DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Formelsammlung Versicherungsmathematik

Prüfungsordnung 4.1

X, Y und Z seien Zufallsvariable. Die Existenz der auftretenden (bedingten) Momente sei stets vorausgesetzt.

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} =$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen
$1_A =$ Indikatorfunktion für die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, d.h. $1_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $1_A(x) = 0$ sonst

Verteilungsfunktion und Dichte von Zufallsvariablen

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion bei stetiger Zufallsvariable X: $f_X(x) = F'_X(x)$ fast sicher
- Zähldichte bei diskreter Zufallsvariable X: $f_X(x) = P(X = x)$

Momente von Zufallsvariablen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}$): $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \, dF_X(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x) \, dx$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left(X^n\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^n \cdot f_X(x)$
  - falls X nichtnegativ:
  $$\mathrm{E}\left(X^n\right) = n \int_0^\infty x^{n-1} \cdot (1 - F_X(x)) \, dx$$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(X^1\right)$
- Varianz (2. zentrales Moment von X): $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$
- Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- Variationskoeffizient: $\mathrm{Vko}(X) = \dfrac{\sigma(X)}{\mathrm{E}(X)} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}$
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
- Korrelationkoeffizient: $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Cov}\left(\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, \dfrac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}\right) \in [-1, 1]$

Ungleichung von Cantelli

Für alle $c > 0$ gilt:

$$P(X \geq \mathrm{E}(X) + c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2 + \mathrm{Var}(X)}$$

Rechenregeln für bedingte Erwartungen

- Iterativität des Erwartungswerts: $\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X)$
- Falls X, Y unabhängig: $\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}(X)$
- Für messbare Funktionen f, g: $\mathrm{E}[f(Z)\cdot X + g(Z)\cdot Y\,|\,Z] = f(Z)\cdot \mathrm{E}(X|Z) + g(Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$
- Bedingte Varianz: $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}\left(X^2|Y\right) - \mathrm{E}(X|Y)^2$
- Iterativität der Varianz: $\mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|Y)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|Y)] = \mathrm{Var}(X)$
- Bedingte Covarianz: $\mathrm{Cov}(X, Y\,|\,Z) = \mathrm{E}(XY|Z) - \mathrm{E}(X|Z)\cdot \mathrm{E}(Y|Z)$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right)$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right)$, $t \in [0,1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_{x\in\mathbb{R}} t^x \cdot f_X(x)$

Kollektives Modell

- *Kollektives Modell*
  Sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable und $X_1, X_2, \ldots$ nichtnegative Zufallsvariablen. Die Zufallssumme
  $$S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N} X_j$$
  heißt kollektives Modell, wenn $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig sind und $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt wie eine Zufallsvariable X sind.
- *Formeln von Wald*
  - 1. Formel von Wald: $\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{E}(X)$
  - 2. Formel von Wald: $\mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = \mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\cdot \mathrm{E}(X)^2$
  - Falls $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$: $\mathrm{E}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda\cdot \mathrm{E}(X)$, $\quad \mathrm{Var}\left(S^{\text{koll}}\right) = \lambda\cdot \mathrm{E}\left(X^2\right)$
- *Fundamentalformeln*
  Für $d > 0$ sei X diskret verteilt auf dem Träger $\{0, d, 2d, 3d, \ldots\}$:
  $$\begin{aligned} \psi_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(\psi_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{MEF}_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(\mathrm{MEF}_X(t)\right) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \\ m_{S^{\text{koll}}}(t) &= m_N\left(m_X(t)\right) && \text{für alle } t \in [0,1] \end{aligned}$$

Summen von Zufallsvariablen

Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:

- Stetige Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$

  für messbare $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.

- Diskrete Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$

  für $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ sind.

Layer-Identität Für Priorität a und Limit l gilt:

$$\min(\max(X-a;0);l) = \min(X;a+l) - \min(X;a) = \max(X-a;0) - \max(X-(a+l);0)$$

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	**Zähldichte** $\boldsymbol{f_k := f_N(k) = \mathrm{P}(N=k)}$	**Erwartungs-wert** $\mathbf{E}(\boldsymbol{N})$	**Varianz** $\mathbf{Var}(\boldsymbol{N})$
Diskrete Gleichverteilung $N \sim \mathrm{U}(m)$ $m \in \mathbb{N}$	$f_k = \frac{1}{m+1}$ für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m \cdot (m+1)}{12}$
Poisson-Verteilung $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$f_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
Negative Binomial-Verteilung $N \sim \mathrm{NegBin}(\beta,p)$ $\beta > 0, p \in (0,1)$	$f_k = \binom{k+\beta-1}{k} \cdot p^\beta \cdot (1-p)^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p}$	$\frac{\beta \cdot (1-p)}{p^2}$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	**Dichte $f_X(x)$**	**Verteilungsfunktion $F_X(x)$**	**Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$**	**Varianz $\mathrm{Var}(X)$**
Stetige Gleichverteilung $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ $a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{1}{b-a} \cdot 1_{(a,b)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } x \in (a,b) \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential-Verteilung $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$1 - e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma-Verteilung $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}$ für $x > 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}\, dt$ für $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Stetige Verteilungen (II)

Bezeichnung/ Kurzbez./Parameter	Dichte $f_X(x)$	Verteilungsfunktion $F_X(x)$	Erwartungswert $E(X)$	Varianz $Var(X)$
Normal-Verteilung $X \sim \mathrm{Norm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Lognormal-Verteilung $X \sim \mathrm{LogNorm}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $x > 0$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ für $x > 0$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2}-1)$
Pareto-Verteilung (European Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > t$	$1-\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}$ für $x > t$	$\frac{t\alpha}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$
Nullpunkt-Pareto-Verteilung (American Pareto) $X \sim \mathrm{Pareto}_0(t, \alpha)$ $t, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > 0$	$1-\left(\frac{t}{t+x}\right)^{\alpha}$ für $x > 0$	$\frac{t}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{t^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$