DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Modellierung und ERM

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht einschließlich Deckblatt aus 9 Seiten.
- Alle Antworten sind – sofern nichts anderes angegeben ist – zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.
- Bitte vermeiden Sie das nicht zusammenhängende Streuen der Lösungen zu den einzelnen Aufgaben.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Volker Goersmeyer, Dr. Lucattilio Tenuta,
Andreas Wagner

Aufgabe 1. *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [22 Punkte]*

Ein Lebensversicherungsunternehmen verkauft Versicherungen, die sowohl bei Invalidität als auch bei Tod und Storno eine Leistung vorsehen.

Produktbeschreibung:

- Bei Invalidität wird 80% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Bei Tod nach Invalidität werden die restlichen 20% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Bei Tod vor Invalidität wird 100% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Das Produkt wird gegen laufenden Beitrag verkauft.
- Bei Storno wird ein in den Versicherungsbedingungen festgelegter Prozentsatz der HGB-Reserve für das Produkt an die Versicherungsnehmer ausgezahlt.

(a) *[3 Punkte]* Nennen Sie die Zahlungsströme, die das Lebensversicherungsunternehmen in einem Projektionsmodell verwenden sollte, um das Produkt zu bewerten.

(*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie sechs unterschiedliche Zahlungsströme erwähnen*)

Ein Vertrag hat eine Versicherungssumme i. H. v. 100.000 Euro. Folgende Tabelle fasst die Best-Estimate-Annahmen für Invalidität, Storno und Tod für die ersten drei Projektionsjahre zusammen. Die Best-Estimate-Annahmen gelten gleichermaßen für aktive und für invalide Versicherungsnehmer.

Jahr (j)	Invalidität (i_j)	Tod (q_j)	Storno (s_j)
1	0,15%	1,5%	2%
2	0,25%	2,5%	2%
3	0,35%	3,5%	2%

Alle Zahlungsströme erfolgen im Modell am Ende des Jahres, in folgender Reihenfolge: zuerst Tod, dann Invalidität, und zuletzt Storno.

(b) *[15 Punkte]* Berechnen Sie den besten Schätzer für die erwartete Todesfallleistung an den Versicherungsnehmer im Jahr 3.

(c) *[4 Punkte]* Besprechen Sie, ob eine einheitliche Stornorate für aktive und invalide Versicherungsnehmer angemessen ist.

(*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie zwei verschiedene Gründe erwähnen, warum Sie denken, dass eine einheitliche Stornorate angemessen oder nicht angemessen ist*)

Aufgabe 2. *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [38 Punkte]*

Ein Lebensversicherungsunternehmen verkauft ausschließlich Risikolebensversicherungen. Eine Leistung ist nur bei Tod des Versicherungsnehmers fällig. Das Produkt wird gegen laufenden Beitrag verkauft. Für das Produkt wird keine Reserve gebildet, die Leistungen werden unmittelbar aus den Beiträgen des laufenden Jahres bezahlt.

Alle weiteren oben nicht explizit erwähnten Geschäftsvorfälle und Rechnungsgrundlagen sind für diese Aufgabe nicht relevant. Der Diskontsatz für alle Berechnungen beträgt 0%.

Zum 31.12.2022 besteht der Bestand aus 1.000 Verträgen, alle mit Versicherungssumme 1.000 Euro und Restlaufzeit 1 Jahr. Der Jahresbeitrag beträgt 50 Euro pro Vertrag.

Die Versicherungsnehmer werden mit 90% an einem positiven Risikoergebnis beteiligt. Aktionäre tragen Verluste vollständig selbst.

Die Best-Estimate-Sterblichkeit ist eine Zufallsvariable mit folgender Verteilung:

Sterblichkeit q_x	Wahrscheinlichkeit $P(q_x)$
1%	70%
2%	20%
3%	10%

(a) *[14 Punkte]* Berechnen Sie den stochastichen *PVFP*, $PVFP_{stoch}$, für den oben beschriebenen Bestand zum 31.12.2022. Nehmen Sie in Ihren Berechnungen an, dass alle Geschäftsvorfälle Anfang des Jahres in folgender Reihenfolge stattfinden: Zahlung der Beiträge und danach Tod.

(b) *[3 Punkte]* Die Certainty-Equivalent-Sterblichkeit beträgt $q_{CE} = 1{,}2\%$. Berechnen Sie den entsprechenden Zeitwert der Optionen und Garantien (*TVOG*).

(c) *[7 Punkte]* Um die Solvenzkapitalanforderung zum 31.12.2022 berechnen zu können, verwendet das Unternehmen einen Todesfallschock. Die geschockte Sterblichkeit beträgt:

Sterblichkeit q_x^{Stress}	Wahrscheinlichkeit $P(q_x^{Stress})$
4%	80%
5%	15%
6%	5%

Berechnen Sie die entsprechende Risikokapitalanforderung für das Sterblichkeitsrisiko, definiert als:

$$SCR = PVFP^{0}_{stoch} - PVFP^{Stress}_{stoch},$$

wobei $PVFP^{0}_{stoch}$ der unter Punkt (a) berechnete $PVFP_{stoch}$ ist.

(d) *[14 Punkte]* Um die Solvenzkapitalanforderung zu reduzieren, beschließt der Vorstand, Rückversicherung einzukaufen. Das Rückversicherungsprogramm ist so strukturiert, dass:

- 5% des Aktionärsanteils des Certainty-Equivalent-Risikoergebnisses als Prämie bezahlt werden.
- Der Rückversicherer erstattet alle Schäden, falls die Sterblichkeit größer als oder gleich 5% ist.

(i) *[10 Punkte]* Berechnen Sie das *SCR* unter diesen neuen Bedingungen.

(ii) *[4 Punkte]* Sie wissen, dass Ihre Firma bei ihrer Hausbank ein nachrangiges Darlehen in unbegrenzter Höhe mit Zins 4% p. a. zugesichert bekommen hat. Würden Sie diese Rückversicherung kaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gehen Sie davon aus, dass ein nachrangiges Darlehen in vollem Umfang als zulässiges Eigenmittel unter Solvency II gilt.

Hinweis: Falls Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht bearbeitet haben, können Sie Annahmen für die Ihnen unbekannten Größen treffen, die Sie für diese Teilaufgabe benötigen.

Aufgabe 3. *[Risikoidentifikation, -klassifikation und -bewertung] [30 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Nennen und beschreiben Sie kurz die vier wünschenswerten Eigenschaften einer Risikoklassifikation.

(b) *[4 Punkte]* Eine mögliche Risikoklassifikation besteht aus den zwei Kategorien systemische und spezifische Risiken. Definieren und beschreiben Sie stichpunktartig diese Klassifikation (also die beiden Kategorien).

(c) *[2 Punkte]* Sind bei der Risikoklassifikation aus der vorigen Teilaufgabe alle wünschenswerten Eigenschaften erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) *[6 Punkte]* Welche Anforderungen stellen sich bei der Risikoidentifikation? Nennen und beschreiben Sie diese kurz.

(e) *[4,5 Punkte]* Nennen Sie die sieben Risikokategorien, mit denen Versicherungsunternehmen typischerweise konfrontiert sind (Das Nachhaltigkeitsrisiko wird dabei nicht als eigene Kategorie aufgefasst).

Welche beiden haben dabei in der Regel das höchste Gewicht?

(f) *[5 Punkte]* Beschreiben Sie, aus welchen Komponenten ein stochastisches Modell zur Bewertung des Marktrisikos besteht und wie diese zusammenhängen.

Welche Rolle spielen dabei sogenannte Managementregeln?

(g) *[2,5 Punkte]* Gängige Kapitalmarktmodelle für Zinsen sind die sogenannten Short-Rate-Modelle, die den Momentanzins modellieren. Diese werden üblicherweise mittels einer stochastischen Differentialgleichung in der folgenden Form dargestellt:

$$\mathrm{d}X_t = \kappa\,(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t$$

Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der beiden Summanden auf der rechten Seite und der Parameter.

(h) *[2 Punkte]* Erläutern Sie, inwiefern das Zinsrisiko, dem Versicherungsunternehmen ausgesetzt sind, sowohl als systemisches als auch als spezifisches Risiko aufgefasst werden kann.

Aufgabe 4. *[ORSA, Klimawandelszenarien] [43 Punkte]*

Die BW-Agrar Sachversicherung AG vertreibt ausschließlich an landwirtschaftliche Betriebe folgende Produkte:

- Ernteausfallversicherung,
- Kfz-Versicherung,
- Rechtsschutzversicherung,
- Betriebshaftpflichtversicherung,
- Gebäudeversicherung.

Versichert werden nur Betriebe in Baden-Württemberg. Der Vertrieb erfolgt über einen angestellten Außendienst von zehn Personen. Die IT sowie die Bestandsverwaltung sind an die Schwestergesellschaft Bayern-Agrar ausgegliedert.

Die Kapitalanlagen bestehen aus Unternehmensanleihen, Immobilien, Aktien (Einzelwerte) und deutschen Staatsanleihen.

(a) *[8 Punkte]* Sie sind Prüfer in der internen Revision des Versicherungsunternehmens. Der Prüfungsplan sieht die Prüfung der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung vor. Erläutern Sie die Begriffe Aufbauprüfung und Funktionsprüfung und geben Sie jeweils vier geeignete Unterlagen an, die Sie dazu zur Vorbereitung bzw. zur Durchführung jeweils heranziehen würden.

(b) *[6 Punkte]* Gegenstand der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung ist die Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs. Grenzen Sie die Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs anhand von sechs potenziellen Unterschieden von der Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung mittels Standardformel ab!

(c) *[4 Punkte]* Neben der Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs sind kraft Gesetzes in der jährlichen unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung zwei weitere Beurteilungen vorzunehmen. Welche sind das?

(d) *[4 Punkte]* Seit 2022 ist die Berücksichtigung von Nachhaltigkeitsrisiken im ORSA aufsichtsrechtlich explizit vorgeschrieben. Dazu zählen auch Risiken, die sich durch den Klimawandel ergeben. Nennen und beschreiben Sie kurz die beiden Hauptrisikoklassen, die man dabei unterscheidet!

(e) *[21 Punkte]* Innerhalb der genannten Hauptrisikoklassen werden typischerweise insgesamt mindestens sieben Unterkategorien gebildet.

Im Rahmen eines Materialitätsassessments kommt die BW-Agrar zum Schluss, dass der Klimawandel ein wesentliches Risiko für ihr Geschäftsmodell darstellt

mit wesentlichen Risiken in allen Unterkategorien. Sie geht davon aus, dass die Auswirkungen des Klimawandels weder in ihren Vermögenswerten noch in der Modellierung der Versicherungstechnik berücksichtigt sind und will die Auswirkungen der Szenarien „Keine politischen Maßnahmen“ und „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“ auf die BW-Agrar bewerten. Geben Sie für (die) sieben Unterkategorien jeweils ein Beispiel an, welches Risiko konkret für die BW-Agrar in einem der beiden Szenarien finanzielle Auswirkungen haben kann und wie man es quantifizieren könnte! Geben Sie dabei das Szenario an, in dem das Risiko eher zum Tragen kommt!

Aufgabe 5. *[Modellierung Schaden/Unfall] [47 Punkte]*

Die Zavelsteiner Allgemeine Versicherung AG (ZAV) ist ein Schaden/Unfall-Versicherer, der unter anderem eine gewerbliche Sachversicherung (Gebäude- und Inhaltsversicherung) betreibt. Für dieses Geschäft besteht eine Summenexzedenten-Rückversicherung.

Per 31.12.2023 liegt folgendes Brutto-Abwicklungsdreieck kumulierter Schadenzahlungen (in Tsd EUR) vor:

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	19.000	24.000	26.000	27.000
2020	14.000	20.000	26.000	29.000	
2021	16.000	24.000	32.000		
2022	15.000	23.000			
2023	20.000				

Vom Sachsummenexzedenten betroffen sind davon Schäden der Anfalljahre 2022 und 2023. Die auf diesen Rückversicherungsvertrag entfallenden Zahlungen betrugen im Kalenderjahr 2023 für das Anfalljahr 2022 500 TSD EUR und für das Anfalljahr 2023 2 Mio. EUR. Im Kalenderjahr 2022 entfielen 1 Mio. EUR auf die Rückversicherung.

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie das inkrementelle Netto-Zahlungsdreieck (d.h. nach Berücksichtigung der Rückversicherung)!

(b) *[14 Punkte]* Bestimmen Sie die Brutto-Chain-Ladder-Faktoren auf zwei Nachkommastellen gerundet und vervollständigen Sie das inkrementelle Brutto-Zahlungsdreieck mit den erwarteten Brutto-Zahlungen zum inkrementellen Abwicklungsviereck!

(c) *[13 Punkte]* Aufgrund der hohen Inflation im Jahr 2023 ist die beobachtete Abwicklung nicht repräsentativ für die künftige Entwicklung. Sie gehen davon aus, dass dieser Sondereffekt einmalig war. Bestimmen Sie die Brutto-Chain-Ladder-Faktoren unter Ausschluss des Kalenderjahres 2023 auf zwei Nachkommastellen gerundet und vervollständigen Sie das inkrementelle Brutto-Zahlungsdreieck mit den erwarteten Brutto-Zahlungen zum inkrementellen Abwicklungsviereck! Gehen Sie dabei mangels Beobachtung davon aus, dass der auf den Abwicklungsstand nach vier Jahren anzuwendende Chain-Ladder-Faktor 1,03 beträgt.

(d) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie das kumulierte Rückversicherungs-Zahlungsviereck mit den erwarteten Erstattungen aus der Rückversicherung im Falle der Annahme des einmaligen Sondereffekts durch Inflation! Verwenden Sie dabei die

Brutto-Chain-Ladder-Faktoren! Erläutern Sie, warum das im Allgemeinen problematisch ist, Sie es aber in diesem Fall trotzdem tun!

(e) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die undiskontierte Netto-Best-Estimate-Schadenrückstellung!

(f) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie nun das Netto-Reserverisiko zum 99,5%-VaR mittels Anpassung einer Lognormal-Verteilung. Gehen Sie dabei von einem Variationskoeffizienten von 10% aus!

Hinweis: Für eine lognormalverteilte Zufallsgröße X mit Parametern μ und σ gelten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu+\sigma^2/2} \\ VarK(X) &= \sqrt{e^{\sigma^2}-1} \\ \sigma^2 &= \ln\left(VarK(X)^2+1\right) \\ \mu &= \ln\left(E(X)/\sqrt{VarK(X)^2+1}\right) \\ VaR_\alpha(X) &= \exp\left(\mu+\sigma\Phi^{-1}(\alpha)\right) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Φ die Standardnormalverteilung deren 99,5%-Quantil 2,58 beträgt.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [22 Punkte]*

Ein Lebensversicherungsunternehmen verkauft Versicherungen, die sowohl bei Invalidität als auch bei Tod und Storno eine Leistung vorsehen.

Produktbeschreibung:

- Bei Invalidität wird 80% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Bei Tod nach Invalidität werden die restlichen 20% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Bei Tod vor Invalidität wird 100% der Versicherungssumme ausgezahlt.
- Das Produkt wird gegen laufenden Beitrag verkauft.
- Bei Storno wird ein in den Versicherungsbedingungen festgelegter Prozentsatz der HGB-Reserve für das Produkt an die Versicherungsnehmer ausgezahlt.

(a) *[3 Punkte]* Nennen Sie die Zahlungsströme, die das Lebensversicherungsunternehmen in einem Projektionsmodell verwenden sollte, um das Produkt zu bewerten.

(*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie sechs unterschiedliche Zahlungsströme erwähnen*)

Lösungsvorschlag

- Jeweils 0,5 Punkte pro Zahlungsstrom. Die maximale Anzahl an erreichbaren Punkten ist auf 3 begrenzt.

  Laufende Beiträge, Kapitalerträge (z. B. Zinsen oder Dividenden), Kosten (z. B. Abschluss- oder Verwaltungskosten), Leistungsauszahlungen bei Tod, Leistungsauszahlungen bei Invalidität, Leistungsauszahlungen bei Storno, Steuern.

Ein Vertrag hat eine Versicherungssumme i. H. v. 100.000 Euro. Folgende Tabelle fasst die Best-Estimate-Annahmen für Invalidität, Storno und Tod für die ersten drei Projektionsjahre zusammen. Die Best-Estimate-Annahmen gelten gleichermaßen für aktive und für invalide Versicherungsnehmer.

Jahr (j)	Invalidität (i_j)	Tod (q_j)	Storno (s_j)
1	0,15%	1,5%	2%
2	0,25%	2,5%	2%
3	0,35%	3,5%	2%

Alle Zahlungsströme erfolgen im Modell am Ende des Jahres, in folgender Reihenfolge: zuerst Tod, dann Invalidität, und zuletzt Storno.

(b) *[15 Punkte]* Berechnen Sie den besten Schätzer für die erwartete Todesfallleistung an den Versicherungsnehmer im Jahr 3.

Lösungsvorschlag

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer am Anfang von Jahr 3 als Aktiver noch im Bestand ist, kann wie folgt berechnet werden:

$$(1-q_1) * (1-i_1) * (1-s_1) * (1-q_2) * (1-i_2) * (1-s_2) = 91{,}87\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer als Aktiver im dritten Jahr stirbt ist deswegen:

$$91{,}87\% * q_3 = 3{,}22\%.$$

Die erwartete Todesfallleistung für einen aktiven Versicherungsnehmer im dritten Jahr ist folglich:

$$3{,}22\% * 100.000 = 3.220.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer im ersten Jahr invalide wird und am Anfang des dritten Jahres noch im Bestand liegt, ist:

$$(1-q_1) * i_1 * (1-s_1) * (1-q_2) * (1-s_2) = 0{,}14\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer im zweiten Jahr invalide wird und am Anfang des dritten Jahres noch im Bestand liegt, ist:

$$(1-q_1) * (1-i_1) * (1-s_1) * (1-q_2) * i_2 * (1-s_2) = 0{,}23\%.$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer am Anfang des dritten Jahres als Invalide im Bestand liegt, ist deswegen:

$$0{,}14\% + 0{,}23\% = 0{,}37\%.$$

Wenn der Versicherungsnehmer im dritten Jahr als Invalide stirbt, ist die entsprechend erwartete Todesfalllleistung:

$$0{,}37\% * 20\% * 100.000 * q_3 = 3.$$

Deswegen ist die erwartete Todesfalllleistung im dritten Jahr:

$$3220 + 3 = 3223.$$

(c) *[4 Punkte]* Besprechen Sie, ob eine einheitliche Stornorate für aktive und invalide Versicherungsnehmer angemessen ist.

(*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie zwei verschiedene Gründe erwähnen, warum Sie denken, dass eine einheitliche Stornorate angemessen oder nicht angemessen ist*)

Lösungsvorschlag

Die maximale Anzahl an erreichbaren Punkten ist auf 4 begrenzt.

Eine einheitliche Stornorate für Aktive und Invalide ist im Allgemeinen nicht angemessen.

- *[2 Punkte]* Invalide könnten aufgrund ihres Gesundheitszustandes Gelder benötigen und würden deswegen den Vertrag verstärkter kündigen als Aktive, um die Stornoleistung zu bekommen.
- *[2 Punkte]* Andererseits, würden Invalide aufgrund ihres Gesundheitszustandes auf dem Markt wahrscheinlich keinen neuen Vertrag mit einer Todesfallleistung bekommen. Deswegen dürften sie im geringeren Ausmaß als Aktive kündigen, um den Todesfallschutz zu behalten.
- *[2 Punkte]* D. h., die Stornorate bei Invaliden könnte höher oder niedriger als bei Aktiven sein, abhängig davon wie hoch die Stornoleistung ist und wie sie ihren eigenen Gesundheitszustand einschätzen (Antiselektion).

Aufgabe 2. *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [38 Punkte]*

Ein Lebensversicherungsunternehmen verkauft ausschließlich Risikolebensversicherungen. Eine Leistung ist nur bei Tod des Versicherungsnehmers fällig. Das Produkt wird gegen laufenden Beitrag verkauft. Für das Produkt wird keine Reserve gebildet, die Leistungen werden unmittelbar aus den Beiträgen des laufenden Jahres bezahlt.

Alle weiteren oben nicht explizit erwähnten Geschäftsvorfälle und Rechnungsgrundlagen sind für diese Aufgabe nicht relevant. Der Diskontsatz für alle Berechnungen beträgt 0%.

Zum 31.12.2022 besteht der Bestand aus 1.000 Verträgen, alle mit Versicherungssumme 1.000 Euro und Restlaufzeit 1 Jahr. Der Jahresbeitrag beträgt 50 Euro pro Vertrag.

Die Versicherungsnehmer werden mit 90% an einem positiven Risikoergebnis beteiligt. Aktionäre tragen Verluste vollständig selbst.

Die Best-Estimate-Sterblichkeit ist eine Zufallsvariable mit folgender Verteilung:

Sterblichkeit q_x	Wahrscheinlichkeit $P(q_x)$
1%	70%
2%	20%
3%	10%

(a) *[14 Punkte]* Berechnen Sie den stochastichen *PVFP*, $PVFP_{stoch}$, für den oben beschriebenen Bestand zum 31.12.2022. Nehmen Sie in Ihren Berechnungen an, dass alle Geschäftsvorfälle Anfang des Jahres in folgender Reihenfolge stattfinden: Zahlung der Beiträge und danach Tod.

Lösungsvorschlag

Um den PVFP berechnen zu können, müssen wir zunächst den Jahresüberschuss als Funktion der Sterblichkeit berechnen. Bei allen Teilaufgaben wird die gleiche Formel angewendet (siehe Formel (1) unten).

$$\text{Risikoertrag} = \text{Beitrag} * \text{Anzahl} = 50 * 1000 = 50.000.$$

$$\text{Risikoaufwand} = \text{Todesfallleistungen} = q_{BE} * \text{Anzahl} * \text{Versicherungssumme} = q_{BE} * 1.000.000.$$

$$\text{Risikoergebnis} = \text{Risikoertrag} - \text{Risikoaufwand} = 50.000 - q_{BE} * 1.000.000.$$

$$\begin{aligned} &\text{Aktionärsanteil am Risikoergebnis} = \\ &\max[10\% * (\text{Risikoertrag} - \text{Risikoaufwand}); 0] + \\ &\min[\text{Risikoertrag} - \text{Risikoaufwand}; 0]. \end{aligned} \tag{1}$$

- Die Diskontierung ist laut Aufgabentext irrelevant. Deswegen ist $PVFP_{stoch}$ gleich dem Erwartungswert vom Aktionärsanteil am Risikoergebnis (siehe (1)). Im Best-Estimate-Fall sind die Todesfallleistungen in allen drei Fällen (1%, 2% und 3%) kleiner als die Beiträge, d. h., das Risikoergebnis ist immer positiv. Deswegen gilt:

$$\begin{aligned} PVFP_{stoch} = \\ 10\% * [50.000 - 1.000.000 * (70\% * 1\% + 20\% * 2\% + 10\% * 3\%)] = \\ 10\% * [50.000 - 1.000.000 * 1{,}4\%] = 10\% * [50.000 - 14.000] = \\ 3.600. \end{aligned}$$

(b) *[3 Punkte]* Die Certainty-Equivalent-Sterblichkeit beträgt $q_{CE} = 1{,}2\%$. Berechnen Sie den entsprechenden Zeitwert der Optionen und Garantien (*TVOG*).

Lösungsvorschlag

- Laut Definition von *TVOG* gilt:

$$\begin{aligned} TVOG = PVFP_{CE} - PVFP_{stoch} = \\ 10\% * [50.000 - 1.000.000 * 1{,}2\%] - 3600 = \\ 3800 - 3600 = 200. \end{aligned}$$

(c) *[7 Punkte]* Um die Solvenzkapitalanforderung zum 31.12.2022 berechnen zu können, verwendet das Unternehmen einen Todesfallschock. Die geschockte Sterblichkeit beträgt:

Sterblichkeit q_x^{Stress}	Wahrscheinlichkeit $P(q_x^{Stress})$
4%	80%
5%	15%
6%	5%

Berechnen Sie die entsprechende Risikokapitalanforderung für das Sterblichkeitsrisiko, definiert als:

$$SCR = PVFP^0_{stoch} - PVFP^{Stress}_{stoch},$$

wobei $PVFP^0_{stoch}$ der unter Punkt (a) berechnete $PVFP_{stoch}$ ist.

Lösungsvorschlag

- In diesem Fall ist das Risikoergebnis nicht immer positiv, Formel (1) gilt jedoch auch hier.

  Der geschockte *PVFP* ist deswegen:

$$\begin{aligned} PVFP^{Stress}_{stoch} = 10\% * 80\% * [50.000 - 40.000] + \\ 10\% * 15\% * [50.000 - 50.000] + \\ 5\% * [50.000 - 60.000] = \\ 300. \end{aligned}$$

  Daraus folgt:

$$SCR = PVFP^0_{stoch} - PVFP^{Stress}_{stoch} = 3600 - 300 = 3300.$$

(d) *[14 Punkte]* Um die Solvenzkapitalanforderung zu reduzieren, beschließt der Vorstand, Rückversicherung einzukaufen. Das Rückversicherungsprogramm ist so strukturiert, dass:

- 5% des Aktionärsanteils des Certainty-Equivalent-Risikoergebnisses als Prämie bezahlt werden.
- Der Rückversicherer erstattet alle Schäden, falls die Sterblichkeit größer als oder gleich 5% ist.

(i) *[10 Punkte]* Berechnen Sie das *SCR* unter diesen neuen Bedingungen.

(ii) *[4 Punkte]* Sie wissen, dass Ihre Firma bei ihrer Hausbank ein nachrangiges Darlehen in unbegrenzter Höhe mit Zins 4% p. a. zugesichert bekommen hat. Würden Sie diese Rückversicherung kaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gehen Sie davon aus, dass ein nachrangiges Darlehen in vollem Umfang als zulässiges Eigenmittel unter Solvency II gilt.

Hinweis: Falls Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht bearbeitet haben, können Sie Annahmen für die Ihnen unbekannten Größen treffen, die Sie für diese Teilaufgabe benötigen.

Lösungsvorschlag

(i) Aus Teil (b) wissen wir, dass $PVFP_{CE} = 3800$. Deswegen beträgt die Rückversicherungsprämie $5\% * 3800 = 190$.

Im Best-Estimate-Fall kommt die Rückversicherung nicht zum Tragen, weil die Sterblichkeit durchweg unter 5% bleibt. Die Rückversicherungsprämie muss trotzdem bezahlt werden, deswegen reduziert sich $PVFP^{0}_{stoch}$ entsprechend:

$$PVFP^{0;RV}_{stoch} = 3600 - 190 = 3.410.$$

Im Stress-Szenario zahlt die Rückversicherung alle Schäden, falls die Sterblichkeit größer oder gleich 5% ist. Das entspricht der aus Sicht des Erstversicherers angepassten Sterblichkeit:

Sterblichkeit $q_x^{Stress;RV}$	Wahrscheinlichkeit $P(q_x^{Stress;RV})$
0%	20%
4%	80%

Analog zu Teilaufgabe (a) ist deswegen der geschockte *PVFP*:

$$PVFP_{stoch}^{Stress;RV} = 10\% * [50.000 - 1.000.000 * 80\% * 4\%] - 190 = 1800 - 190 = 1.610.$$

Deswegen ist das angepasste *SCR*, SCR^{RV}:

$$SCR^{RV} = PVFP_{stoch}^{0;RV} - PVFP_{stoch}^{Stress;RV} = 3410 - 1610 = 1.800.$$

(ii) Die durch die Rückversicherung erzielte Risikokapitalersparnis beträgt:

$$\Delta SCR = SCR - SCR^{RV} = 3300 - 1800 = 1.500.$$

Die Kapitalkosten für die Rückversicherung, KK^{RV}, sind deswegen:

$$KK^{RV} = RV_{\text{Prämie}}/\Delta SCR = 190/1500 = 12{,}67\%.$$

Da die Kapitalkosten für einen Kredit bei der Hausbank Ihrer Firma niedriger sind (4% p. a.) und das Nachrangdarlehen in vollem Umfang als zulässiges Eigenmittel gilt, lohnt sich aus rein wirtschaftlichen Gründen die Rückversicherung nicht.

Aufgabe 3. *[Risikoidentifikation, -klassifikation und -bewertung] [30 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Nennen und beschreiben Sie kurz die vier wünschenswerten Eigenschaften einer Risikoklassifikation.

Lösungsvorschlag

Die vier wünschenswerten Eigenschaften einer Risikoklassifikation lauten:

[je 1 Punkt]

- Vollständigkeit: Jedes Risiko kann mindestens einer Kategorie zugeordnet werden.
- Überschneidungsfreiheit: Jedes Risiko kann höchstens einer Kategorie zugeordnet werden.
- Homogenität: Die einzelnen Kategorien sind in Tiefe (Anzahl der Risiken oder Unterkategorien) und Gewicht (Bedeutung der Risiken) vergleichbar.
- Transparenz: Die Zuordnung der Risiken zu den Kategorien ist klar und transparent festgelegt.

(b) *[4 Punkte]* Eine mögliche Risikoklassifikation besteht aus den zwei Kategorien systemische und spezifische Risiken. Definieren und beschreiben Sie stichpunktartig diese Klassifikation (also die beiden Kategorien).

Lösungsvorschlag

Systemische Risiken: *[2 Punkte]*

- beeinträchtigen Funktion oder Fortbestehen eines ganzen Systems (mehrere Unternehmen, ganze Branche, ganzes Land oder die ganze Welt);
- werden oft von einen unerwarteten Initialereignis ausgelöst und können in der Regel vom einzelnen Unternehmen nicht beeinflusst werden.

Spezifische Risiken: *[2 Punkte]*

- betreffen nur bestimmte Systemteilnehmer, ohne dass das System als Ganzes gefährdet ist (z. B. einzelne Unternehmen);
- ergeben sich aus unternehmensspezifischen Besonderheiten und Entscheidungen.

(c) *[2 Punkte]* Sind bei der Risikoklassifikation aus der vorigen Teilaufgabe alle wünschenswerten Eigenschaften erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Nein, denn die Überschneidungsfreiheit ist nicht gegeben *[1 Punkt]*. Manche Risiken erfüllen sowohl Kriterien für systemische als auch für spezifische Risiken, z. B. bestimmte Marktrisiken oder Rechtsrisiken *[1 Punkt]*.

(d) *[5 Punkte]* Welche Anforderungen stellen sich bei der Risikoidentifikation? Nennen und beschreiben Sie diese kurz.

Lösungsvorschlag

Folgende Anforderungen stellen sich dabei: *[je 1 Punkt]*

- Vollständigkeit: lückenlose Aufdeckung aller bestehenden und potentiellen zukünftigen Risiken;
- Aktualität: ständige Anpassung an sich ändernde Rahmenbedingungen zur frühzeitigen Risikoerkennung;
- Prospektivität/Antizipativität: Erkennen von Risiken durch mögliche (mehr oder weniger absehbare) Entwicklungen im Unternehmen oder seinem Umfeld;
- Wirtschaftlichkeit: Der Aufwand für die Risikoidentifikation darf nicht höher sein als der erwartete Nutzen (Sicherheitsoptimum im Schnittpunkt von Präventiv- und Schadenkosten);
- Konsistenz: Widerspruchsfreiheit und Überschneidungsfreiheit der aufgedeckten Risiken.

(e) *[4,5 Punkte]* Nennen Sie die sieben Risikokategorien, mit denen Versicherungsunternehmen typischerweise konfrontiert sind (Das Nachhaltigkeitsrisiko wird dabei nicht als eigene Kategorie aufgefasst).

Welche beiden haben dabei in der Regel das höchste Gewicht?

Lösungsvorschlag

Für Versicherungsunternehmen relevante Risikokategorien sind: *[je 0,5 Punkte]*

- versicherungstechnisches Risiko,
- Marktrisiko,
- Kreditrisiko,
- operationales Risiko,
- strategisches Risiko,
- Reputationsrisiko,
- Konzentrationsrisiko.

Das höchste Gewicht haben typischerweise das Marktrisiko und das versicherungstechnische Risiko *[je 0,5 Punkte]*.

(f) *[6 Punkte]* Beschreiben Sie, aus welchen Komponenten ein stochastisches Modell zur Bewertung des Marktrisikos besteht und wie diese zusammenhängen.

Welche Rolle spielen dabei sogenannte Managementregeln?

Lösungsvorschlag

Ein solches Modell besteht erstens aus einem Kapitalmarktmodell (auch Economic Scenario Generator, ESG) genannt. Dort werden die relevanten Risikofaktoren, z. B. Zinsen oder Aktienkurse stochastisch modelliert. *[1 Punkt]*

Zweitens besteht es aus einem Unternehmensmodell. Dieses enthält mindestens ein Kapitalanlagemodell zur Fortschreibung des Kapitalanlagebestands *[1 Punkt]* und ein Passivmodell zur Fortschreibung des Versicherungsbestands *[1 Punkt]*. Die Kapitalmarktszenarien aus dem ESG wirken einerseits direkt auf Kapitalanlage und Passivmodell *[1 Punkt]*, aber auch Wechselwirkungen zwischen Kapitalanlage- und Passivmodell werden berücksichtigt *[1 Punkt]*.

Managementregeln stellen eine Modellierung künftiger Managemententscheidungen dar, zum Beispiel zur Anlagepolitik, zur Behandlung von Bewertungsreserven oder -lasten, aber auch zum Umgang mit Unternehmensgewinnen und zur Überschussbeteiligung *[1 Punkt]*.

(g) *[2,5 Punkte]* Gängige Kapitalmarktmodelle für Zinsen sind die sogenannten Short-Rate-Modelle, die den Momentanzins modellieren. Diese werden üblicherweise mittels einer stochastischen Differentialgleichung in der folgenden Form dargestellt:

$$\mathrm{d}X_t = \kappa\,(\theta - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t$$

Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der beiden Summanden auf der rechten Seite und der Parameter.

Lösungsvorschlag

Modelliert wird die Short-Rate selbst ($X_t = r_t$) oder eine Größe, die eng damit in Zusammenhang steht (z. B. $X_t = \ln r_t$). *[0,5 Punkte]*

Zur Bedeutung der Komponenten:

- Der erste Summand auf der rechten Seite steht für die Mittelwertrückkehr (Mean Reversion), die in diesen Modellen generell unterstellt wird. κ steht für die Geschwindigkeit der Mittelwertrückkehr, θ ist der vorgegebene Mittelwert. *[1 Punkt]*
- Der zweite Summand ist ein Wienerprozess (brownsche Bewegung), der für die Stochastik sorgt. Der Parameter σ steuert dabei die Volatilität der modellierten Größe. *[1 Punkt]*

(h) *[2 Punkte]* Erläutern Sie, inwiefern das Zinsrisiko, dem Versicherungsunternehmen ausgesetzt sind, sowohl als systemisches als auch als spezifisches Risiko aufgefasst werden kann.

Lösungsvorschlag

Das Zinsrisiko kann grundsätzlich als systemisches Risiko angesehen werden, da es sich in sehr vielen Bereichen von Wirtschaft und Gesellschaft auswirkt. Vom Zinsumfeld sind grundsätzlich alle Versicherungsunternehmen in einem Land oder Währungsraum betroffen. *[1 Punkt]*

Allerdings sind nicht alle Unternehmen gleichermaßen betroffen. Das Zinsrisiko lässt sich auf vielfache Weise vom einzelnen Unternehmen steuern (Anlagepolitik, ALM, Derivate, Produktdesign), so dass es auch Eigenschaften eines spezifischen Risikos aufweist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 4. *[ORSA, Klimawandelszenarien] [43 Punkte]*

Die BW-Agrar Sachversicherung AG vertreibt ausschließlich an landwirtschaftliche Betriebe folgende Produkte:

- Ernteausfallversicherung,
- Kfz-Versicherung,
- Rechtsschutzversicherung,
- Betriebshaftpflichtversicherung,
- Gebäudeversicherung.

Versichert werden nur Betriebe in Baden-Württemberg. Der Vertrieb erfolgt über einen angestellten Außendienst von zehn Personen. Die IT sowie die Bestandsverwaltung sind an die Schwestergesellschaft Bayern-Agrar ausgegliedert.

Die Kapitalanlagen bestehen aus Unternehmensanleihen, Immobilien, Aktien (Einzelwerte) und deutschen Staatsanleihen.

(a) *[8 Punkte]* Sie sind Prüfer in der internen Revision des Versicherungsunternehmens. Der Prüfungsplan sieht die Prüfung der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung vor. Erläutern Sie die Begriffe Aufbauprüfung und Funktionsprüfung und geben Sie jeweils vier geeignete Unterlagen an, die Sie dazu zur Vorbereitung bzw. zur Durchführung jeweils heranziehen würden.

Lösungsvorschlag

- Gegenstand der **Aufbauprüfung** sind Methodik, Organisation, Anpassungsfähigkeit, Integration in bestehende Überwachungs- und Führungssysteme. Geeignete Unterlagen: Versicherungsaufsichtsgesetz, delegierte Verordnung (EU) 2015/35 (inkl. Anpassungen durch DVO 2016/2283 und andere DVO), Auslegungsentscheidung der Bafin zum ORSA, EIOPA Guidelines on Own Risk Solvency Assessment (ORSA), Leitlinie des Unternehmens zum ORSA, Prozessbeschreibungen des Unternehmens zum ORSA, ...
- Im Rahmen der **Funktionsprüfung** wird untersucht, ob der Prozess im betrachteten abgelaufenen Zeitraum tatsächlich wie vorgegeben konkret umgesetzt wurde und die vorgesehenen Resultate erzielt wurden. Geeignete Unterlagen: Interner ORSA-Bericht, ORSA-Bericht an die Aufsicht, Stellungnahme/Beurteilung der versicherungsmathematischen Funktion zur Projektion der vt. Rückstellungen, etwaige Stellungnahmen der anderen Schlüsselfunktionen, Dokumentationen der durchgeführten Kontrollen aus einem IKS, Quantitative Ergebnisse aus Stresstests, Szenarioanalysen etc.

(je 2 Punkte für die Erläuterung von Aufbau- und Funktionsprüfung. 0,5 Punkte je genannter Unterlage)

(b) *[6 Punkte]* Gegenstand der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung ist die Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs. Grenzen Sie die Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs anhand von sechs potenziellen Unterschieden von der Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung mittels Standardformel ab!

Lösungsvorschlag

- Einbezug aller wesentlicher Risiken vs. vorgegebene Risikomodule
- Unternehmensindividuelle Festlegung des Risikomaßes vs. vorgegebenes Risikomaß VaR
- Unternehmensindividuelle Festlegung des Konfidenzniveaus vs. vorgegebenem 99,5%
- Unternehmensindividuelle Berücksichtigung von Abhängigkeiten vs. vorgegebenen Korrelationen
- Unternehmensindividueller Zeithorizont vs. zugrundeliegender Einjahres-Horizont
- Vorausschauende Perspektive vs. reine Stichtagsbetrachtung
- Berücksichtigung von Managemententscheidungen möglich vs. ausschließliche Deckung durch Eigenmittel
- Grundsätzliche Methodenfreiheit vs. modularer Bewertungsansatz
- ...

(je 1 Punkt pro Abgrenzung)

(c) *[4 Punkte]* Neben der Beurteilung des Gesamtsolvabilitätsbedarfs sind kraft Gesetzes in der jährlichen unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung zwei weitere Beurteilungen vorzunehmen. Welche sind das?

Lösungsvorschlag

(i) eine Beurteilung der jederzeitigen Erfüllbarkeit der aufsichtsrechtlichen Eigenmittelanforderungen, der Anforderungen an die versicherungstechnischen Rückstellungen in der Solvabilitätsübersicht und der Risikotragfähigkeit (Mögliche Kurzantwort auch: Kontinuierliche Einhaltung von SCR und Anforderungen an vt. Rückstellungen).

(ii) die Signifikanz der Abweichung des Risikoprofils des betreffenden Unternehmens von den Annahmen, die der Solvenzkapitalanforderung zugrunde liegen und gemäß der Standardformel oder gemäß dem internen Modell in der Form eines Voll- oder Partialmodells berechnet wurden. (Mögliche Kurzantwort auch: Abweichungen des Risikoprofils von den Annahmen der Standardformel bzw. des internen Modells).

(je 2 Punkte)

(d) *[4 Punkte]* Seit 2022 ist die Berücksichtigung von Nachhaltigkeitsrisiken im ORSA aufsichtsrechtlich explizit vorgeschrieben. Dazu zählen auch Risiken, die sich durch den Klimawandel ergeben. Nennen und beschreiben Sie kurz die beiden Hauptrisikoklassen, die man dabei unterscheidet!

Lösungsvorschlag

(i) **Übergangsrisiken (Transitionsrisiken)**: Risiken, die sich aus dem Übergang zu einer kohlenstoffarmen und klimaresistenten Wirtschaft ergeben.

(ii) **Physische Risiken**: Risiken, die sich aus den physischen Auswirkungen des Klimawandels ergeben.

(je 2 Punkte)

(e) *[21 Punkte]* Innerhalb der genannten Hauptrisikoklassen werden typischerweise insgesamt mindestens sieben Unterkategorien gebildet.

Im Rahmen eines Materialitätsassessments kommt die BW-Agrar zum Schluss, dass der Klimawandel ein wesentliches Risiko für ihr Geschäftsmodell darstellt mit wesentlichen Risiken in allen Unterkategorien. Sie geht davon aus, dass die Auswirkungen des Klimawandels weder in ihren Vermögenswerten noch in der Modellierung der Versicherungstechnik berücksichtigt sind und will die Auswirkungen der Szenarien „Keine politischen Maßnahmen“ und „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“ auf die BW-Agrar bewerten. Geben Sie für (die) sieben Unterkategorien jeweils ein Beispiel an, welches Risiko konkret für die BW-Agrar in einem der beiden Szenarien finanzielle Auswirkungen haben kann und wie man es quantifizieren könnte! Geben Sie dabei das Szenario an, in dem das Risiko eher zum Tragen kommt!

Lösungsvorschlag

- **Politisches Risiko** im Szenario „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“: Verteuerung von Düngemitteln durch höhere CO2-Abgaben könnten die Landwirtschaft unrentabel machen. Quantifizierung: Rückgang der Prämieneinnahmen um jeweils 5% über einen Zeitraum von 5 Jahren mit entsprechenden Rückgang des Gewinns.

  Gehaltene Aktien oder Unternehmensanleihen von Unternehmen in CO2-intensiven Branchen sinken im Wert bzw. fallen eher aus. Quantifizierung: (Erhöhter) Stress für diese Titel bei der Bestimmung der Eigenmittelanforderung.

  ...

- **Rechtliches Risiko** im Szenario „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“: Vermehrte Klagen gegen Vorschriften zu Energieffizenzmaßnahmen führen zu erhöhten Schadenaufwendungen in der Rechtsschutzversicherung. Quantifizierung: Erhöhung des Risikofaktors in einem Faktormodell zur Bestimmung des Risikokapitalbedarfs.

  ...

- **Technologisches Risiko** im Szenario „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“: Gehaltene Aktien oder Unternehmensanleihen von Herstellern der alten Technologie (z.B. „Verbrenner“ werden durch Elektromotoren ersetzt) sinken im Wert bzw. fallen eher aus. Quantifizierung: (Erhöhter) Stress für diese Titel bei der Bestimmung der Eigenmittelanforderung.

  ...

- **Marktstimmungsrisiko** im Szenario „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“: Kunden der BW-Agrar, die CO2-intensive konventionelle Landwirtschaft betreiben, müssen aufgrund fallender Nachfrage ihr Geschäft aufgeben. Quantifizierung: Rückgang der Prämieneinnahmen um jeweils 5% über einen Zeitraum von 5 Jahren mit entsprechenden Rückgang des Gewinns.

  ...

- **Reputationsrisiko** im Szenario „drastische Verringerung des CO2-Ausstoßes“: Gehaltene Aktien oder Unternehmensanleihen von Unternehmen, die im Ruf stehen, wenig zur Verringerung des CO2-Ausstoßes beizutragen sinken im Wert bzw. fallen eher aus. Quantifizierung: (Erhöhter) Stress für diese Titel bei der Bestimmung der Eigenmittelanforderung.

  ...

- **Akutes physisches Risiko** im Szenario „Keine politischen Maßnahmen“: Durch den resultierenden Klimawandel treten Stürme, Überschwemmungen und Dürren häufiger oder intensiver auf. Quantifizierung: Anpassung der Parameter (z.B. Erwartungswert und Varianz) einer entsprechenden Verteilung zur Bestimmung des Risikokapitalbedarfs. ...

- **Chronisches physisches Risiko** im Szenario „Keine politischen Maßnahmen“: Der resultierende Klimawandel macht die Landwirtschaft in Baden-Württemberg aufgrund häufiger Dürren oder Hagelereignissen zunehmend unrentabel. Quantifizierung: Rückgang der Prämieneinnahmen um jeweils 5% über einen Zeitraum von 5 Jahren mit entsprechenden Rückgang des Gewinns.

  ...

(je ein Punkt für die Unterkategorie, das Risiko in der Unterkategorie, das Szenario und die Quantifizierungsmöglichkeit, maximal jedoch drei)

Aufgabe 5. *[Modellierung Schaden/Unfall] [47 Punkte]*

Die Zavelsteiner Allgemeine Versicherung AG (ZAV) ist ein Schaden/Unfall-Versicherer, der unter anderem eine gewerbliche Sachversicherung (Gebäude- und Inhaltsversicherung) betreibt. Für dieses Geschäft besteht eine Summenexzedenten-Rückversicherung.

Per 31.12.2023 liegt folgendes Brutto-Abwicklungsdreieck kumulierter Schadenzahlungen (in Tsd EUR) vor:

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	19.000	24.000	26.000	27.000
2020	14.000	20.000	26.000	29.000	
2021	16.000	24.000	32.000		
2022	15.000	23.000			
2023	20.000				

Vom Sachsummenexzedenten betroffen sind davon Schäden der Anfalljahre 2022 und 2023. Die auf diesen Rückversicherungsvertrag entfallenden Zahlungen betrugen im Kalenderjahr 2023 für das Anfalljahr 2022 500 TSD EUR und für das Anfalljahr 2023 2 Mio. EUR. Im Kalenderjahr 2022 entfielen 1 Mio. EUR auf die Rückversicherung.

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie das inkrementelle Netto-Zahlungsdreieck (d.h. nach Berücksichtigung der Rückversicherung)!

Lösungsvorschlag

Das inkrementelle Netto-Zahlungsdreieck ist:

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	6.000	5.000	2.000	1.000
2020	14.000	6.000	6.000	3.000	
2021	16.000	8.000	8.000		
2022	14.000	7.500			
2023	18.000				

(je korrekt berechnetem Wert, der nicht als identischer Wert vom kumulierten Brutto-Dreieck übernommen wird, ein halber Punkt)

(b) *[14 Punkte]* Bestimmen Sie die Brutto-Chain-Ladder-Faktoren auf zwei Nachkommastellen gerundet und vervollständigen Sie das inkrementelle Brutto-Zahlungsdreieck mit den erwarteten Brutto-Zahlungen zum inkrementellen Abwicklungsviereck!

Lösungsvorschlag

Damit ergeben sich die Chain-Ladder Faktoren

$$\begin{aligned}
\frac{19.000 + 20.000 + 24.000 + 23.000}{13.000 + 14.000 + 16.000 + 15.000} &= 1,48 \\
\frac{24.000 + 26.000 + 32.000}{19.000 + 20.000 + 24.000} &= 1,30 \\
\frac{29.000 + 26.000}{24.000 + 26.000} &= 1,10 \\
\frac{27.000}{26.000} &= 1,04
\end{aligned}$$

Das resultierende kumulierte Zahlungs-Viereck ist

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	19.000	24.000	26.000	27.000
2020	14.000	20.000	26.000	29.000	30.160
2021	16.000	24.000	32.000	35.200	36.608
2022	15.000	23.000	29.900	32.890	34.206
2023	20.000	29.600	38.480	42.328	44.021

Durch Differenzenbildung erhält man das inkrementelle Brutto-Zahlungs-Viereck

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	6.000	5.000	2.000	1.000
2020	14.000	6.000	6.000	3.000	1.160
2021	16.000	8.000	8.000	3.200	1.408
2022	15.000	8.000	6.900	2.990	1.316
2023	20.000	9.600	8.880	3.848	1.693

(4 Punke für die Berechnung der Chain-Ladder-Fakoren, 5 Punkte für das kumulierte Zahlungs-Viereck (d.h. je 0,5 Punkte pro berechnetem Wert), 5 Punkte für das inkrementelle Zahlungsviereck (d.h. 0,25 Punkte pro berechnetem Wert))

(c) *[13 Punkte]* Aufgrund der hohen Inflation im Jahr 2023 ist die beobachtete Abwicklung nicht repräsentativ für die künftige Entwicklung. Sie gehen davon aus, dass dieser Sondereffekt einmalig war. Bestimmen Sie die Brutto-Chain-Ladder-Faktoren unter Ausschluss des Kalenderjahres 2023 auf zwei Nachkommastellen gerundet und vervollständigen Sie das inkrementelle Brutto-Zahlungsdreieck mit den erwarteten Brutto-Zahlungen zum inkrementellen Abwicklungsviereck! Gehen Sie dabei mangels Beobachtung davon aus, dass der auf den Abwicklungsstand nach vier Jahren anzuwendende Chain-Ladder-Faktor 1,03 beträgt.

Lösungsvorschlag

Es ergeben sich die Chain-Ladder Faktoren

$$\begin{aligned} \frac{19.000 + 20.000 + 24.000}{13.000 + 14.000 + 16.000} &= 1,47 \\ \frac{24.000 + 26.000}{19.000 + 20.000} &= 1,28 \\ \frac{26.000}{24.000} &= 1,08 \end{aligned}$$

Das resultierende kumulierte Zahlungs-Viereck unter Berücksichtigung des vorgegeben letzten Chain-Ladder-Faktors von 1,03 ist

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	19.000	24.000	26.000	27.000
2020	14.000	20.000	26.000	29.000	29.870
2021	16.000	24.000	32.000	34.560	35.597
2022	15.000	23.000	29.440	31.795	32.749
2023	20.000	29.400	37.632	40.643	41.862

Durch Differenzenbildung erhält man das inkrementelle Brutto-Zahlungs-Viereck

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	13.000	6.000	5.000	2.000	1.000
2020	14.000	6.000	6.000	3.000	870
2021	16.000	8.000	8.000	2.560	1.037
2022	15.000	8.000	6.440	2.355	954
2023	20.000	9.400	8.232	3.011	1.219

(3 Punke für die Berechnung der Chain-Ladder-Fakoren, 5 Punkte für das kumulierte Zahlungs-Viereck (d.h. je 0,5 Punkte pro berechnetem Wert), 5 Punkte für das inkrementelle Zahlungsviereck (d.h. 0,25 Punkte pro berechnetem Wert))

(d) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie das kumulierte Rückversicherungs-Zahlungsviereck mit den erwarteten Erstattungen aus der Rückversicherung im Falle der Annahme des einmaligen Sondereffekts durch Inflation! Verwenden Sie dabei die Brutto-Chain-Ladder-Faktoren! Erläutern Sie, warum das im Allgemeinen problematisch ist, Sie es aber in diesem Fall trotzdem tun!

Lösungsvorschlag

Wir berechnen das kumulierte RV-Zahlungs-Viereck mit den Brutto-CL-Faktoren.

	Abwicklungsjahr				
Anfalljahr	1	2	3	4	5
2019	0	0	0	0	0
2020	0	0	0	0	0
2021	0	0	0	0	0
2022	1.000	1.500	1.920	2.074	2.136
2023	2.000	2.940	3.763	4.064	4.186

Die Summenexzedentenversicherung betrifft Verträge mit hohen Versicherungssummen und möglicherweise überproportional viele größere Schäden. Größere Schäden können einem anderen Abwicklungsmuster folgen (typisch wäre eine längere Abwicklungsdauer). In diesem Fall gibt es keine Hinweise darauf, dass besonders große Schäden betroffen sind. Außerdem fehlt es schlicht an einer Alternative.

(3,5 Punkte für das kumulierte Zahlungs-Viereck, 2,5 Punkte für die Erläuterung)

(e) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die undiskontierte Netto-Best-Estimate-Schadenrückstellung!

Lösungsvorschlag

Die undiskontierte Brutto-Best-Estimate-Reserve beträgt (in TSD EUR):

$$\begin{aligned} &870 + 2560 + 1037 + 6440 + 2355 + \\ &954 + 9400 + 8232 + 3011 + 1219 \quad = \quad 36078 \end{aligned}$$

Die RV-Best-Estimate-Reserve beträgt (in TSD EUR):

$$(2136 - 1500) + (4186 - 2000) \quad = \quad 2822$$

Die Netto-Best-Estimate-Reserve beträgt (in TSD EUR) damit:

$$36078 - 2822 \quad = \quad 33256$$

(f) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie nun das Netto-Reserverisiko zum 99,5%-VaR mittels Anpassung einer Lognormal-Verteilung. Gehen Sie dabei von einem Variationskoeffizienten von 10% aus!

Hinweis: Für eine lognormalverteilte Zufallsgröße X mit Parametern μ und σ gelten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu+\sigma^2/2} \\ VarK(X) &= \sqrt{e^{\sigma^2}-1} \\ \sigma^2 &= \ln\left(VarK(X)^2+1\right) \\ \mu &= \ln\left(E(X)/\sqrt{VarK(X)^2+1}\right) \\ VaR_\alpha(X) &= \exp\left(\mu+\sigma\Phi^{-1}(\alpha)\right) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Φ die Standardnormalverteilung deren 99,5%-Quantil 2,58 beträgt.

Lösungsvorschlag

Wir erhalten mit dem im Hinweis angegebenen Formeln:

$$\sigma = \sqrt{\log(0.1^2+1)} = 0.099751345$$

$$\mu = \log\frac{33256}{\sqrt{0.099751345^2+1}} = 10.40703092$$

Und damit für die Netto-Reserve im Risikofall:

$$x(99,5\%) = \exp(10.40703092 + 0.099751345 \cdot 2,58) = 42804\,\textit{TSD EUR}$$

und damit für das Netto-Reserverisiko $42804 - 33256 = 9548$ TSD EUR.

(ein Punkt für die Bestimmung von σ, zwei Punkte für die Bestimmung von μ und zwei Punkte für die Berechnung des Reserverisikos)