DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Oktober 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner und eine mathematische Formelsammlung zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Aufgabe 1. *[19 Punkte]* Berechnen Sie die Determinanten der folgenden n-reihigen quadratischen Matrizen $A_n = (a^n_{jk})$ bzw. $B_n = (b^n_{jk})$ mit

(a) *[8 Punkte]*

$$n \in \mathbb{N} \text{ und } a^n_{jk} := \begin{cases} 1, & j \le k; \\ n+1-k, & j > k; \end{cases}$$

(b) *[8 Punkte]*

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \text{ und } b^n_{jk} := \begin{cases} 0, & j,k \in \{2,\dots,n-1\}; \\ j+k-1, & \text{sonst;} \end{cases}$$

(c) *[3 Punkte]* Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind die Matrizen A_n bzw. B_n invertierbar?

Lösung:

(a) Die Matrix A_n hat die Form

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die die Determinante nicht verändernde Zeilenumformung 1.Spalte minus $n\times$ n.te Spalte liefert:

$$\det A_n = \det \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & n-3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1-n)\det A_{n-1}.$$

Also: $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

(b) Die Matrix B_n hat die Form

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 2n-2 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Für $n \geq 5$ besitzen die 2.,3. und 4.Zeile der Matrix B_n nur in der ersten und letzten Spalte Einträge $\neq 0$. Dann sind aber diese drei Zeilenvektoren linear abhängig, so dass die Determinante von B_n verschwinden muss.

Für $n \in \{3,4\}$ ergibt sich:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 12 \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 9.$$

(c) Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht verschwindet. Dieses ist nach (a) für jede Matrix A_n und im Falle der Matrizen B_n nach (b) genau für $n \in \{3,4\}$ gegeben.

Aufgabe 2. *[17 Punkte]* Betrachten Sie auf dem reellen Vektorraum aller n-reihigen quadratischen reellen Matrizen $M_n(\mathbb{R})$ die folgenden beiden Abbildungen s, f:

$$s(X,Y) := \operatorname{Spur}\left(XY^T\right),\ X,Y \in M_n(\mathbb{R}), \text{ und } f(X) = X^T,\ X \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) *[9 Punkte]* Weisen Sie nach, dass die Abbildung s ein Skalarprodukt auf $M_n(\mathbb{R})$ definiert.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die zu f adjungierte Abbildung, d.h. die durch die folgende Bedingung eindeutig festgelegte Abbildung f^{ad}:

$$s(f(X),Y) = s(X, f^{ad}(Y)) \text{ für alle } X,Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

(c) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass f den Eigenwert 1 besitzt.

Lösung:

(a) Es ist zu zeigen, dass s eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist.

s ist positiv definit, da für alle $X = (x_1 \dots x_n) \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$s(X,X) = \operatorname{Spur}\left(XX^T\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^T x_k = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_2^2 \geq 0$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\}\ x_k = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

s ist bilinear, da für alle $X,Y,Z \in M_n(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} s(\lambda X + \mu Y, Z) &= \operatorname{Spur}\left((\lambda X + \mu Y)Z^T\right) = \operatorname{Spur}\left(\lambda X Z^T + \mu Y Z^T\right) \\ &= \lambda \operatorname{Spur}\left(XZ^T\right) + \mu \operatorname{Spur}\left(YZ^T\right) = \lambda s(X,Z) + \mu s(Y,Z). \end{aligned}$$

(Die Linearität von s in der zweiten Komponente folgt analog.)

s ist symmetrisch, da für $X,Y \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$s(X,Y) = \operatorname{Spur}\left(XY^T\right) = \operatorname{Spur}\left(\left(XY^T\right)^T\right) = \operatorname{Spur}\left(YX^T\right) = s(Y,X).$$

(b) Die Abbildung f ist linear, da nach den Rechenregeln für die Transposition gilt:

$$f(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)^T = \lambda X^T + \mu Y^T = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Die zu f adjungierte Abbildung f^{ad} muss erfüllen:

$$s(f(X),Y) = s(X, f^{ad}(Y)) \text{ für alle } X,Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

Damit ergibt sich:

$$s(f(X),Y) = \operatorname{Spur}\left(X^T Y^T\right) = \operatorname{Spur}\left((YX)^T\right) = \operatorname{Spur}(YX) = \operatorname{Spur}(XY) = s(X, f(Y)).$$

Dieses liefert $f^{ad}(Y) = f(Y) = Y^T$ für alle $Y \in M_n(\mathbb{R})$, d.h. f ist sogar selbstadjungiert.

(c) Es ist $f(X) = X^T = 1 \cdot X$ für jede symmetrische Matrix $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. *[18 Punkte]* Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ und $p \in \{0, \dots, n\}$.
Zeigen Sie nun für die Matrix

$$A := \sum_{k=1}^{p} v_k v_k^T - \sum_{k=p+1}^{n} v_k v_k^T \tag{1}$$

die folgenden Aussagen:

(a) *[4 Punkte]* A ist symmetrisch.

(b) *[4 Punkte]* Jeder Vektor $v_k,\ k \in \{1, \dots, n\}$, ist Eigenvektor entweder zum Eigenwert $+1$ oder zum Eigenwert -1.

(c) *[7 Punkte]* A ist orthogonal.

(d) *[3 Punkte]* Berechnen Sie zu der Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

und $p = 2$ die Matrix A gem. (1).

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} A^T &= \left(\sum_{k=1}^{p} v_k v_k^T - \sum_{k=p+1}^{n} v_k v_k^T\right)^T = \sum_{k=1}^{p} \left(v_k v_k^T\right)^T - \sum_{k=p+1}^{n} \left(v_k v_k^T\right)^T \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(v_k^T\right)^T v_k^T - \sum_{k=p+1}^{n} \left(v_k^T\right)^T v_k^T \ = A \end{aligned}$$

(b) Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis ist, gilt $v_k^T v_l = \delta_{kl}$ und damit folgt

$$Av_l = \left(\sum_{k=1}^{p} v_k v_k^T - \sum_{k=p+1}^{n} v_k v_k^T\right) v_l = \sum_{k=1}^{p} v_k \left(v_k^T v_l\right) - \sum_{k=p+1}^{n} v_k \left(v_k^T v_l\right) = \begin{cases} v_l, & l \le p, \\ -v_l, & l > p. \end{cases}$$

(c) Es ist zu zeigen $A^T A = E_n$ bzw. wegen (a) $A^2 = E_n$.
Da A nach (a) symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar mit einer orthogonalen Matrix Q.
Weiterhin steht nach (b) auf der Hauptdiagonalen der Diagonalmatrix genau p-mal der Eigenwert 1 und genau $(n-p)$-mal der Eigenwert -1.
Also folgt

$$A^2 = \left(Q^T \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{pmatrix} Q\right)^2 = E_n.$$

(d) Direkte Rechnung ergibt

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *[19 Punkte]* Es sei eine Zahl $a > 0$ gegeben. Die Folge $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$.

(a) *[7 Punkte]* Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ streng monoton wachsend ist.

(b) *[8 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Beweisen Sie für $a > 0$ die Ungleichung $\sqrt{1+a+\sqrt{a}} < 1+\sqrt{a}$.

(ii) *[4 Punkte]* Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n < 1+\sqrt{a}$ gilt.

(c) *[4 Punkte]* Begründen Sie, warum der Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ der Folge $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ existiert.

Lösung:

(a) **Induktionsanfang:** Aus $a > 0$ folgt $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$.

Induktionsschluss: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n < x_{n+1}$, so folgt aus der strengen Monotonie der Wurzelfunktion: $a + x_n < a + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$.

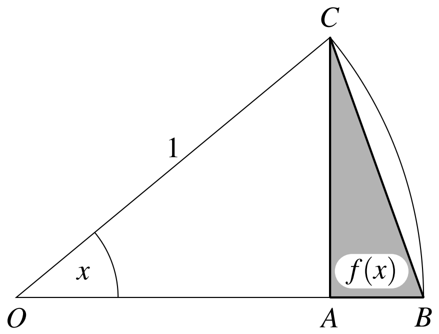
Damit ist die strenge Monotonie der Folge $\left(x_n\right)$ nachgewiesen.

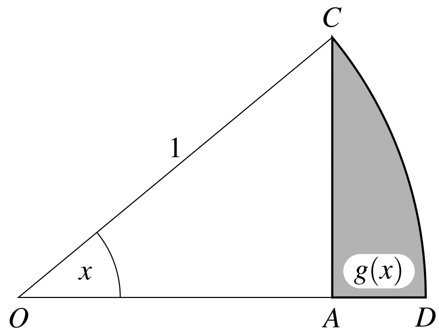
(b) (i) Aus $0 < \sqrt{a}$ folgt $1+a+\sqrt{a} < 1+2\sqrt{a}+a = (1+\sqrt{a})^2$. Da alle vorkommenden Größen positiv sind, folgt daraus $\sqrt{1+a+\sqrt{a}} < 1+\sqrt{a}$.

(ii) Für $n = 1$ ist diese Aussage offensichtlich richtig.
Aus $x_n < 1+\sqrt{a}$ für einen Index $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der strengen Monotonie der Wurzelfunktion und Teil (i) die Ungleichung $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+(1+\sqrt{a})} < 1+\sqrt{a}$.
Damit gilt die Ungleichung $x_n < 1+\sqrt{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Folge $\left(x_n\right)$ ist nach Teil (a) streng monoton wachsend. Zusammen mit Teil (b) folgt die Ungleichung $\sqrt{a} \leq x_n < 1+\sqrt{a}$. Die Existenz des Grenzwerts x folgt aus dem Monotonieprinzip.

Aufgabe 5. *[19 Punkte]* Betrachten Sie in einem Kreissektor mit Radius $r = 1$ und dem Öffnungswinkel x das durch gerade Strecken berandete Dreieck ABC mit der Fläche $f(x)$ (siehe linke Skizze) und das durch zwei gerade Strecken und einen Teil der Kreislinie berandete Dreieck ADC mit der Fläche $g(x)$ (siehe rechte Skizze).





(a) *[10 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Begründen Sie $\overline{OA} = \cos x$ und $\overline{AC} = \sin x$.

(ii) *[6 Punkte]* Zeigen Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen, dass

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(\sin x - \sin x \cos x\big) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}\big(x - \sin x \cos x\big)$$

gilt.

(b) *[9 Punkte]* Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Lösung:

(a) (i) Im rechtwinkligen Dreieck OAC ist die Strecke $\overline{OA}$ die Ankathete zum Winkel x und die Strecke $\overline{AC}$ ist die Gegenkathete zum Winkel x. Da die Hypothenuse OC die Länge 1 hat, gilt $\overline{OA} = \cos x$ und $\overline{AC} = \sin x$.

(ii) Das Dreieck ABC hat die Grundlinie $\overline{AB} = 1 - \cos x$ und die Höhe $\overline{AC} = \sin x$. Die Fläche dieses Dreiecks ist $f(x) = \frac{1}{2}\sin x(1 - \cos x)$.
Die Fläche des Kreissegments ODC ist $\frac{1}{2}xr^2 = \frac{1}{2}x$. Die Fläche $g(x)$ ist die Differenz dieser Fläche und der Fläche $\frac{1}{2}\sin x \cos x$ des Dreiecks OAC, d.h. $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x$.

(b) Zweimalige Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x - \sin x \cos x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} \underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos x \sin x - \sin x}{4\cos x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos x - 1}{4\cos x} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 6. *[15 Punkte]*
Es sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und das Integral

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^4 \int\limits_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gegeben.

(a) *[4 Punkte]* Skizzieren Sie den Integrationsbereich B dieses Doppelintegrals.

(b) *[6 Punkte]* Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integrationen und schreiben Sie das Integral in der Form

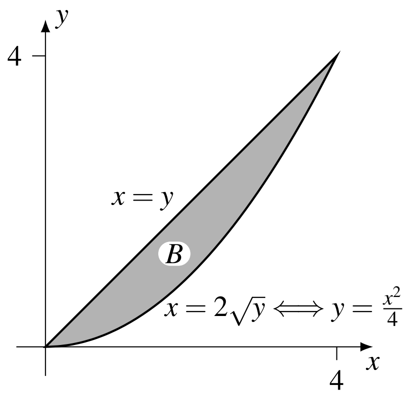
$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Geben Sie die Konstanten a und b sowie die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ an.

(c) *[5 Punkte]* Berechnen Sie die Fläche des Integrationsbereichs B.

Lösung:

(a) Der Integrationsbereich ist



(b) Es ist $a = 0$ und $b = 4$. Aus dem linken Rand $x = y$ wird der obere Rand $y = \varphi_2(x) = x$ und aus dem rechten Rand $x = 2\sqrt{y}$ wird der untere Rand $y = \varphi_1(x) = \frac{x^2}{4}$. Damit ergibt sich

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(c) Die Fläche von B ist $F(B) = \iint\limits_B 1\,\mathrm{d}(x,y)$. Dieses Integral kann als iteriertes Integral mit zwei verschiedenen Integrationsreihenfolgen berechnet werden:

$$F(B) = \int\limits_0^4 \int\limits_y^{2\sqrt{y}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \left(2\sqrt{y} - y\right)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^4 = \frac{8}{3} \quad \text{oder}$$

$$F(B) = \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\Big|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Aufgabe 7. *[13 Punkte]*
Es seien p, q stetig sowie $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

im Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie: Haben die Funktionen y_1 und y_2 an einer Stelle $\xi \in (a, b)$ beide ein lokales Extremum, so sind die Funktionen y_1 und y_2 linear abhängig.

Lösung: Die Funktionen y_1 und y_2 sind in (a, b) differenzierbar. Da die Funktionen an der Stelle ξ ein lokales Extremum haben, gilt $y_1'(\xi) = 0$ und $y_2'(\xi) = 0$. Aus diesem Grund hat die Wronsky-Determinante

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

an der Stelle $x = \xi$ eine Nullstelle. Da y_1 und y_2 zwei Lösungen einer linearen homogenen Differenzialgleichung der Ordnung zwei sind, folgt daraus die lineare Abhängigkeit dieser beiden Funktionen.