DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Versicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 10.10.2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 15 Seiten.
- Zusätzlich zu den 15 Seiten erhalten Sie eine Formelsammlung bestehend aus 6 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Korbinian Meindl, Chris-Erik Schillinger,
Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt, Prof. Dr. Klaus Schröter

Aufgabe 1. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Grundlagen zu Prämien und Rückstellungen] [8 Punkte]*

Bei jeder Teilaufgabe ((a) bis (h)) ist genau eine Antwort ((i) bis (iv)) auszuwählen.

(a) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Prozesse findet bei der Berechnung von Prämien nach dem erweiterten Äquivalenzprinzip *keine* Verwendung?

(i) Kostenprozess

(ii) Leistungsprozess

(iii) Prämienprozess

(iv) Rückstellungsprozess

(b) *[1 Punkt]* Welcher der folgenden Prämienbegriffe beinhaltet *keinen* Sicherheitszuschlag?

(i) Bruttoprämie

(ii) Bruttorisikoprämie

(iii) Nettoprämie

(iv) Nettorisikoprämie

(c) *[1 Punkt]* Für welche der folgenden Komponenten enthält der Zahlbeitrag in der Personenversicherung *typischerweise keinen* Sicherheitszuschlag?

(i) Eintrittswahrscheinlichkeit des Leistungsfalls

(ii) Kosten

(iii) Versicherungsteuer

(iv) Zins

(d) *[1 Punkt]* Bei welcher der folgenden versicherungstechnischen Begebenheiten geht die Prämie bei der Berechnung der Nettorisikoprämie zwingend auf beiden Seiten der Gleichung $\mathrm{E}(P) = \mathrm{E}(L)$ ein?

(i) Beitragsrückgewähr bei Leistungsfreiheit

(ii) Einmalbeitrag zu Beginn der Versicherungsdauer

(iii) konstante Nettorisikoprämie über die gesamte Versicherungsdauer

(iv) Selbstbehalt auf jeden Leistungsfall

(e) *[1 Punkt]* Welche der folgenden Rückstellungen weist bei der erstmaligen Kalkulation *zwingend* einen monoton fallenden Verlauf in der Zeit t auf?

(i) Deckungsrückstellung einer Risikolebensversicherung gegen laufenden Beitrag

(ii) Deckungsrückstellung einer sofort beginnenden Rente gegen Einmalbeitrag

(iii) Schwankungsrückstellung eines Kompositversicherers

(iv) Einzelschadenreserve eines inzwischen gemeldeten Spätschadens

(f) *[1 Punkt]* Bei der Ausübung welcher der folgenden Tätigkeiten kommen Aktuarinnen und Aktuare *typischerweise am wenigsten direkt* mit Rückstellungen in Berührung?

(i) Beratung zur betrieblichen Altersversorgung

(ii) Rechnungslegung eines Lebensversicherers

(iii) Reservebewertung eines Rückversicherers

(iv) Tarifkalkulation eines Kompositversicherers

(g) *[1 Punkt]* Welches der folgenden Prämienprinzipien erfüllt *nicht* die Eigenschaft der Additivität unter der Annahme stochastisch unabhängiger Risiken?

(i) Erwartungswertprinzip

(ii) Exponentialprinzip

(iii) Standardabweichungsprinzip

(iv) Varianzprinzip

(h) *[1 Punkt]* Welches der folgenden Prämienprinzipien wird *typischerweise implizit* mittels einer Nutzenfunktion bestimmt?

(i) Erwartungswertprinzip

(ii) Exponentialprinzip

(iii) Standardabweichungsprinzip

(iv) Varianzprinzip

Aufgabe 2. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, Äquivalenzprinzip und Kalkulation von Prämien] [14 Punkte]*
Ein innovativer Versicherer plant die Einführung einer Verspätungsversicherung für ganzjährige Nutzer öffentlicher Verkehrsmittel. Der Leistungsfall besteht darin, dass bei vielen Verspätungen (mind. 30 Tage im Jahr mit mind. 90 Minuten Verspätung) der Preis einer entsprechenden Monatskarte am Jahresende ausbezahlt wird. Dies wird in den Versicherungsbedingungen detailliert geregelt. Für die Tarifierung des neuen Produkts sind folgende Parameter relevant:

- Versicherungsdauer $n = 2$ Jahre unabhängig vom Leistungsverlauf
- Einmalprämie zu Beginn (Notation: P^B Brutto-, P^N Netto-, $\bar{P}$ Nettorisikoprämie)
- individuelle Versicherungssumme S (als Preis der jeweiligen Monatskarte)
- pro Jahr bei Eintritt des Versicherungsfalls einmalige Entschädigung der Höhe S nachschüssig am Jahresende
- geschätzte Eintrittswahrscheinlichkeiten des Versicherungsfalls inkl. impliziter Sicherheitszuschläge $\tilde{q}_1 = 0{,}3\%$ im ersten Jahr und $\tilde{q}_2 = 0{,}4\%$ im zweiten Jahr
- Diskontfunktion D mit $D(0) = 1,\ D(1) = 0{,}99$ und $D(2) = 0{,}98$
- einmalige Stückkosten $\kappa = 1$ zu Versicherungsbeginn
- jährlich vorschüssige Verwaltungskosten der Höhe $\gamma = 2\%$ bzgl. P^B
- Bonusnachlass $b = 10\%$ bei Vertragsabschluss über das Internet
- Versicherungsteuer $\tau = 19\%$

Für das Produkt soll sukzessive der Zahlbeitrag B berechnet werden, wobei in nachfolgenden Teilaufgaben ungerundete Ergebnisse weiterverwendet werden können.

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie den Leistungs-, Kosten-, und Prämienprozess, indem Sie die Komponenten L_0, L_1, L_2, K_0, K_1, K_2, P_0, P_1, P_2 einzeln definieren. Verwenden Sie hierbei ggf. Fallunterscheidungen unter Angabe der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten und die zum Kostenprozess gehörende Prämiengröße.

(b) *[2 Punkte]* Berechnen Sie mittels Äquivalenzprinzip eine Formel für die Nettorisikoprämie $\bar{P}$ in Abhängigkeit von S und vereinfachen Sie den Term.

(c) *[2 Punkte]* Berechnen Sie für $S = 400$ die Nettoprämie P^N und runden Sie Ihr Endergebnis auf zwei Nachkommastellen.

(d) *[4 Punkte]* Berechnen Sie für $S = 400$ die Bruttoprämie P^B mittels Äquivalenzprinzip und runden Sie Ihr Endergebnis auf zwei Nachkommastellen.

(e) *[1 Punkt]* Berechnen Sie für $S = 400$ und Vertragsabschluss über das Internet den Zahlbeitrag B und runden Sie Ihr Endergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 3. *[Grundlagen aktuarieller Kalkulation, individuelles Modell und Rückversicherung] [14 Punkte]*
Ein Erstversicherer beabsichtigt, seine einjährigen Risikolebensversicherungen in Rückdeckung zu geben. Der Bestand besteht aus Risiken vom Typ $Y^{(1)}$ und $Y^{(2)}$:

- Der Typ $Y^{(1)}$ hat die Versicherungssumme $S_1 = 100$,
  die Eintrittswahrscheinlichkeit des Versicherungsfalls lautet $\tilde{q}_1 = 0{,}5\%$,
  und die Anzahl der Policen beträgt $n_1 = 200$.

- Der Typ $Y^{(2)}$ hat die Versicherungssumme $S_2 = 200$,
  die Eintrittswahrscheinlichkeit des Versicherungsfalls lautet $\tilde{q}_2 = 0{,}3\%$,
  und die Anzahl der Policen beträgt $n_2 = 100$.

Sämtliche Risiken seien stochastisch unabhängig. Dann lässt sich die Summe S aller Todesfallleistungen dieser Policen als individuelles Modell beschreiben:

$$S = S^{\text{ind}} = S_1^{\text{ind}} + S_2^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^{n_1} Y_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i^{(2)}$$

Im Folgenden soll die Summenexzedenten-Rückversicherung aus Sicht des Erstversicherers betrachtet werden. Ihre <u>ungerundeten</u> Ergebnisse können in nachfolgenden Teilaufgaben weiterverwendet werden.

(a) *[2 Punkte]* Berechnen Sie für eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit Maximum $v_0 = 50$ die vertragsindividuellen Rückversicherungsquoten $q^{(1)}$ für den Risikotyp $Y^{(1)}$ und $q^{(2)}$ für den Risikotyp $Y^{(2)}$.

(b) *[9 Punkte]* Berechnen Sie den Variationskoeffizienten $\text{Vko}(\underline{S})$ des Selbstbehalts des Erstversicherers, also der Summe $\underline{S}$ aller Todesfallleistungen des Erstversicherers <u>nach</u> Summenexzedenten-Rückversicherung mit $v_0 = 50$, und runden Sie Ihr Endergebnis auf vier Nachkommastellen.

(c) *[2 Punkte]* Der Abschluss einer Summenexzedenten-Rückversicherung ist <u>nicht</u> für alle Versicherungsformen möglich. Nennen Sie je ein Versicherungsprodukt aus der Personen- und aus der Schadenversicherung als Beispiel, wo dies nicht möglich ist. Worin liegt dies begründet?

(d) *[2 Punkte]* Halten Sie für Gruppenunfallversicherungen, die alle Führungskräfte eines großen Konzerns versichern, neben einem Summenexzedenten weiteren Rückversicherungsschutz für sinnvoll? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 4. *[Schadenversicherungsmathematik, Schadenkennzahlen] [12 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Benennen und charakterisieren Sie die verschiedenen, für die Tarifierung in der Schadenversicherung relevanten Datentypen. Warum sind diese Datentypen nicht nur einzeln, sondern vor allem im Verbund zu analysieren?

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Bestand von fünf Verträgen (= Risiken), die die folgenden Versicherungsdauern, Versicherungssummen, Jahresbeiträge und ggf. Schäden innerhalb eines (vergangenen) Kalenderjahres aufweisen:

	Vertragsdauer		Vers.-	Jahres-	Schadenhöhen	
	von ...	bis ...	summen	beitrag	Erster	Zweiter
1	01.01.	**30.06.**	250	6		
2	01.01.	**30.09.**	300	10	15	
3	**01.04.**	31.12.	200	6	10	20
4	**01.04.**	31.12.	400	25	3	
5	01.01.	31.12.	500	35	2	4

Berechnen Sie die Schadenhäufigkeit, den Schadenbedarf und die Schadenquote dieses Bestandes.

Aufgabe 5. *[Schadenversicherungsmathematik, Tarifierung, Risiko- und Tarifmerkmale, Tarifierungsmodelle] [22 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Erläutern und unterscheiden Sie multiplikative und additive Modelle der Tarifierung.

(b) *[2 Punkte]* Erläutern Sie (kurz) den Begriff der „verteilungsfreien Tarifierungsverfahren".

(c) *[10 Punkte]* Die Tarifierung für einen Bestand operiert mit zwei Merkmalen (A und B). Beide Merkmale weisen je drei Ausprägungen auf. Die Anzahl der Risiken $v_{i,j}$ und die Gesamtschäden $s_{i,j}$ sind für jede Risikoklasse (i, j) gegeben durch:

Risiko	Anzahl der Risiken $v_{i,j}$			Gesamtschaden $s_{i,j}$		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	5	10	17	50	135	215
$i=2$	10	20	35	130	310	470
$i=3$	8	25	40	41	160	189

Berechnen Sie die (Nettorisiko-)Prämien für die beiden Tarifzellen $(1, 2)$ und $(2, 3)$ mit dem „Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten".
Hinweis: Die Prämien sind auf zwei Nachkommastellen gerundet anzugeben.

(d) *[2 Punkte]* Inwiefern spielt die Korrelation als Maß für etwaige (lineare) Wechselwirkungen bei der Auswahl der Tarifmerkmale eine wichtige Rolle?

Aufgabe 6. *[Schadenversicherungsmathematik, Reservierungsverfahren] [20 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* Was versteht man unter long tail business und welche Bezüge hat dieser Begriff zur Schadenreservierung?

(b) *[8 Punkte]* Was versteht man im Kontext der Schadenreservierung unter einem Abwicklungsmuster? Für welche Größen unterstellen Verfahren der Schadenreservierung in der Regel solche Abwicklungsmuster? Inwiefern spielen Schadenquotenzuwächse hier eine Sonderrolle?

(c) *[6 Punkte]* Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre $i = 2016, \ldots, 2019$ die beobachteten Schadenstände $S_{i,k}$ für die Abwicklungsjahre $k = 0, 1, 2, 3$:

Anfalljahr i	Abwicklungsjahr k			
	0	1	2	3
2016	300	500	600	630
2017	400	600	775	
2018	500	1.000		
2019	600			

Schätzen Sie die Reserven für die Anfalljahre 2018 und 2019 mit dem Chain-Ladder-Verfahren.
Hinweis: Die Schätzer der Reserven sind auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

(d) *[4 Punkte]* Erläutern Sie kurz (ohne auf Formeln näher einzugehen), wie sich das Cape-Cod-Verfahren von dem Loss-Development-Verfahren unterscheidet.

Aufgabe 7. *[Personenversicherungsmathematik, Basismodell, versicherungsmathematische Bilanzgleichung, Spar- und Risikoprämie] [18 Punkte]*

Wir betrachten für eine x-jährige Person einer Hauptgesamtheit einen Versicherungsvertrag mit n Jahren Laufzeit und jährlich vorschüssig zahlbaren Prämien.

(a) *[6 Punkte]* Für einen solchen Vertrag gelten bekanntlich die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen

$$ {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. $$

Erläutern Sie alle in der Formel vorkommenden Terme.

(b) *[6 Punkte]* Geben Sie die Definition der Sparprämie ${}_mP_x^S$ und der Risikoprämie ${}_mP_x^R$ an (in Abhängigkeit von ${}_mV_x$, ${}_{m+1}V_x$, ${}_m\hat{L}_x$) und zeigen Sie damit, dass für $m = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt:

$$ {}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R. $$

(c) *[6 Punkte]* Der Vertrag sehe nun als Prämie die natürliche Prämie vor, d.h. es gilt

$$ {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x, \; m = 0, 1, \ldots, n-1. $$

Berechnen Sie unter der Bedingung ${}_0V_x = 0$ die Reserven ${}_mV_x, m = 1, \ldots, n$, und hieraus ${}_mP_x^S$ und ${}_mP_x^R, m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 8. *[Personen- und Pensionsversicherungsmathematik, Zustandsmodell, Erfüllungsbetrag] [23 Punkte]*

Wir betrachten einen x-jährigen Altersrentner ($x \in \mathbb{N}_0$). Die stetige reellwertige Zufallsvariable X beschreibe wie üblich das Alter des Berechtigten bei dessen Tod. Gegenüber diesem Altersrentner bestehe eine ungewisse Verpflichtung in Form einer lebenslänglich laufenden jährlich vorschüssig zahlbaren Rente der Höhe R_{x+k}, $k = 0, 1, \ldots, \omega - x$.

Wir möchten im Folgenden diesen Sachverhalt mittels einer inhomogenen Markov-Kette beschreiben. Zur Erinnerung: Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess $Y = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, wobei alle Z_k nur Werte aus dem Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ annehmen und bei dem für $\mathbb{P}(Z_k = j_k, Z_{k-1} = j_{k-1}, \ldots, Z_0 = j_0) > 0$ die sogenannte Markov-Eigenschaft gilt:

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = j_{k+1} \mid Z_k = j_k, \ldots, Z_0 = j_0) = \mathbb{P}(Z_{k+1} = j_{k+1} \mid Z_k = j_k)$$

(a) *[6 Punkte]* Zur Beschreibung der ungewissen Verpflichtung definieren wir einen Zustandsraum $S = \{0, 1\}$, mit 0 = „tot “ und 1 = „lebend “.
Beschreiben Sie mit Hilfe der Zufallsgröße X die Zustände Z_k und die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten $q_{ij}(k) := \mathbb{P}(Z_k = j \mid Z_{k-1} = i)$ für $i, j \in S, k = 1, 2, \ldots$.

(b) *[8 Punkte]* Geben Sie die zugehörigen Übergangsmatrizen

$$Q(k) := \left(q_{ij}(k) \right)_{i,j \in S}$$

$k = 1, 2, \ldots$, unter Verwendung der üblichen versicherungsmathematischen Notationen an und zeigen Sie damit, dass gilt

$$\prod_{j=1}^{k} Q(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - {}_kp_x^r & {}_kp_x^r \end{pmatrix}$$

(c) *[6 Punkte]* Ausgehend von der dargestellten Markov-Kette lässt sich der Erfüllungsbetrag der ungewissen Verpflichtung wie folgt definieren:

$$B = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot 1_{\{Z_k = 1\}} \cdot R_{x+k}$$

Berechnen Sie hieraus den (Leistungs-)Barwert der ungewissen Verpflichtung.

(d) *[3 Punkte]* Sie berichten einer Ihnen bekannten Aktuarin von der Möglichkeit der Bewertung von Ansprüchen aus Pensionszusagen mit Hilfe von Markov-Ketten. Ihre Bekannte merkt kritisch an, dass nach ihrer Kenntnis bei der Bewertung einer Anwartschaft auf Witwenrente die Anzahl der erforderlichen Zustände deutlich zunehmen kann. Trifft die Aussage Ihrer Bekannten zu (kurze Begründung wird erwartet)?

Aufgabe 9. *[Pensionsversicherungsmathematik, Besonderheiten der Prämien und Reserveermittlung, Zuordnung von Leistungen auf Alter] [13 Punkte]*

Ein Mandant beauftragt Sie mit der Erstellung von versicherungsmathematischen Gutachten nach EStG und HGB für die unmittelbaren Pensionsverpflichtungen der Gesellschaft.

(a) *[4 Punkte]* Für die steuerliche Bewertung der Pensionsrückstellungen gelten die gesetzlichen Regelungen in §6a EStG. Erläutern Sie an zwei Beispielen, dass diese Regelungen zu einer Unterbewertung der Pensionsverpflichtungen im Vergleich mit den handelsrechtlichen Bewertungsvorschriften führen können.

(b) *[6 Punkte]* Die zu bewertende Verpflichtung ist nicht altersabhängig definiert. Stellen Sie kurz zwei in der Praxis verwendete Methoden für die Zuordnung von Leistungen auf Alter dar, mit deren Hilfe dennoch ein altersabhängiger Leistungsvektor für die Bewertung ermittelt werden kann.

(c) *[3 Punkte]* Was versteht man unter dem Begriff „Fluktuation“ und wie wird diese in der steuerlichen Bewertung von Pensionsverpflichtungen berücksichtigt?

Aufgabe 10. *[Lebensversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen und rekursive Ansätze] [8 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]* In den folgenden Tabellen sehen Sie einen Auszug der DAV 2004 R Tafel (Referenzjahr 1965; 1. Ordnung) sowie einen Auszug aus der Generationentafel des Statistischen Bundesamts (Destatis) (Geburtsjahr 1965).

DAV 2004 R		Destatis	
x	q_x	x	q_x
53	0,002121	53	0,004771
54	0,002212	54	0,005260
55	0,002294	55	0,005790
56	0,002370	56	0,006354
57	0,002451	57	0,006949

Berechnen Sie für beide Sterbetafeln jeweils den Wert ${}_2p_{54}$.

(b) *[2 Punkte]* Erläutern Sie die unterschiedlichen Ergebnisse aus Aufgabenteil (a).

(c) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie mit einer Rekursion den Nettojahresbeitrag (vorschüssig jeweils am Jahresanfang) für eine zweijährige Erlebensfallversicherung einer 54-jährigen Person mit Versicherungssumme 10.000 Euro. Der Rechnungszins betrage dabei 0,9 %. Verwenden Sie die passenden Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 11. *[Lebensversicherungsmathematik, Überschussquellen und Überschussbeteiligung] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Wir betrachten ein deutsches Lebensversicherungsunternehmen zum Jahresbeginn 2019 mit insgesamt 2.000 Risikolebensversicherungen mit einer Versicherungssumme von jeweils 50.000 Euro. Für jeden Vertrag hat das Unternehmen eine Rückstellung von 430 Euro gebildet. Die für die Kalkulation verwendete Sterbetafel zeigt für diese Verträge eine einjährige Sterblichkeit von 1,5 Promille an.

(i) Wie hoch ist das Risikoergebnis zum 31.12.2019, wenn im Jahr 2019 genau eine Person stirbt?

(ii) Wie hoch ist das Risikoergebnis zum 31.12.2019, wenn im Jahr 2019 genau fünf Personen sterben?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das riskierte Kapital.

(b) *[6 Punkte]* Die folgende Tabelle zeigt verschiedene Kennzahlen und Ergebnisse vier verschiedener deutscher Lebensversicherungsunternehmen (LVU) am Ende des Geschäftsjahres 2019.

Bestimmen Sie für jedes Unternehmen die Mindestzuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung.

	LVU 1	LVU 2	LVU 3	LVU 4
Anzurechnende Kapitalerträge	85	100	110	100
Rechnungsmäßige Zinsen	90	91	92	107
Risikoergebnis	10	-10	10	5
Übriges Ergebnis	-2	5	10	3
Direktgutschrift am 31.12.2019	3	2	10	0

Die Zahlenwerte sind jeweils in Millionen Euro angegeben.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst für jedes Unternehmen das Kapitalanlageergebnis.

Aufgabe 12. *[Krankenversicherungsmathematik, Rechnungsgrundlagen] [8 Punkte]*
In den folgenden Tabellen sehen Sie einen Auszug der DAV 2004 R Tafel (Referenzjahr 1965) sowie einen Auszug aus der PKV-Sterbetafel 2020.

DAV 2004 R		PKV 2020	
x	q_x	x	q_x
53	0,002121	53	0,001987
54	0,002212	54	0,002236
55	0,002294	55	0,002511
56	0,002370	56	0,002820
57	0,002451	57	0,003166

(a) *[4 Punkte]* Erklären Sie kurz die Unterschiede zwischen Perioden- und Generationensterbetafel. Welche Art von Sterbetafel ist die PKV 2020 Sterbetafel?

(b) *[2 Punkte]* Begründen Sie qualitativ, weshalb die einjährige Sterblichkeit im Alter 57 in der PKV-Sterbetafel größer ist als in der DAV 2004 R Tafel.

(c) *[2 Punkte]* Wie wird bei der Erstellung der PKV-Sterbetafel Sicherheit in den Sterbewahrscheinlichkeiten für die Kalkulation erzeugt?

Aufgabe 13. *[Krankenversicherungsmathematik, Prämien für Neugeschäft und Bestand] [10 Punkte]*
Eine Person hat im Alter 40 eine substitutive Krankheitskostenvollversicherung zu einem monatlichen Nettobeitrag von 364,51 Euro abgeschlossen. Nach drei Jahren kommt es zu einer Beitragsanpassung, bei der sowohl Kopfschäden als auch Sterbewahrscheinlichkeiten und Rechnungszins angepasst werden müssen.

Zum Zeitpunkt der Beitragsanpassung kann dieser Person eine Alterungsrückstellung (netto) von 7.563,15 Euro angerechnet werden. Der neue Leistungsbarwert (d.h. mit aktualisierten Kopfschäden, Sterbewahrscheinlichkeiten und Rechnungszins) beträgt 101.291,46 Euro.

Bitte verwenden Sie für die Kalkulation den richtigen Beitragsbarwertfaktor aus der folgenden Tabelle (n steht für „neue Rechnungsgrundlagen“):

x	$\ddot{a}_x^n$
40	18,73642
41	18,77816
42	18,79433
43	18,78935
44	18,76786
45	18,73502

(a) *[4 Punkte]* Wie hoch wäre der monatliche Netto-Neugeschäftsbeitrag, wenn die Person erst im Alter 43 zu den neuen Konditionen den Vertrag abschließt?

(b) *[6 Punkte]* Wie hoch ist der neue, angepasste monatlichen Nettobeitrag für die Person nach drei Jahren?

Formelsammlung

Eigenschaften von Zufallsvariablen

X sei eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable.

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion: $f_X(x) = F'_x(x)$
  bei differenzierbarer Verteilungsfunktion (stetige Zufallsvariable)
- Zähldichte, Frequenz- oder Massefunktion: $f_X(x) = P(X = x)$
  bei diskreten Zufallsvariablen
- Layer-Identität:

  $$\min(\max(X - a; 0); l) = \min(X; a + l) - \min(X; a) = \max(X - a; 0) - \max(X - (a + l); 0)$$

Momente von Zufallszahlen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}_0$): $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{(-\infty,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x) \mathrm{d}x$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_x x^n \cdot f_X(x)$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[X^1\right]$
- Für den Fall, dass man es mit einer Mischform stetiger und diskreter Verteilungen zu tun hat, eignet sich die folgende Formel:

  $$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) \mathrm{d}x,$$

  wenn X nichtnegativ ist.
- n-tes zentrales Moment: $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- Varianz (2. zentrales Moment von X):

  $$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$$

- Standardabweichung: $\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$
- Variationskoeffizient für $\mathrm{E}[X] > 0$:

  $$\mathrm{Vko}[X] = \frac{\sigma[X]}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}{\mathrm{E}[X]}$$

- Absolute Schiefe (3. zentrales Moment von X): $\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]$
- (Relative) Schiefe für $\sigma[X] > 0$:

  $$\gamma[X] = \frac{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]}{\sqrt{(\mathrm{Var}[X])^3}} = \frac{\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]}{(\sigma[X])^3}$$

- in s gestutztes n-tes Moment (mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$):

  $$\mathrm{E}[X^n | X > s] = \frac{\mathrm{E}[X^n \cdot 1_{(s,\infty)}(X)]}{P(X > s)} = \frac{\int_{(s,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)}{1 - F(s)}$$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{itX}\right]$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\mathrm{d}x$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left[t^X\right]$, $t \in [0,1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$

Ungleichungen

- Markov (für alle $c > 0$):

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[|X|]}{c}$$
$$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[h(|X|)]}{h(c)}$$

  für streng monoton wachsende Funktionen h auf $\mathbb{R}^+$

- Tschebychev (für alle $c > 0$):

$$P(|X - \mathrm{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2}$$

- Cantelli (für alle $c > 0$):

$$P(X \geq \mathrm{E}[X] + c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2 + \mathrm{Var}[X]}$$

Wechselbeziehungen zwischen Zufallsvariablen

Sind A und B Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Verteilung der Zufallsvariable Y, gegeben $X = x$, wird als bedingte Verteilung von Y, gegeben $X = x$, kurz $P_{Y|X=x}$, bezeichnet.
$P_{Y|X=x}$ hat die von x abhängige Verteilungsfunktion

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)}$$

Fasst man das bedingende Ereignis als Zufallsvariable X auf, so sind die Momente der bedingten Verteilung von Y, gegeben X, transformierte Zufallsvariablen von X und für diese können ebenfalls Momente berechnet werden.

- Iterativität der Erwartungswerte
  - $\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{E}[Y]$ für alle X und Y
  - $\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{Var}[Y]$ für alle X und Y
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X]) \cdot (Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[X \cdot Y] - \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$
- Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]}} = \mathrm{Cov}\left(\frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}, \frac{Y - \mathrm{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}\right) \in [-1,1]$$

Summen von Zufallsvariablen

- Faltung: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:
  - Stetige Faltungsformel
    $$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
    mit $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.
  - Diskrete Faltungsformel
    $$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$
    mit $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen auf $\mathbb{N}_0$ sind.
- Zufallssummen:
  N sei eine diskrete Zufallsvariable auf $\{0,1,2,...\}$ und S eine Zufallssumme mit paarweise stochastisch unabhängig, identisch wie X verteilten X_i, die stochastisch unabhängig von N sind.
  - 1. Gleichung von Wald: $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{E}[X]$
  - 2. Gleichung von Wald: $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N] \cdot (\mathrm{E}[X])^2$
- Fundamentalformeln:
  $$\psi_S(t) = m_N(\psi_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$\mathrm{MEF}_S(t) = m_N(\mathrm{MEF}_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$m_S(t) = m_N(m_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0,1]$$
  X diskret verteilt auf $\{0, \Delta, 2\Delta, ...\}$, $\Delta > 0$
- Zusammengesetzte Poisson-Verteilung
  (Spezialfall einer Verteilung einer Zufallssumme)
  - Definition: $\mathrm{ZPV}(\lambda, P_X) = P_S$ mit
    $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$
    mit $X_i \sim P_X$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$
  - Erwartungswert: $\mathrm{E}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X]$
  - Varianz: $\mathrm{Var}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^2]$
  - Absolute Schiefe:
    $$\mathrm{E}\left[(S - \mathrm{E}[S])^3\right] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^3]$$
  - Relative Schiefe:
    $$\gamma[S] = \frac{\mathrm{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda \cdot (\mathrm{E}[X^2])^3}}$$
- Normal-Power-Approximation:
  Es sei U eine Zufallsvariable mit existierenden Momenten $\mu = \mathrm{E}[U]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[U] > 0$, $\gamma = \gamma[U] > 0$. Dann gilt die Näherung:
  $$P(U \leq u) \approx \Phi\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 6 \cdot \gamma \cdot \frac{u-\mu}{\sigma} + 9} - 3 \right) \right)$$

B. Verteilungen

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	Zähldichte $p_k = P(N=k)$	Rekursion für Zähldichte	Erwartungs-wert	Varianz	Schiefe	(Wahrscheinlichkeits-) Erzeugende Funktion
Poisson-verteilung $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$	$p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ $p_0 = e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$e^{\lambda \cdot (t-1)}$
Binomial-verteilung $B(m,\theta)$ $(m \in \mathbb{N}, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{m}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^{m-k}$ $(k = 0,\ldots,m)$	$p_k = \frac{m-k+1}{k} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot p_{k-1}$ $(k = 1,\ldots,m)$ $p_0 = (1-\theta)^m$	$m \cdot \theta$	$m \cdot \theta \cdot (1-\theta)$	$\frac{1-2\cdot\theta}{\sqrt{m \cdot \theta \cdot (1-\theta)}}$	$\left[\theta \cdot t + (1-\theta)\right]^m$
Negative Binomial-Verteilung $NB(\beta,\theta)$ $(\beta > 0, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{\beta+k-1}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^\beta$ $(k \in \mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\beta+k-1}{k} \cdot \theta \cdot p_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ $p_0 = (1-\theta)^\beta$	$\beta \cdot \frac{\theta}{1-\theta}$	$\beta \cdot \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$	$\frac{1+\theta}{\sqrt{\beta \cdot \theta}}$	$\left[\frac{1-\theta}{1-\theta \cdot t}\right]^\beta$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	Dichte	Verteilungs-funktion	Erwartungs-wert	Varianz	Schiefe	Moment-erzeugende Funktion	Gestutzte Momente $E\left[X^n \mid X > s\right]$
stetige Gleichverteilung $\mathcal{U}(a,b)$ $(a<b,\, a,b\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{b-a}\cdot 1_{(a,b)}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} 0 & x\le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a<x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)\cdot t} & t\ne 0 \end{cases}$	$\frac{b^{n+1}-s^{n+1}}{(n+1)\cdot(b-s)}$ $(s\in(a,b))$
Gamma-verteilung $\Gamma(a,b)$ $(a,b\in(0,\infty))$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot e^{-ax}\cdot x^{b-1}$ $(x>0)$	$\underbrace{\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot\int_0^x e^{-at}\cdot t^{b-1}\,dt}_{=:\Gamma_x(a,b)}$ $(x\ge 0)$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a^2}$	$\frac{2}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^b$ $(t<a)$	$\frac{\Gamma(b+n)\cdot(1-\Gamma_s(a,b+n))}{a^n\cdot\Gamma(b)\cdot(1-\Gamma_s(a,b))}$
Exponential-verteilung $Exp(a)$ $(a>0)$	$a\cdot e^{-ax}$ $(x\in\mathbb{R})$	$1-e^{-ax}$ $(x\ge 0)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	2	$\frac{a}{a-t}$ $(t<a)$	$\frac{n!}{a^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(as)^k}{k!}$
Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ $(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0)$	$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$ $(x\in\mathbb{R})$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $(x\in\mathbb{R})$	μ	σ^2	0	$e^{nt+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}$	(2-Schritt-Rekursion)

Stetige Verteilungen (II)

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Dichte**	**Verteilungs-funktion**	**Erwartungs-wert**	**Varianz**	**Schiefe**	**Moment-erzeugende Funktion**	**Gestutzte Momente** $E\left[X^n \middle\vert X>s\right]$
Lognormal-verteilung $LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ $\left(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\right)$	$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\ln(x)-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot x\cdot\sigma}$ $(x>0)$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ $(x>0)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2}-1\right)$	$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\cdot\left(e^{\sigma^2}+2\right)$	—	$e^{n\mu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}\cdot\frac{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}-n\sigma\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}\right)}$
(European) Pareto-Verteilung $Par(a,b)$ $\left(a,b\in(0,\infty)\right)$	$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}$ $(x>a)$	$1-\left(\frac{a}{x}\right)^b$ $(x>a)$	$\frac{a\cdot b}{b-1}$ $(b>1)$	$\frac{a^2\cdot b}{(b-1)^2\cdot(b-2)}$ $(b>2)$	$\frac{2\cdot(b+1)\cdot\sqrt{b-2}}{(b-3)\cdot\sqrt{b}}$ $(b>3)$	existiert nicht	$\frac{b\cdot s^n}{b-n}$ $(s>a,b>n)$
um –*a* verschobene (American) Pareto-Verteilung $Par_0(a,b)$ $\left(a,b\in(0,\infty)\right)$	$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{a+x}\right)^{b+1}$ $(x>0)$	$1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^b$ $(x>a)$	$\frac{a}{b-1}$ $(b>1)$				$a^n b\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{b-k}\cdot\left(1+\frac{s}{a}\right)^k$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

[jeweils 1 Punkt]

(a): (iv) (b): (iv) (c): (iii) (d): (i) (e): (ii) (f): (iv) (g): (iii) (h): (ii)

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a) *[5 Punkte, für L_1 und L_2 in Summe 1,5 Punkte, für die übrigen Komponenten jeweils 0,5 Punkte.]*

- Leistungsprozess:

$$L_0 = 0$$

$$L_1 = \begin{cases} S & \text{bei Eintritt des Leistungsfalls im 1. Jahr mit Wkt. } \tilde{q_1} = 0{,}003, \\ 0 & \text{sonst mit Wkt. } 0{,}997 \end{cases}$$

$$L_2 = \begin{cases} S & \text{bei Eintritt des Leistungsfalls im 2. Jahr mit Wkt. } \tilde{q_2} = 0{,}004, \\ 0 & \text{sonst mit Wkt. } 0{,}996 \end{cases}$$

- Kostenprozess:

$$K_0 = \kappa + \gamma \cdot P^B = 1 + 0{,}02 \cdot P^B$$
$$K_1 = \gamma \cdot P^B = 0{,}02 \cdot P^B$$
$$K_2 = 0$$

- Prämienprozess: Zur Modellierung mit Kosten gehört die Bruttoprämie P^B.

$$P_0 = P^B$$
$$P_1 = 0$$
$$P_2 = 0$$

(b) *[2 Punkte]*
Es kann auf das Modell aus Teil (a) unter Verwendung der Nettorisiko- anstelle der Bruttoprämie zurückgegriffen werden.
Für den erwarteten Barwert der (determ.) Prämienzahlungen gilt: $\mathrm{E}(P) = \bar{P}$
Für den erwarteten Barwert der Leistungen gilt:
$\mathrm{E}(L) = D(1) \cdot \tilde{q_1} \cdot S + D(2) \cdot \tilde{q_2} \cdot S = (0{,}99 \cdot 0{,}003 + 0{,}98 \cdot 0{,}004) \cdot S = 0{,}00689 \cdot S$

Somit folgt direkt aus der einfachsten Form des Äquivalenzprinzips $\mathrm{E}(P) = \mathrm{E}(L)$ die gesuchte Formel $\bar{P} = 0{,}00689 \cdot S$.

(c) *[2 Punkte]*
Da die Eintrittswahrscheinlichkeiten des Versicherungsfalls $\tilde{q_1}$ und $\tilde{q_2}$ gemäß Aufgabenstellung implizite Sicherheitszuschläge enthalten, entspricht die Nettorisikoprämie $\bar{P}$ aus Teil (b) einer Nettorisikoprämie inklusive Sicherheitszuschlägen $\bar{P}^+$. In diesem Fall ist wiederum die Nettoprämie P^N definiert als $\bar{P}^+$. Somit kann $S = 400$ direkt in die Formel aus Teil (b) eingesetzt werden:

$$P^N = \bar{P}^+ = \bar{P} = 0{,}00689 \cdot 400 = 2{,}756 \approx 2{,}76$$

(d) *[4 Punkte]*

Es kann auf die Resultate aus Teil (a), (b) und (c) zurückgegriffen werden.
Für den erwarteten Barwert der (determ.) Prämienzahlungen gilt: $\mathrm{E}(P) = P^B$
Für den erwarteten Barwert der Leistungen gilt: $\mathrm{E}(L) = 0{,}00689 \cdot S$
Für den erwarteten Barwert der (determ.) Kosten gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= D(0) \cdot \left(1 + 0{,}02 \cdot P^B\right) + D(1) \cdot 0{,}02 \cdot P^B = 1 + 0{,}02 \cdot P^B + 0{,}99 \cdot 0{,}02 \cdot P^B \\ &= 1 + 0{,}0398 \cdot P^B\end{aligned}$$

Somit folgt aus der erweiterten Form des Äquivalenzprinzips:

$$\begin{aligned} P^B &= 0{,}00689 \cdot S + 1 + 0{,}0398 \cdot P^B \\ \Longleftrightarrow 0{,}9602 \cdot P^B &= 0{,}00689 \cdot S + 1 \\ \Longleftrightarrow P^B &= \frac{0{,}00689 \cdot S + 1}{0{,}9602}\end{aligned}$$

Für $S = 400$ liefert Einsetzen die gesuchte Bruttoprämie:

$$P^B = \frac{0{,}00689 \cdot 400 + 1}{0{,}9602} = \frac{3{,}756}{0{,}9602} \approx 3{,}91$$

Achtung bei Abweichung von Aufgabenstellung:
Bei Rechnung mit gerundetem P^N lautet das gerundete Ergebnis 3,92.

(e) *[1 Punkt]*

Für den Zahlbeitrag B gilt:
$B = P^B \cdot (1 - b) \cdot (1 + \tau) = P^B \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}19 = P^B \cdot 1{,}071 \approx 4{,}19$

Achtung bei Abweichung von Aufgabenstellung:
Bei Rechnung mit $P^B \approx 3{,}92$ lautet das gerundete Ergebnis 4,20.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 *[14 Punkte]*

(a) *[2 Punkte]*
Für $j = 1, 2$ gilt für die vertragsindividuellen Quoten:

$$q^{(j)} = \frac{\max\{S_j - v_0;\, 0\}}{S_j} \quad \Rightarrow q^{(1)} = \frac{\max\{100-50;\, 0\}}{100} = 50\% \text{ und}$$

$$q^{(2)} = \frac{\max\{200-50;\, 0\}}{200} = 75\%$$

(b) *[9 Punkte insgesamt]*
Es liegt ein individuelles Modell mit zwei homogenen Kollektiven $j = 1, 2$ vor und für die Risiken $Y_i^{(j)}$ $\left(i = 1, \ldots, n_j\right)$ gilt:

$$Y_i^{(j)} = S_j \cdot \begin{cases} 1 & \text{im Leist.fall mit Wkt. } \tilde{q}_j, \\ 0 & \text{sonst mit Wkt. } 1-\tilde{q}_j \end{cases} = S_j \cdot W_j \text{ mit } S_j \text{ konstant, } W_j \sim \text{Bin}(1, \tilde{q}_j).$$

[4 Punkte] Zunächst können Erwartungswert und Varianz für die Teilsummen S_1^{ind} und S_2^{ind} berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(S_1^{\text{ind}}\right) &= n_1 \cdot S_1 \cdot \tilde{q}_1 = 200 \cdot 100 \cdot 0{,}005 = 100 \\
\mathrm{E}\left(S_2^{\text{ind}}\right) &= +n_2 \cdot S_2 \cdot \tilde{q}_2 = 100 \cdot 200 \cdot 0{,}003 = 60 \\
\mathrm{Var}\left(S_1^{\text{ind}}\right) &= n_1 \cdot (S_1)^2 \cdot \tilde{q}_1 \cdot (1-\tilde{q}_1) = 200 \cdot 100^2 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995 = 9.950 \\
\mathrm{Var}\left(S_2^{\text{ind}}\right) &= n_2 \cdot (S_2)^2 \cdot \tilde{q}_2 \cdot (1-\tilde{q}_2) = 100 \cdot 200^2 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997 = 11.964
\end{aligned}$$

[4 Punkte] Als nächstes können Erwartungswert und Varianz für $\underline{S}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\underline{S}\right) &= \mathrm{E}\left(\left(1-q^{(1)}\right) \cdot S_1^{\text{ind}} + \left(1-q^{(2)}\right) \cdot S_2^{\text{ind}}\right) \\
&= \left(1-q^{(1)}\right) \cdot \mathrm{E}\left(S_1^{\text{ind}}\right) + \left(1-q^{(2)}\right) \cdot \mathrm{E}\left(S_2^{\text{ind}}\right) = 0{,}5 \cdot 100 + 0,25 \cdot 60 = 65 \\
\mathrm{Var}\left(\underline{S}\right) &= \mathrm{Var}\left(\left(1-q^{(1)}\right) \cdot S_1^{\text{ind}} + \left(1-q^{(2)}\right) \cdot S_2^{\text{ind}}\right) \\
&= \left(1-q^{(1)}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(S_1^{\text{ind}}\right) + \left(1-q^{(2)}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(S_2^{\text{ind}}\right) = 0{,}5^2 \cdot 9.950 + 0,25^2 \cdot 11.964 \\
&= 3.235{,}35
\end{aligned}$$

[1 Punkt] Schließlich gilt für den gesuchten Variationskoeffizienten:

$$\mathrm{Vko}(\underline{S}) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\underline{S})}}{\mathrm{E}(\underline{S})} = \frac{\sqrt{3.235{,}35}}{65} \approx 0.8751$$

(c) *[2 Punkte]*

Die proportionale Aufteilung des Risikos erfolgt bei der Summenexzedenten-Rückversicherung per Definition abhängig von der Versicherungssumme des jeweiligen Vertrages. Bei Versicherungen, bei denen die Höhe der Leistung im Versicherungsfall nicht (primär) von einer vereinbarten Versicherungssumme abhängt, ist somit keine Summenexzedenten-Rückversicherung möglich. Mögliche Beispiele sind unter anderem die Krankenvollkostenversicherung oder die private Haftpflichtversicherung.

(d) *[2 Punkte]*

Bei der genannten Gruppenunfallversicherung ist die stochastische Unabhängigkeit der Risiken fraglich. Da alle Versicherungsnehmer in demselben Unternehmen beschäftigt sind, liegt ein Kumulrisiko vor. Daher ist es hier empfehlenswert, neben einer pro-Risiko-Deckung durch den Summenexzedenten auch eine pro-Ereignis-Deckung durch einen Kumulschadenexzedenten abzuschließen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) *[6 Punkte]* Es gibt im Wesentlichen zwei einschlägige Datentypen:

- **Schadendaten** beschreiben die Schadenereignisse und enthalten Angaben zu:
  - Zeitpunkt (Datum, Versicherungsperiode etc.);
  - Art und Ursache (z. B. Feuer, Überschwemmung, Sturm etc.);
  - sachlicher Bezug: versichertes Objekt (z. B. Haus, Kfz etc.);
  - Ort des Schadenereignisses (z. B. In-, Ausland);
  - Höhe der Entschädigung

  Schadendaten bilden in ihrer Gesamtheit die Schadenstatistik = Grundlage der Tarifierung.

- **Bestandsdaten** charakterisieren die (den Schadendaten zugehörigen) versicherten Bestände. Sie enthalten – unabhängig von Schadenereignissen – Angaben zu den versicherungstechnischen Einheiten, etwa:
  - Versicherungssumme (Höchstgrenze der Entschädigung);
  - Ausprägungen der Tarifmerkmale (Vertragsdaten), z. B. persönliche Daten des Versicherungsnehmers (Alter, Wohnort etc.) oder Daten über das versicherte Objekt und seine Nutzung.

In der Tarifierung interessiert – neben der statistischen Analyse der einzelnen Datentypen – vor allem das Zusammenwirken von Schaden- und Bestandsdaten, etwa hinsichtlich der Einflüsse der Tarifmerkmale auf das Schadenverhalten oder hinsichtlich der Schätzung der erwarteten Schadenanzahl (Schadenhäufigkeit) pro Risiko (und z. B. pro Jahr).

(b) *[6 Punkte]* Es sind $N = 6$ Schäden eingetreten. Die Anzahl der Jahreseinheiten beträgt

$$n_o = 0{,}50 + 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}75 + 1{,}00 = 3{,}75,$$

sodass die Schadenhäufigkeit gleich

$$H = \frac{N}{n_o} = \frac{6}{3{,}75} = 1{,}6$$

ist. Der Schadenbedarf ergibt sich – ohne auf Schadenanzahlen eingehen zu müssen – als:

$$SB = \frac{S}{n_o} = \frac{15 + 10 + 20 + 3 + 2 + 4}{3{,}75} = \frac{54}{3{,}75} = 14{,}4$$

Die Schadenquote erfordert noch die Berechnung der verdienten Beiträge:

$$b = 60 \cdot 0{,}50 + 10 \cdot 0{,}75 + 6 \cdot 0{,}75 + 25 \cdot 0{,}75 + 35 \cdot 1 = 68{,}75$$

Die Schadenquote ist somit:

$$SQ = \frac{S}{b} = \frac{54}{68{,}75} = 78{,}55\ \%.$$

(Die Versicherungssummen gehen nicht in die hier gefragten Kennzahlen ein.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 5

(a) *[8 Punkte]* Tarifmodelle ordnen den Risikoklassen – formal eindeutig festgelegt durch ein n-Tupel $i := (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – (Nettorisiko-)Prämien

$$b_i = b_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$$

zu. Multiplikative und additive Modelle sind gebräuchliche Varianten dieser Tarifmodelle. Beide Modellvarianten setzen bei dem Schadenbedarf (Kollektivmittel) des gesamten Bestands

$$sb = \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Kumulierte Jahreseinheiten (Volumenmaße)}}$$

an. Der individuelle Einfluss der Risikoklasse (i) bzw. der in dieser Tarifzelle vorliegenden Merkmalsausprägungen wird durch die sogenannten Marginalparameter berücksichtigt. Bei multiplikativen Modellen resultiert der Ansatz

$$b_i = b_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = sb \cdot \prod_{j=1}^{n} u_{j, i_j}$$

und die Parameter u_{j,i_j} werden als Marginalfaktoren bezeichnet; bei additiven Modellen ergibt sich der Ansatz

$$b_i = b_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = sb + \sum_{j=1}^{n} u_{j, i_j}$$

und die Parameter u_{j,i_j} werden als Marginalsummanden bezeichnet. (Die Marginalsummanden unterscheiden sich trotz gleicher Bezeichnung selbstverständlich von den Marginalfaktoren.) Die Marginalparameter sind durch geeignete Verfahren, etwa Ausgleichsverfahren, zu schätzen. In der Praxis dominieren die multiplikativen Verfahren.

(b) *[2 Punkte]* Verteilungsfreie Verfahren verwenden – im Gegensatz zu den verteilungsabhängigen bzw. stochastischen Verfahren – keine stochastischen Modelle zur Beschreibung der auftretenden Zufallsvariablen, insb. Schadenaufwendungen. Entsprechend sind aus den heuristischen Ansätzen keine qualifizierten Aussagen über Güte der Schätzer, Prognosegenauigkeit, Güte der Anpassung abzuleiten.

(c) *[10 Punkte]* Zunächst ist der Schadenbedarf zu bestimmen:

$$sb = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} s_{i,j}}{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_{i,j}} = \frac{50 + 135 + 215 + 130 + 310 + 470 + 41 + 160 + 189}{5 + 10 + 17 + 10 + 20 + 35 + 8 + 25 + 40}$$

$$= \frac{1.700}{170} = 10$$

Da nur die Prämien für die beiden Zellen $(1,2)$ und $(2,3)$ zu berechnen sind, genügt es, die folgenden vier (statt neun) Marginaldurchschnitte zu bestimmen:

$$sb_{1\circ} = \frac{s_{1\bullet}}{v_{1\bullet}} = \frac{\sum_{j=1}^{3} s_{1,j}}{\sum_{j=1}^{3} v_{1,j}} = \frac{50+135+215}{5+10+17} = \frac{400}{32} = 12{,}5$$

$$sb_{2\circ} = \frac{s_{2\bullet}}{v_{2\bullet}} = \frac{\sum_{j=1}^{3} s_{2,j}}{\sum_{j=1}^{3} v_{2,j}} = \frac{130+310+470}{10+20+35} = \frac{910}{65} = 14$$

$$sb_{\circ 2} = \frac{s_{\bullet 2}}{v_{\bullet 2}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_{i,2}}{\sum_{i=1}^{3} v_{i,2}} = \frac{135+310+160}{10+20+25} = \frac{605}{55} = 11$$

$$sb_{\circ 3} = \frac{s_{\bullet 3}}{v_{\bullet 3}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} s_{i,3}}{\sum_{i=1}^{3} v_{i,3}} = \frac{215+470+189}{17+35+40} = \frac{874}{92} = 9{,}5$$

Die gesuchten Prämien ergeben sich nun durch Multiplikation der Marginaldurchschnitte und Normierung durch den Schadenbedarf:

$$b_{1,2} = \frac{sb_{1\circ} \cdot sb_{\circ 2}}{sb} = \frac{12{,}5 \cdot 11}{10} = 13{,}75$$

$$b_{2,3} = \frac{sb_{2\circ} \cdot sb_{\circ 3}}{sb} = \frac{14 \cdot 9{,}5}{10} = 13{,}3$$

(d) *[2 Punkte]* Einerseits sind natürlich vor allem solche Tarifmerkmale heranzuziehen, die möglichst stark mit den Schadenaufwendungen korrelieren. Andererseits sollen die ausgewählten Tarifmerkmale untereinander möglichst unkorreliert sein, um Multikollinearität zu vermeiden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6

(a) *[2 Punkte]* Versicherungszweige mit langer Schadenabwicklung werden als long tail business bezeichnet. Dazu zählt etwa die Haftpflichtversicherung. (In Abgrenzung dazu gilt etwa die Sachversicherung, z. B. die Hausratversicherung, als short tail business.) Offenbar gehört es deshalb zum Wesen des long tail business, dass vor allem in diesen Versicherungszweigen (Schaden-) Reserven für noch nicht vollständig abgewickelte Versicherungsfälle gebildet werden.

(b) *[8 Punkte]* Abwicklungsmuster sind die Basis der Modellbildung für zahlreiche Methoden der Schadenreservierung. Sie unterstellen für ausgewählte zentrale Kennzahlen der Schadenabwicklung bestimmte Systematiken und erklären die Abweichungen von diesen systematischen Größen (Erwartungswerten) als zufällige und unsystematische Schwankungen. Bei den Methoden der Schadenreservierung unterstellt man stets anfalljahrunabhängige Muster, während das Abwicklungsjahr (k) in das Muster eingeht.

Abwicklungsmuster werden (bei den Standardverfahren) für

- Anteile $\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$,
- Quoten $\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$
- und Faktoren $\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$
- sowie für Schadenquotenzuwächse $\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}$

unterstellt. Schadenquotenzuwächse stellen in diesem Zusammenhang insofern eine Besonderheit dar, als sie – im Gegensatz zu den Anteilen, Quoten und Faktoren – neben den Schadenanzahlen und -ständen noch weitere Kennzahlen, nämlich die Prämieneinnahmen verwenden, die als geeignete Maßzahlen (Volumenmaße) der unterschiedlichen Anfalljahre fungieren.

(c) *[6 Punkte]* Für die Schätzer der Chain-Ladder-Faktoren gilt

$$\widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} := \frac{S_{2016,3}}{S_{2016,2}} = \frac{630}{600} = 1{,}05$$
$$\widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} := \frac{S_{2016,2} + S_{2017,2}}{S_{2016,1} + S_{2017,1}} = \frac{600 + 775}{500 + 600} = \frac{1.375}{1.100} = 1{,}25$$
$$\widehat{\varphi}_1^{\text{CL}} := \frac{S_{2016,1} + S_{2017,1} + S_{2018,1}}{S_{2016,0} + S_{2017,0} + S_{2018,0}} = \frac{500 + 600 + 1.000}{300 + 400 + 500} = \frac{2.100}{1.200} = 1{,}75$$

Für die Prädiktoren der Chain-Ladder-Endschadenstände gilt somit

$$\widehat{S}_{2018,3}^{\text{CL}} := S_{2018,1} \cdot \widehat{\varphi}_2^{\text{CL}} \cdot \widehat{\varphi}_3^{\text{CL}} = 1.000 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}05 = 1.312{,}5$$

und

$$\widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2019,3} := S_{2019,0} \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_1 \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_2 \cdot \widehat{\varphi}^{\mathrm{CL}}_3 = 600 \cdot 1{,}75 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}05 = 1.378{,}1$$

Für die Chain-Ladder-Reserven ergibt sich daraus schließlich:

$$\widehat{R}^{\mathrm{CL}}_{2018} := \widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2018,3} - S_{2018,1} = 1.312,5 - 1.000 = 312{,}5$$
$$\widehat{R}^{\mathrm{CL}}_{2019} := \widehat{S}^{\mathrm{CL}}_{2019,3} - S_{2019,0} = 1.378,1 - 600 = 778{,}1$$

(d) *[4 Punkte]* Beide Verfahren verwenden beliebig vorzugebende a priori-Schätzer $\left(\widehat{\gamma}_0, \ldots, \widehat{\gamma}_n\right)$ für die Quoten. Während bei dem Loss-Development-Verfahren die künftigen Schadenstände nur auf Basis der aktuellen Schadenstände $S_{i,n-i}$ und der Schätzer $\left(\widehat{\gamma}_0, \ldots, \widehat{\gamma}_n\right)$ errechnet werden, verwendet das Cape-Cod-Verfahren zusätzlich Volumenmaße $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ (i. d. R. Prämieneinnahmen), mit denen eine als anfalljahrunabhängig unterstellte Endschadenquote κ (ebenfalls auf Basis der aktuellen Schadenstände) geschätzt wird. Die Einbeziehung der Volumenmaße stabilisiert die Methodik gegenüber Ausreißern, sodass das Cape-Cod-Verfahren als eine Robustifizierung des Loss-Development-Verfahrens aufgefasst werden kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7

(a) Die Bedeutung der einzelnen Terme:

$_m\hat{L}_x$ = Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x+m, x+m+1]$ in der Hauptgesamtheit ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres

$_m\hat{P}_x$ = Erwartungswert der Prämienleistungen des Jahres $]m, m+1]$, die durch Erreichen des Alters $x+m$ in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Beginn des Jahres

$_mV_x$ = Versicherungsmathematische Reserve nach m Jahren (vor Einzahlung der Prämie des $(m+1)-$ten Jahres)

p_{x+m} = Wahrscheinlichkeit einer Person der Hauptgesamtheit des Alters $x+m$, das Alter $x+m+1$ in der Hauptgesamtheit zu erreichen (einjährige Bestandsverbleibewahrscheinlichkeit)

v = Abzinsungsfaktor eines Jahres

(b)

$$\begin{aligned}
{}_mP_x^S &= v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
{}_mP_x^R &= {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x \\
{}_mP_x^S + {}_mP_x^R &= v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x - v\,q_{x+m}\,{}_{m+1}V_x \\
&= v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x + {}_m\hat{L}_x \\
&= {}_m\hat{P}_x \qquad \text{nach versicherungsmathematischer Bilanzgleichung}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
v\,p_{x+m}\,{}_{m+1}V_x &= {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x = {}_mV_x \quad \text{für} \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \\
&\Rightarrow \quad {}_mV_x = 0 \quad m = 1, \dots, n \quad (\text{wegen } {}_0V_x = 0) \\
{}_mP_x^S &= v\,{}_{m+1}V_x - {}_mV_x = 0 \\
{}_mP_x^R &= {}_m\hat{L}_x = {}_m\hat{P}_x
\end{aligned}$$

Die gesamte Prämie wird zur Finanzierung der im zugehörigen Altersintervall erwartungsgemäß verursachten Leistungen verwendet. Es findet kein Sparprozess und damit auch kein Reserveaufbau statt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8

(a) Die Zustände lassen sich wie folgt beschreiben:

$$Z_k \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } X \leq x+k\,, \\ 1 & \text{falls } X > x+k\,, \end{cases}$$

Ferner kann man die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt beschreiben:

$q_{00}(k) = P\{X \leq x+k \mid X \leq x+k-1\}$
$q_{01}(k) = P\{X > x+k \mid X \leq x+k-1\}$
$q_{10}(k) = P\{X \leq x+k \mid X > x+k-1\}$
$q_{11}(k) = P\{X > x+k \mid X > x+k-1\}$

(b) In der Notation der HEUBECK-RICHTTAFELN 2018 G lautet die Übergangsmatrix:

$$Q(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^r_{x+k-1} & 1-q^r_{x+k-1} \end{pmatrix}$$

Beweis der Aussage in der Aufgabenstellung durch vollständige Induktion:

k = 1:

$$Q(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-p^r_x & p^r_x \end{pmatrix}$$

$k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k+1} Q(j) \quad &= \quad Q(k+1)\cdot\prod_{j=1}^{k} Q(j) = Q(k+1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-{}_kp^r_x & {}_kp^r_x \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^r_{x+k} & 1-q^r_{x+k} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-{}_kp^r_x & {}_kp^r_x \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^r_{x+k}+p^r_{x+k}-p^r_{x+k}\cdot{}_kp^r_x & p^r_{x+k}\cdot{}_kp^r_x \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-{}_{k+1}p^r_x & {}_{k+1}p^r_x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Der Leistungsbarwert der Verpflichtung ist der Erwartungswert des Erfüllungsbetrags. Es gilt:

$$\begin{aligned} E(B) &= E\left(\sum_{k\geq 0} v^k \cdot 1_{\{Z_k=1\}} \cdot R_{x+k}\right) = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot E\left(1_{\{Z_k=1\}}\right) \cdot R_{x+k} \\ &= \sum_{k\geq 0} v^k \cdot \mathbb{P}(Z_k = 1) \cdot R_{x+k} = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^r \cdot R_{x+k} \end{aligned}$$

(d) Bei der Bewertung einer Anwartschaft auf Witwenrente wird häufig die sogenannte kollektive Methode angesetzt, d.h. es wird die Wahrscheinlichkeit eines Berechtigten, bei Tod verheiratet zu sein, sowie die Altersdifferenz der Witwe im Todeszeitpunkt berücksichtigt. Hierbei können mehrere mögliche Geburtsjahrgänge der potentiellen Witwe auftreten. Damit die Markov-Eigenschaft erfüllt ist, ist ein eigener Zustand für jeden möglichen Geburtsjahrgang der Witwe erforderlich, wodurch sich die Anzahl der Zustände deutlich erhöht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 9

(a) Als Rechnungszins ist in §6a EStG ein Zinssatz von 6 % gesetzlich vorgeschrieben. Dieser Rechnungszins liegt derzeit deutlich über dem für die handelsbilanzielle Bewertung vorgeschriebenen durchschnittlichen Marktzins der vergangenen 10 Geschäftsjahre und führt damit zu einer Unterbewertung der Verpflichtungen im Vergleich mit der handelsbilanziellen Bewertung.

Bei der steuerbilanziellen Bewertung der Pensionsverpflichtungen dürfen künftige Erhöhungen von Bemessungsgrundlagen nur einbezogen werden, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen, während bei der handelsbilanziellen Bewertung eine bestmögliche Schätzung vorzunehmen ist. Auch dies führt in der steuerbilanziellen Bewertung zu einer Unterbewertung der Verpflichtungen.

(b) In der Praxis werden insbesondere die Rückrechnungsmethode und die Stichtagsmethode verwendet.

Bei der Rückrechnungsmethode wird dem Pensionierungsalter z die auf diesen Zeitpunkt gemäß der Pensionszusage exakt ermittelte Leistung zugeordnet. Dem Alter $x < z$ wird die Leistung zugeordnet, die der um $z - x$ geringeren Dienstzeit entspricht.

Bei der Stichtagsmethode wird dem Pensionierungsalter z ebenfalls die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Einem versicherungstechnischen Alter $x < z$ wird die Leistung zum nächsten Geburtstag zugeordnet.

(c) Unter Fluktuation versteht man das Ausscheiden eines Mitarbeiters ohne Eintritt eines Versorgungsfalles (also z.B. durch arbeitgeber- oder arbeitnehmerseitige Kündigung). In der steuerlichen Bewertung der Pensionsverpflichtungen darf die Fluktuation explizit nicht berücksichtigt werden, vielmehr wird pauschal ein Mindestalter für die Rückstellungsbildung angesetzt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 10

(a) *[2 Punkte]* Für die beiden Werte gilt:

$$ {}_2p_{54}^{(\mathrm{DAV})} = (1-q_{54})\cdot(1-q_{55}) = 99,55\,\% $$

und

$$ {}_2p_{54}^{(\mathrm{Destatis})} = 98,898\,\%. $$

(b) *[2 Punkte]* Da die DAV 2004 R Sterbetafel zur Einschätzung des Erlebensfallrisikos verwendet werden, sind Sicherheitsabschläge in den Sterbewahrscheinlichkeiten enthalten, die dazu führen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeiten über den realistischen Werten liegen. Die Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes enthalten keine Sicherheitszuschläge oder -abschläge. Hinzu kommt, dass das Kollektiv der Versicherten sich in seiner Sterblichkeit vom Kollektiv der Gesamtbevölkerung unterscheidet.

(c) *[4 Punkte]* Es gilt

$$ {}_2V_{54} = 10.000. $$

Außerdem ist

$$ {}_1V_{54} = v\cdot {}_1p_{55}\cdot {}_2V_{54} - P $$

und

$$ 0 = {}_0V_{54} = v\cdot {}_1p_{54}\cdot {}_1V_{54} - P. $$

Somit ist:

$$ P\cdot(1+v\cdot {}_1p_{54}) = {}_0V_{54} = v\cdot {}_1p_{54}\cdot v\cdot {}_1p_{55}\cdot {}_2V_{54} = v^2\cdot {}_2p_{54}\cdot 10.000. $$

Der Nettojahresbeitrag beträgt somit 4.916,42 Euro.

Lösungshinweise zu Aufgabe 11

(a) *[4 Punkte]* Das riskierte Kapital beträgt pro Vertrag 49.570 Euro, denn

$$50.000 - 430 = 49.570.$$

Außerdem ist laut Aufgabenstellung die kalkulierte Sterblichkeit gegeben durch $q = 0,0015$.

(i) Wenn im Jahr 2019 genau eine Person stirbt, dann ist die beobachtete Sterblichkeitserfahrung $\widetilde{q} = 1/2000 = 0,0005$. Somit beträgt das Risikoergebnis pro Vertrag 1 Promille des riskierten Kapitals, also 49,57 Euro und für den gesamten Bestand 99.140 Euro.

(ii) Wenn im Jahr 2019 genau fünf Personen sterben, dann beträgt die Übersterblichkeit (Differenz zwischen beobachteter Sterblichkeit und kalkulierter Sterblichkeit) genau 1 Promille, sodass das Risikoergebnis bei -99.140 Euro liegt.

(b) *[6 Punkte]* In Unternehmen 1 liegen die anzurechnenden Kapitalerträge unter den rechnungsmäßigen Zinsen. Die Differenz von -5 Millionen Euro kann mit den anderen Ergebnisquellen verrechnet werden. Diese Verrechnungsmöglichkeit gilt nicht für das negative übrige Ergebnis von -2 Millionen Euro. Insgesamt ergibt sich somit (unter Berücksichtigung der Direktgutschrift) eine Mindestzuführung für LVU 1 in Höhe von einer Million Euro.

In Unternehmen 2 liegen 90 % der anzurechnenden Kapitalerträge unter den rechnungsmäßigen Zinsen (90 < 91). Hier wird bei der Bestimmung der Mindestzuführung der negative Saldo nicht berücksichtigt und durch andere Ergebnisquellen ausgeglichen. Auch das negative Risikoergebnis wird nicht ausgeglichen. Insgesamt beträgt die Mindestzuführung aus dem übrigen Ergebnis 2,5 Millionen. Da bereits 2 Millionen durch die Direktgutschrift zu den Versicherungsnehmern fließen, beträgt die Mindestzuführung zur RfB eine halbe Millionen Euro.

In Unternehmen 3 sind alle Ergebnisquellen positiv. Die Mindestzuführung beträgt daher 11 Millionen Euro.

In Unternehmen 4 wird das negative Kapitalanlageergebnis von -7 Millionen Euro nicht durch die anderen Ergebnisquellen (6 Millionen Euro) ausgeglichen werden. Das Unternehmen muss keine Mindestzuführung zur RfB leisten.

Hinweis: Die Erläuterungen sind nur Teil der Lösungshinweise. Prüfungsteilnehmer, die für die vier Unternehmen die korrekte Mindestzuführung bestimmen, erhalten alle Punkte dieser Teilaufgabe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 12

(a) *[4 Punkte]* Die PKV 2020 Sterbetafel ist eine Periodensterbetafel. In Periodensterbetafeln ist die Sterblichkeit in einem bestimmten Zeitraum (z. B. im Jahr 2018) dargestellt. Im Gegensatz dazu zeigen Generationensterbetafel (wie z. B. die Sterbetafel DAV 2004 R) die Sterblichkeit einer Geburtskohorte (z. B. der Personen, die im Jahr 1965 geboren sind).

(b) *[2 Punkte]* Die einjährige Sterblichkeit im Alter 57 in der PKV-Sterbetafel zeigt die Sterblichkeit der 56-jährigen Personen in der Vergangenheit (reduziert um Sicherheitsabschläge). Dagegen ist die einjährige Sterblichkeit im Alter 57 in der DAV 2004 R eine Prognose für die 57-jährigen Personen im Jahr 2022 ($1965 + 57 = 2022$; auch hier: Sicherheitsabschläge). Die Tatsache, dass der Wert in der DAV 2004 R Sterbetafel geringer ist als in der PKV-Sterbetafel ist plausibel, da Sterbewahrscheinlichkeiten im Zeitverlauf sinken. Unterschiede in den Sterbewahrscheinlichkeiten können auch dadurch entstehen, dass die Herleitung auf zwei unterschiedlichen Kollektiven basiert.

(c) *[2 Punkte]* Die PKV-Sterbetafel berücksichtigt unter anderem den Sterblichkeitstrend, Sicherheitsabschläge bezogen auf die Bestandsgröße der PKV-Versicherten sowie einen Vergleich und Minimierung mit Vorjahreswerten. Die Nennung von zwei dieser drei Maßnahmen ist ausreichend.

Lösungshinweise zu Aufgabe 13

(a) *[4 Punkte]* Der monatliche Netto-Neugeschäftsbeitrag liegt bei 449,24, denn:

$$P = \frac{A_{43}^{n}}{\ddot{a}_{43}^{n}} = 5.390,90$$

(b) *[6 Punkte]* Für den angepassten Netto-Jahresbeitrag nach drei Jahren gilt:

$$P^{n} = \frac{A_{43}^{n} - {}_{3}V_{40}}{\ddot{a}_{43}^{n}} = \frac{101.291,46 - 7.563,15}{18,78935} = 4.988,37$$

Somit gilt für den Netto-Monatsbeitrag 415,70 Euro.