverordnung. Dort ist geregelt: Der Sicherungsbedarf aus den Versicherungsverträgen mit Zinsgarantie ist die Summe der Sicherungsbedarfe der Versicherungsverträge, deren maßgeblicher Rechnungszins über dem maßgeblichen Euro-Zinsswapsatz zum Zeitpunkt der Ermittlung der Bewertungsreserven (Bezugszins) liegt. Der Sicherungsbedarf eines Versicherungsvertrags ist die versicherungsmathematisch unter Berücksichtigung des Bezugszinses bewertete Zinssatzverpflichtung des Versicherungsvertrags, vermindert um die Deckungsrückstellung.

(c) *[3 Punkte]* Bei der Beteiligung an den Bewertungsreserven wird unterschieden zwischen anspruchsberechtigten Versicherungen und nicht anspruchsberechtigten Versicherungen. Versicherungen, die ein Deckungskapital haben, das lediglich zur Glättung des Risikoverlaufes bei konstanten Prämien dient (z. B. Risikolebensversicherungen) sind nicht anspruchsberechtigt. Kapitalbildende klassische Lebens- und Rentenversicherungen sind hingegen anspruchsberechtigt, weil das Deckungskapital wesentlich zur Finanzierung einer garantierten Ablaufleistung dient. Fondsgebundene Versicherungen sind nicht anspruchsberechtigt, weil sämtliche Chancen und Risiken der Kapitalanlage beim VN liegen und die VN an sämtlichen Wertentwicklungen der ihnen zugeordneten Kapitalanlagen partizipieren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v\cdot p^a_{x+m}\cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + v\, p^a_{x+m}\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\, {}_kp^a_{x+m+1}\,\tfrac{m+1}{m+1+k}\, {}_{m+1+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{m}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1}\, {}_{k+1}p^a_{x+m}\,\tfrac{m+1}{m+k+1}\, {}_{m+k+1}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{m}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{m+1}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{m}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{1}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x - {}_m\hat{L}_x \\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{1}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x
\end{aligned}
$$

(b) Da nur eine reine Altersrente gewährt wird, gilt:

- ${}_m\hat{L}_x = 0$ für $m < n$ und
- ${}_m\hat{L}_x = \ddot{a}^r_z$ für $m = n$.

Zusammen mit Teilaufgabe (a) folgt somit:

$$
{}_m\hat{P}_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\,\tfrac{1}{m+k}\, {}_{m+k}\hat{L}_x = v^{n-m}\, {}_{n-m}p^a_{x+m}\,\tfrac{1}{n}\, {}_n\hat{L}_x = v^{n-m}\, {}_{n-m}p^a_{x+m}\,\tfrac{1}{n}\,\ddot{a}^r_z
$$

Für $m = 0, 1, \ldots, n-2$ gilt somit:

$$
\begin{aligned}
{}_m\hat{P}_x &= v^{n-m}\cdot {}_{n-m}p^a_{x+m}\cdot \tfrac{1}{n}\ddot{a}^r_z \\
&= v\cdot v^{n-m-1}\cdot p^a_{x+m}\cdot {}_{n-m-1}p^a_{x+m+1}\,\tfrac{1}{n}\ddot{a}^r_z \\
&= v\cdot p^a_{x+m}\cdot {}_{m+1}\hat{P}_x \\
&\leq {}_{m+1}\hat{P}_x
\end{aligned}
$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

a) *[2 Punkte]* Wartezeit- und Selektionseffekte bedeuten, dass die Kopfschäden in den ersten Vertragsjahren (Wartezeit für gewisse Leistungen in den Tarifen, z. B. Kuren, bzw. Gesundheits- und Risikoprüfung zu Vertragsbeginn) deutlich unterhalb der Kopfschäden einer entsprechenden gleichaltrigen Vergleichsgruppe mit einer längeren Versicherungsdauer liegen.

b) *[4 Punkte]* Die Methode von Rusam zerlegt die Kopfschäden in das Produkt:

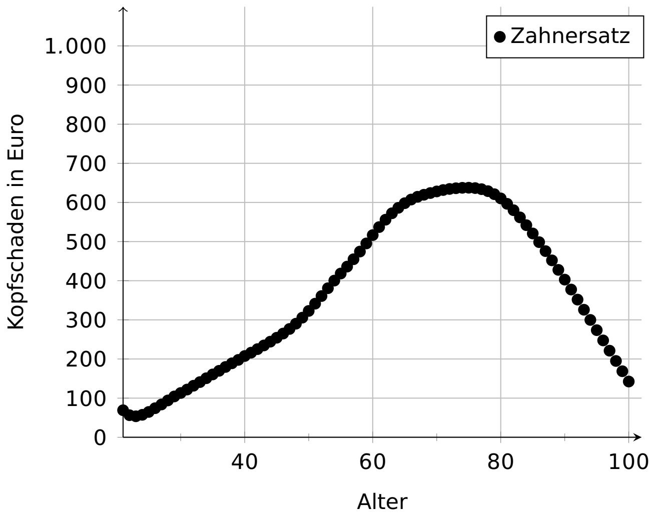
$$K_x = k_x \cdot G,$$

wobei der Vektor $(k_x)_{x=0,\dots,\omega}$ der mit dem Grundkopfschaden normierten Kopfschäden

$$k_x = \frac{K_x}{G}$$

als Profil bezeichnet wird. Die Idee hinter der Zerlegung ist es, dass sich Profile im Zeitverlauf häufig als konstant erweisen und bei einer Neu- bzw. Nachkalkulation lediglich ein neuer Grundkopfschaden zu schätzen ist. Zudem lassen sich Profile häufig auch für mehrere Tarife verwenden. Ein weiterer Vorteil ergibt sich daraus, dass mithilfe von Profilen auch der Kopfschaden für Altersbereiche bestimmt werden kann, in denen ein Versicherer keine eigenen Versicherten hat.

c) *[2 Punkte]* Der Verlauf hat approximativ folgende Gestalt:



Lösungshinweise zu Aufgabe 14

(a) *[3 Punkte]* In der substitutiven Krankenversicherung ist das ordentliche Kündigungsrecht der Unternehmen ausgeschlossen. Da die Prognose der Entwicklung der altersabhängigen Kopfschäden im Zeitverlauf mit sehr großer Unsicherheit verbunden ist, wird bei der Festlegung auf eine zeitliche Prognose verzichtet. Deshalb werden für die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen die aktuellen altersabhängigen Kopfschäden als rechnungsmäßige Kopfschäden verwendet. Damit die Krankenversicherungsunternehmen auch im Zeitverlauf die Krankheitskosten finanzieren können, dürfen sie im Zeitverlauf die rechnungsmäßigen Kopfschäden (und die weiteren Rechnungsgrundlagen) anpassen.

(b) *[4 Punkte]* Der Auslösende Faktor für Kopfschäden vergleicht die erforderlichen Leistungen mit den kalkulierten Leistungen. Er ist daher definiert durch den Quotienten:

$$\mathrm{AF}^{\mathrm{Schaden}} := \frac{S^{\mathrm{erf}}}{S^{\mathrm{kalk}}}.$$

Bei der Bestimmung der kalkulierten Leistungen S^{kalk} wird der mittlere Bestand des aktuellen Jahres L_x für jedes Alter x bestimmt. Dann wird der mittlere Bestand in jedem Alter mit dem rechnungsmäßigen Profil k_x^{rech} und dem rechnungsmäßigen Grundkopfschaden G^{rech} multipliziert und über alle Alter aufsummiert:

$$S^{\mathrm{kalk}} = \sum_x L_x \cdot k_x^{\mathrm{rech}} \cdot G^{\mathrm{rech}}.$$

Für die Bestimmung der erforderlichen Leistungen S^{erf} wird der Bedarfsgrundkopfschaden der vergangenen drei Jahre durch eine lineare Regression auf das folgende Jahr zum Wert G^{ext} extrapoliert. Die Bestimmung der erforderlichen Leistungen erfolgt dann analog zur Bestimmung der kalkulierten Leistungen:

$$S^{\mathrm{erf}} = \sum_x L_x \cdot k_x^{\mathrm{rech}} \cdot G^{\mathrm{ext}}.$$

(c) *[3 Punkte]* Für die Person mit Vertragsabschluss im Alter 30 gilt nach fünf Jahren für die neue Prämie:

$$P_1^{(\mathrm{neu})} = 110\,\% \cdot 1.547 + 10\,\% \cdot (1.856 - 1.547) = 1.702 + 31 = 1.733$$

Für die zweite Person (mit Vertragsabschluss im Alter 35) gilt nach fünf Jahren für die neue Prämie:

$$P_2^{(\mathrm{neu})} = 110\,\% \cdot 1.856 + 10\,\% \cdot (2.183 - 1.856) = 2.042 + 33 = 2.074$$

Sichtbar wird das Problem steigender Beiträge im Alter, wenn der Abstand zwischen Prämie zum erreichten Alter und Prämie im Eintrittsalter größer wird.

Formelsammlung

Eigenschaften von Zufallsvariablen

X sei eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable.

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion: $f_X(x) = F'_x(x)$
  bei differenzierbarer Verteilungsfunktion (stetige Zufallsvariable)
- Zähldichte, Frequenz- oder Massefunktion: $f_X(x) = P(X = x)$
  bei diskreten Zufallsvariablen
- Layer-Identität:

  $$\min(\max(X-a;0);l) = \min(X;a+l) - \min(X;a) = \max(X-a;0) - \max(X-(a+l);0)$$

Momente von Zufallszahlen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}_0$): $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{(-\infty,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_x x^n \cdot f_X(x)$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[X^1\right]$
- Für den Fall, dass man es mit einer Mischform stetiger und diskreter Verteilungen zu tun hat, eignet sich die folgende Formel:

  $$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x,$$

  wenn X nichtnegativ ist.
- n-tes zentrales Moment: $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- Varianz (2. zentrales Moment von X):

  $$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$$

- Standardabweichung: $\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$
- Variationskoeffizient für $\mathrm{E}[X] > 0$:

  $$\mathrm{Vko}[X] = \frac{\sigma[X]}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}{\mathrm{E}[X]}$$

- Absolute Schiefe (3. zentrales Moment von X): $\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]$
- (Relative) Schiefe für $\sigma[X] > 0$:

  $$\gamma[X] = \frac{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]}{\sqrt{(\mathrm{Var}[X])^3}} = \frac{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]}{(\sigma[X])^3}$$

- in s gestutztes n-tes Moment (mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$):

  $$\mathrm{E}[X^n | X > s] = \frac{\mathrm{E}[X^n \cdot 1_{(s,\infty)}(X)]}{P(X > s)} = \frac{\int_{(s,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)}{1 - F(s)}$$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{itX}\right]$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\mathrm{d}x$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left[t^X\right]$, $t \in [0,1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$

Ungleichungen

- Markov (für alle $c > 0$):

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[|X|]}{c}$$

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[h(|X|)]}{h(c)}$$

  für streng monoton wachsende Funktionen h auf $\mathbb{R}^+$

- Tschebychev (für alle $c > 0$):

$$P(|X - \mathrm{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2}$$

- Cantelli (für alle $c > 0$):

$$P(X \geq \mathrm{E}[X] + c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2 + \mathrm{Var}[X]}$$

Wechselbeziehungen zwischen Zufallsvariablen

Sind A und B Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Verteilung der Zufallsvariable Y, gegeben $X = x$, wird als bedingte Verteilung von Y, gegeben $X = x$, kurz $P_{Y|X=x}$, bezeichnet.
$P_{Y|X=x}$ hat die von x abhängige Verteilungsfunktion

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y | X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)}$$

Fasst man das bedingende Ereignis als Zufallsvariable X auf, so sind die Momente der bedingten Verteilung von Y, gegeben X, transformierte Zufallsvariablen von X und für diese können ebenfalls Momente berechnet werden.

- Iterativität der Erwartungswerte
  - $\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{E}[Y]$ für alle X und Y
  - $\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{Var}[Y]$ für alle X und Y
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X]) \cdot (Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[X \cdot Y] - \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$
- Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]}} = \mathrm{Cov}\left(\frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}, \frac{Y - \mathrm{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}\right) \in [-1,1]$$

Summen von Zufallsvariablen

- Faltung: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:
  - Stetige Faltungsformel
  $$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
  mit $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.
  - Diskrete Faltungsformel
  $$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$
  mit $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen auf $\mathbb{N}_0$ sind.
- Zufallssummen:
  N sei eine diskrete Zufallsvariable auf $\{0,1,2,...\}$ und S eine Zufallssumme mit paarweise stochastisch unabhängig, identisch wie X verteilten X_i, die stochastisch unabhängig von N sind.
  - 1. Gleichung von Wald: $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{E}[X]$
  - 2. Gleichung von Wald: $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N] \cdot (\mathrm{E}[X])^2$
- Fundamentalformeln:
  $$\psi_S(t) = m_N(\psi_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$\mathrm{MEF}_S(t) = m_N(\mathrm{MEF}_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$m_S(t) = m_N(m_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0,1]$$
  X diskret verteilt auf $\{0, \Delta, 2\Delta, ...\}$, $\Delta > 0$
- Zusammengesetzte Poisson-Verteilung
  (Spezialfall einer Verteilung einer Zufallssumme)
  - Definition: $\mathrm{ZPV}(\lambda, P_X) = P_S$ mit
  $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$
  mit $X_i \sim P_X$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$
  - Erwartungswert: $\mathrm{E}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X]$
  - Varianz: $\mathrm{Var}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^2]$
  - Absolute Schiefe:
  $$\mathrm{E}\left[(S-\mathrm{E}[S])^3\right] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^3]$$
  - Relative Schiefe:
  $$\gamma[S] = \frac{\mathrm{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda \cdot (\mathrm{E}[X^2])^3}}$$
- Normal-Power-Approximation:
  Es sei U eine Zufallsvariable mit existierenden Momenten $\mu = \mathrm{E}[U]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[U] > 0$, $\gamma = \gamma[U] > 0$. Dann gilt die Näherung:
  $$P(U \le u) \approx \Phi\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 6 \cdot \gamma \cdot \frac{u-\mu}{\sigma} + 9} - 3 \right) \right)$$

B. Verteilungen

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Zähldichte** $p_k = P(N = k)$	**Rekursion für Zähldichte**	**Erwartungs-wert**	**Varianz**	**Schiefe**	**(Wahrscheinlichkeits-) Erzeugende Funktion**
Poisson-Verteilung $\mathrm{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$	$p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathrm{N}_0)$	$p_k = \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1}$ $(k \in \mathrm{N})$ $p_0 = e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$e^{\lambda \cdot (t-1)}$
Binomial-verteilung $B(m, \theta)$ $(m \in \mathrm{N}, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{m}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^{m-k}$ $(k = 0, \ldots, m)$	$p_k = \frac{m-k+1}{k} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot p_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$ $p_0 = (1-\theta)^m$	$m \cdot \theta$	$m \cdot \theta \cdot (1-\theta)$	$\frac{1-2\cdot\theta}{\sqrt{m \cdot \theta \cdot (1-\theta)}}$	$\left[\theta \cdot t + (1-\theta)\right]^m$
Negative Binomial-verteilung $NB(\beta, \theta)$ $(\beta > 0, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{\beta+k-1}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^{\beta}$ $(k \in \mathrm{N}_0)$	$p_k = \frac{\beta+k-1}{k} \cdot \theta \cdot p_{k-1}$ $(k \in \text{¥}_0)$ $p_0 = (1-\theta)^{\beta}$	$\beta \cdot \frac{\theta}{1-\theta}$	$\beta \cdot \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$	$\frac{1+\theta}{\sqrt{\beta \cdot \theta}}$	$\left[\frac{1-\theta}{1-\theta \cdot t}\right]^{\beta}$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Dichte**	**Verteilungsfunktion**	**Erwartungswert**	**Varianz**	**Schiefe**	**Momenterzeugende Funktion**	**Gestutzte Momente** $E\left[X^n \mid X>s\right]$
stetige Gleichverteilung $\mathrm{U}(a,b)$ $(a<b,\ a,b\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{b-a}\cdot 1_{(a,b)}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$	$\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\begin{cases}1 & t=0\\ \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)\cdot t} & t\ne 0\end{cases}$	$\frac{b^{n+1}-s^{n+1}}{(n+1)\cdot(b-s)}$ $(s\in(a,b))$
Gammaverteilung $\Gamma(a,b)$ $(a,b\in(0,\infty))$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot e^{-ax}\cdot x^{b-1}$ $(x>0)$	$\underbrace{\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot\int_0^x e^{-at}\cdot t^{b-1}\,dt}_{=:\Gamma_x(a,b)}$ $(x\ge 0)$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a^2}$	$\frac{2}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^b$ $(t<a)$	$\frac{\Gamma(b+n)\cdot(1-\Gamma_s(a,b+n))}{a^n\cdot\Gamma(b)\cdot(1-\Gamma_s(a,b))}$
Exponentialverteilung $Exp(a)$ $(a>0)$	$a\cdot e^{-ax}$ $(x\in\mathbb{R})$	$1-e^{-ax}$ $(x\ge 0)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	2	$\frac{a}{a-t}$ $(t<a)$	$\frac{n!}{a^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(as)^k}{k!}$
Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ $(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0)$	$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$ $(x\in\mathbb{R})$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $(x\in\mathbb{R})$	μ	σ^2	0	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2}$	(2-Schritt-Rekursion)

Stetige Verteilungen (II)

<table>
<tr><th>Bezeichnung/ Kurz~/Parameter</th><th>Dichte</th><th>Verteilungs-funktion</th><th>Erwartungs-wert</th><th>Varianz</th><th>Schiefe</th><th>Moment-erzeugende Funktion</th><th>Gestutzte Momente $E\left[X^n \middle| X>s\right]$</th></tr>
<tr><td>Lognormal-verteilung
$LN\left(\mu,\sigma^2\right)$
$\left(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\right)$</td><td>$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\ln(x)-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot x\cdot\sigma}$
$(x>0)$</td><td>$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$
$(x>0)$</td><td>$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$</td><td>$e^{2\mu+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2}-1\right)$</td><td>$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\cdot\left(e^{\sigma^2}+2\right)$</td><td>—</td><td>$e^{n\mu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}\cdot\frac{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}-n\sigma\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}\right)}$</td></tr>
<tr><td>(European) Pareto-Verteilung
$Par\left(a,b\right)$
$\left(a,b\in(0,\infty)\right)$</td><td>$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}$
$(x>a)$</td><td>$1-\left(\frac{a}{x}\right)^{b}$
$(x>a)$</td><td>$\frac{a\cdot b}{b-1}$
$(b>1)$</td><td rowspan="2">$\frac{a^2\cdot b}{(b-1)^2\cdot(b-2)}$
$(b>2)$</td><td rowspan="2">$\frac{2\cdot(b+1)\cdot\sqrt{b-2}}{(b-3)\cdot\sqrt{b}}$
$(b>3)$</td><td rowspan="2">existiert nicht</td><td>$\frac{b\cdot s^n}{b-n}$
$(s>a,b>n)$</td></tr>
<tr><td>um –a verschobene (American) Pareto-Verteilung
$Par_0\left(a,b\right)$
$\left(a,b\in(0,\infty)\right)$</td><td>$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{a+x}\right)^{b+1}$
$(x>0)$</td><td>$1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^{b}$
$(x>a)$</td><td>$\frac{a}{b-1}$
$(b>1)$</td><td>$a^n b\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{b-k}\cdot\left(1+\frac{s}{a}\right)^k$</td></tr>
</table>