Schriftliche Prüfung im Fach

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 17. Oktober 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 28 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- und Finanzmarktprodukte][18 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Betrachten Sie einen variabel verzinslichen Titel mit zwei Jahren Laufzeit, Nennwert 100.000 € und halbjährlich nachschüssigen Zinszahlungen, die an die Entwicklung der Euro-Short-Term-Rate (€STR) mit einer Fristigkeit von 6 Monaten gekoppelt sind. Die €STR-Entwicklung lautet (Zinssätze jeweils in annualisierter Form) 3% ($t_0 = 0$), 4% ($t_1 = 0{,}5$), 3% ($t_2 = 1$), 2% ($t_3 = 1{,}5$) und 3% ($t_4 = 2$).

Wie lautet der Zahlungsstrom $\{Z(t_i); i = 1, \ldots, 4\}$ der Rückflüsse des variabel verzinslichen Titels?

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine XY-Aktie mit bekanntem Marktwert s_0 in $t = 0$ und zufallsabhängigem Marktwert S_4 in $t = 4$. Betrachten Sie nun ein Garantie-Zertifikat auf eine Einheit dieser Aktie. Das Zertifikat zahle in $t = 4$ den Marktwert S_4 der Aktie, *mindestens* aber 80% des *anfänglichen Marktwerts*.

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_4 des Garantie-Zertifikats zum Zeitpunkt $t = 4$ formelmäßig dar!

(ii) *[4 Punkte]* Zerlegen Sie diese Position alternativ auf *zwei Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese Zerlegungen jeweils ein?

(c) *[6 Punkte]* Ein Investor besitzt eine YZ-Aktie. Zusätzlich *verkauft* er nun eine Call-Option auf diese Aktie. Die Call-Option auf die YZ-Aktie laufe 1 Jahr, habe einen Ausübungspreis von 130 € sowie einen Marktpreis von 15 €.

(i) *[2 Punkte]* Welchen Wert besitzt die Gesamtposition (Aktie plus Short Call) nach einem Jahr? Vernachlässigen Sie dabei den ursprünglichen Kaufpreis der YZ- Aktie. Berücksichtigen Sie aber, dass der risikofreie Einjahreszins 5% beträgt.

(ii) *[4 Punkte]* Welches ist der minimale Wert dieser Position (immer noch unter Vernachlässigung des ursprünglichen Kaufpreises der YZ-Aktie)?

Hinweis: Es gilt $\min\{-x, 0\} = -\max\{x, 0\}$.

(d) *[3 Punkte]* Eine Aktienanleihe ist ein festverzinslicher Titel, bei dem bei Fälligkeit der Anleihe die Rückzahlung (Tilgung der Schuld) nicht notwendigerweise zum Nennwert N erfolgt, sondern - wenn dies für den Emittenten der Anleihe günstiger ist - alternativ eine bestimmte Anzahl von Aktien geliefert wird.

- Ein Investor erwirbt nun eine vierjährige Aktienanleihe mit laufenden Zinszahlungen (Kupon) in Höhe von 50 €.
- Bei Fälligkeit der Anleihe kann der Emittent entweder den Nennwert in Höhe von 1.000 € zurückzahlen oder 10 Z-Aktien als Tilgungsleistung andienen.

Stellen Sie den Rückzahlungsstrom des Erwerbers der Anleihe (Investor) formelmäßig dar!

Lösungsskizze:

(a) Der Referenzzins für die Zinszahlungen in t_i ($i = 1, \dots, 4$) ist die €STR in t_{i-1}, die linear auf die Halbjahresperioden aufgeteilt wird. In t_4 erfolgt zusätzlich die Tilgung des Nennwerts. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} Z(t_1) &= 0{,}03 \cdot 0{,}5 \cdot 100.000 = 1.500 \\ Z(t_2) &= 0{,}04 \cdot 0{,}5 \cdot 100.000 = 2.000 \\ Z(t_3) &= 0{,}03 \cdot 0{,}5 \cdot 100.000 = 1.500 \\ Z(t_4) &= 0{,}02 \cdot 0{,}5 \cdot 100.000 + 100.000 \\ &= 1.000 + 100.000 = 101.000 \end{aligned}$$

Der gesuchte Zahlungsstrom lautet somit

$$Z = \{1.500, 2.000, 1.500, 101.000\}.$$

(b) (i) Rückfluss-Position: $V_4 = \max\{S_4, 0{,}8 \cdot s_0\}$

(ii) Zerlegung 1: $V_4 = S_4 + \max\{0{,}8 \cdot s_0 - S_4, 0\}$

Zerlegung 1 beinhaltet einen Put auf die XY-Aktie mit Laufzeit 4 und Ausübungspreis $0{,}8 \cdot s_0$.

Zerlegung 2: $V_4 = 0{,}8 \cdot s_0 + \max\{S_4 - 0{,}8 \cdot s_0, 0\}$

Zerlegung 2 beinhaltet einen Call auf die XY-Aktie mit Laufzeit 4 und Ausübungspreis $0{,}8 \cdot s_0$.

(c) (i) Bezeichne S_1 den Wert der YZ-Aktie zum Zeitpunkt 1. Für den Wert V_1 der Gesamtposition gilt somit

$$V_1 = S_1 + 15 \cdot 1{,}05 - \max\{S_1 - 130, 0\}.$$

(ii) Es gilt

$$S_1 - \max\{S_1 - 130, 0\} = S_1 + \min\{130 - S_1, 0\} = \min\{130, S_1\}$$

und damit insgesamt

$$V_1 = \min\{130, S_1\} + 15 \cdot 1{,}05.$$

Der minimale Wert der Position beträgt damit $15 \cdot 1{,}05$ €.

(d) Bezeichne S_4 den Wert der Z-Aktie zum Zeitpunkt $t = 4$. Die Rückzahlung RZ_4 der Anleihe aus Sicht des Investors in $t = 4$ ist dann gegeben durch

$$\mathrm{RZ}_4 = \min\{1000, 10 \cdot S_4\}.$$

Der gesuchte Zahlungsstrom lautet somit

$$\{50, 50, 50, 50 + \mathrm{RZ}_4\}.$$

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [18 Punkte]*

(a) *[14 Punkte]* Der risikofreudige Dr. Omedar besitzt für $x \geq -100$ die Risikonutzenfunktion $u(x) = (x + 100)^2$.

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie für $x > -100$ das Arrow-Pratt-Maß für die Risikonutzenfunktion von Dr. Omedar!

(ii) *[6 Punkte]* Dr. Omedar wird nun die Möglichkeit geboten, an einer Lotterie teilzunehmen. Der Einsatz beträgt dabei 100 €. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-8} gewinnt Dr. Omedar eine Million €, ansonsten geht er leer aus.

Ist es für Dr. Omedar vorteilhaft bzw. nicht vorteilhaft, an der Lotterie teilzunehmen, oder ist er hinsichtlich einer Teilnahme indifferent?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Alternative zur Teilnahme an der Lotterie die Nicht-Teilnahme ist!

(iii) *[6 Punkte]* Wie verändert sich die Beurteilung von Dr. Omedar gemäß (ii), wenn - bei unverändertem Einsatz - die Gewinnhöhe verdoppelt wird, die Gewinnwahrscheinlichkeit sich hingegen halbiert?

(b) *[4 Punkte]* Das Nullnutzenprinzip für die Bestimmung der Risikoprämie π lautet

$$\mathbb{E}[u(\pi - S)] = u(0),$$

wobei S den zu versichernden Schaden bezeichnet. Bestimmen Sie die Prämie $\pi = \pi(S)$ nach dem Nullnutzenprinzip für die Nutzenfunktion $u(x) = -\exp(-ax)$ mit Parameter $a > 0$.

Lösungsskizze:

(a) (i) Das Arrow-Pratt-Maß ist allgemein gegeben durch

$$r(x) = -u''(x)/u'(x).$$

Im vorliegenden Fall gilt $u'(x) = 2(x + 100)$ und $u''(x) = 2$. Damit erhalten wir

$$r(x) = -u''(x)/u'(x) = -\frac{1}{x + 100}.$$

(ii) Nutzen der Nicht-Teilnahme:

$$\mathbb{E}[u(0)] = u(0) = 100^2 = 10.000.$$

Nutzen der Teilnahme: Aus einer Teilnahme an der Lotterie resultiert die Gewinnfunktion G als zweiwertige Zufallsgröße mit

$$\mathbb{P}[G = 10^6 - 100] = 10^{-8}$$

sowie

$$\mathbb{P}[G = -100] = 1 - 10^{-8}.$$

Für $u(G)$ gilt entsprechend

$$\mathbb{P}[u(G) = 10^{12}] = 10^{-8} \text{ sowie } \mathbb{P}[u(G) = 0] = 1 - 10^{-8}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathbb{E}[u(G)] = 10^{12} \cdot 10^{-8} + 0 \cdot (1 - 10^{-8}) = 10.000.$$

Dr. Omedar ist somit *indifferent* hinsichtlich der Teilnahme an der ihm angebotenen Lotterie.

(iii) Der Nutzen der Nicht-Teilnahme lautet unverändert 10.000. Für G resultiert nun

$$\mathbb{P}[G = 2 \cdot 10^6 - 100] = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-8}$$

sowie

$$\mathbb{P}[G = -100] = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-8}.$$

Des Weiteren gilt

$$\mathbb{P}[u(G) = 4 \cdot 10^{12}] = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-8} \text{ sowie } \mathbb{P}[u(G) = 0] = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-8}.$$

Hieraus folgt insgesamt

$$\mathbb{E}[u(G)] = 4 \cdot 10^{12} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{4} = 20.000.$$

Für Dr. Omedar ist es somit nun vorteilhaft, an der Lotterie teilzunehmen.

(b) Die Bedingung für die Nullnutzenprämie π lautet in diesem Fall

$$\mathbb{E}[-\exp(-a(\pi - S))] = -\exp(-a \cdot 0) = -1.$$

Hieraus folgt $\exp(-a\pi)\mathbb{E}[\exp(aS)] = 1$, und dies führt insgesamt zum Prämienprinzip („Exponentielles Prämienprinzip“)

$$\pi(S) = \tfrac{1}{a} \ln \mathbb{E}[\exp(aS)].$$

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

Am Finanzmarkt werden Aktien des Ökostromanbieters „Sustainable Energy AG“ liquide gehandelt:

- Der Marktpreis der Aktie beträgt aktuell 56 € pro Stück.
- Geld kann zum Zinssatz 5% p. a. risikofrei angelegt bzw. geliehen werden.

Ihr Finanzvorstand bittet Ihr Team, einjährige Finanzderivate auf die Aktie der „Sustainable Energy AG“ zu analysieren. Ihr Team entscheidet sich grundsätzlich für die Modellierung in einem Einperiodenmodell auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($\mathbb{P}$=real-world Maß) mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1) mit zugehörigen Preisprozessen $(S_0^0; S_1^0)$ bzw. $(S_0^1; S_1^1)$. Nach einem Brainstorming stehen zunächst folgende Finanzmarktmodelle zur Debatte:

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = \frac{1}{2}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 84} \\ \boxed{S_0^1 = 56} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 66} \end{tikzcd}$$

(2) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = \frac{1}{2}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 84} \\ \boxed{S_0^1 = 56} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 42} \end{tikzcd}$$

(3) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[\{\omega_2\}] = \mathbb{P}[\{\omega_3\}] = \frac{1}{4}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} \\ & \boxed{S_1^0(\omega_3) = 1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 84} \\ \boxed{S_0^1 = 56} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 84} \\ & \boxed{S_1^1(\omega_3) = 42} \end{tikzcd}$$

(a) *[2 Punkte]* **Finanzmarktmodell (1)** wurde von Ihrem neuen Praktikanten vorgeschlagen. Erläutern Sie für die Zielperson „Praktikant“ intuitiv (ohne Fachbegriffe wie risikoneutrales Maß etc.), dass dieses Modell nicht sinnvoll ist.

(b) *[8 Punkte]* Nach Verwerfen von Modell (1) fokussieren Sie auf **Finanzmarktmodell (2)**, um eine *Europäische Call-Option* auf die Aktie der „Sustainable Energy AG“ mit Fälligkeit in $t = 1$ und Ausübungspreis 63 € zu analysieren.

(i) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für diese Call-Option und bewerten Sie die Call-Option mithilfe der Kosten der Replikation.

(ii) *[3 Punkte]* Ihr Praktikant findet diese Methodik viel zu „kompliziert“ und schlägt daher vor, den Preis der Call-Option mit Auszahlungsprofil C_1^{call} als Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[C_1^{\text{call}}/1{,}05] = 10$ der diskontierten Auszahlung unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ zu berechnen. Geben Sie eine Arbitrage-Strategie an, um dem Praktikanten zu verdeutlichen, dass sein Vorschlag nicht fachgerecht ist.

(iii) *[1 Punkt]* Geben Sie an, wie die Formel des Praktikanten modifiziert werden muss, um eine fachgerechte Bewertung der Option vorzunehmen.

(c) *[8 Punkte]* Anschließend betrachten Sie **Finanzmarktmodell (3)**, das Sie vorgeschlagen haben.

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie für Finanzmarktmodell (3) die Menge aller äquivalenten risikoneutralen Maße. Worin besteht der strukturelle Unterschied zu Finanzmarktmodell (2)?

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie explizit die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim C_1, definiert durch

$$C_1(\omega_1) = 252, \quad C_1(\omega_2) = 63, \quad C_1(\omega_3) = 126.$$

Geben Sie mit Begründung an, ob C_1 in diesem Modell replizierbar ist.

(d) *[7 Punkte]* Im Markt wird weiterhin eine einjährige *Europäische Put-Option* mit Ausübungspreis 63 € zum Marktpreis 12 € liquide gehandelt. Eine Kollegin stellt fest, dass dies exakt der arbitrage-freie Preis dieser Put-Option in Finanzmarktmodell (2) ist, und schlägt daher vor, das **Finanzmarktmodell (2)** um die Put-Option als primären Finanztitel zu erweitern, d. h. die Put-Option wird Produkt 2 mit Preisprozess $(S_0^2; S_1^2) = (C_0^{\text{put}}; C_1^{\text{put}})$. Als Finanzderivat betrachten Sie die Garantieposition

$$G_1 = \max\{60 \cdot S_1^1, 3360\},$$

die für ein Portfolio aus 60 Aktien zum Zeitpunkt 1 eine Wertuntergrenze von 3360 € (Wert des Aktienportfolios in $t = 0$) sichert.

Bestimmen Sie *alle* Strategien, mit denen die Auszahlung des Derivats G_1 durch Handel mit Sparbuch, Aktie und Put-Option repliziert werden kann, und bestimmen Sie die jeweiligen Kosten der perfekten Replikation. Welches finanzmathematische Grundprinzip wird durch Ihre Berechnungen illustriert? Formulieren Sie dieses in *Kurzform*.

Lösungsskizze:

(a) Die Aktie besitzt offensichtlich in beiden Szenarien eine höhere Rendite als das Sparbuch, sodass die Aktie im Modell systematisch besser als das Sparbuch performt. Man könnte daher ohne Risiko Gewinn generieren (Arbitragemöglichkeit), z. B. indem man heute Aktien auf Kredit (Vereinbarung der Rückzahlung in $t = 1$) erwirbt und in $t = 1$ den Kredit durch Aktienverkäufe bedient sowie einen risikofreien Gewinn vereinnahmt.

(b) (i) Das Auszahlungsprofil der Call-Option beträgt zur Fälligkeit

$$C_1^{\text{call}}(\omega) = (S_1^1(\omega) - 63)^+ = \begin{cases} 21 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch und Aktie) und den zugehörigen Wert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$C_1^{\text{call}}(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega) \cdot \vartheta^0 + S_1^1(\omega) \cdot \vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 84 \cdot \vartheta^1 &= 21, \\ 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 42 \cdot \vartheta^1 &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \underline{0{,}5}$, $\vartheta^0 = \underline{-20}$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von 0,5 Aktien sowie einer Kreditaufnahme in Höhe von 20 €. Das hierfür erforderliche Anfangskapital beträgt

$$C_0^{\text{call}} = S_0^0 \cdot \vartheta^0 + S_0^1 \cdot \vartheta^1 = 1 \cdot (-20) + 56 \cdot 0{,}5 = \underline{8}.$$

(ii) Wäre $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[C_1^{\text{call}}/1{,}05] = 10$ der Preis der Call-Option, so könnte man z. B. zum Zeitpunkt 0 eine Einheit der Call-Option zum Preis 10 verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ aus (i) zum Preis $C_0^{\text{call}} = 8$ implementieren und das freie Kapital $10 - 8 = 2$ in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die durch den Verkauf der Call-Option eingegangene Zahlungsverpflichtung C_1^{call} erfüllt werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1^{call} und die Anlage im Sparbuch bringt risikofrei den Ertrag $2 \cdot 1{,}05 = 2{,}1$ €. Damit ist auch dieser Vorschlag des Praktikanten nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage und daher nicht fachgerecht.

(iii) Der arbitrage-freie Preis ergibt sich als Erwartungswert des diskontierten Auszahlungsprofils unter dem äquivalenten risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ (*risikoneutrale Bewertungsformel*):

$$C_0^{\text{call}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1^{\text{call}}}{1{,}05}\right].$$

(c) (i) Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1,2,3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes sind bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1)\cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2)\cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3)\cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1+q_2+q_3 = 1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$56 = 80q_1 + 80q_2 + 40q_3 = 80(1-q_3) + 40q_3 = 80 - 40q_3.$$

Es folgt $q_3 = 0{,}6$, $q_1 + q_2 = 0{,}4$. Für jedes $\alpha \in (0,1)$ definieren die Gewichte $q_1(\alpha) = 0{,}4\cdot\alpha$, $q_2(\alpha) = 0{,}4\cdot(1-\alpha)$, $q_3(\alpha) = 0{,}6$ ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_\alpha$, das zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist.

In Modell (3) können Auszahlungsprofile, die in den Szenarien ω_1 und ω_2 unterschiedliche Auszahlungen liefern, nicht repliziert werden, d. h. Modell (3) ist unvollständig (siehe auch *2. Fundamentalsatz*).

(ii) Für den Contingent Claim $C_1(\omega_1) = 252$, $C_1(\omega_2) = 63$, $C_1(\omega_3) = 126$ berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, aus (i) einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\frac{C_1}{1{,}05}\right] \\ &= \frac{1}{1{,}05}\big(C_1(\omega_1)\cdot q_1(\alpha) + C_1(\omega_2)\cdot q_2(\alpha) + C_1(\omega_3)\cdot q_3(\alpha)\big) \\ &= 240\cdot 0{,}4\cdot\alpha + 60\cdot 0{,}4\cdot(1-\alpha) + 120\cdot 0{,}6 \\ &= 96 + 72\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0,1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = (96,168)$, also ein ganzes Preisintervall. Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der perfekten Replikation entsprechen würde.

Bemerkung: Die replizierbaren Contingent Claims besitzen für $(\vartheta^0,\vartheta^1) \in \mathbb{R}^2$, interpretiert als Einheiten von Sparbuch und Aktie, die Struktur

$$C_1(\omega) = \vartheta^0 S_1^0(\omega) + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

stellen also eine Linearkombination der primären Finanztitel dar. Insbesondere kann im vorliegenden Modell Replizierbarkeit nur vorliegen, wenn die Auszahlungen eines Contingent Claims in den Szenarien ω_1,ω_2 identisch sind. Dies liefert eine alternative Begründung der Nicht-Replizierbarkeit.

(d) Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0,\vartheta^1,\vartheta^2)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch, Aktie und Put-Option) und den zugehörigen Portfoliowert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$G_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega)\cdot\vartheta^0 + S_1^1(\omega)\cdot\vartheta^1 + C_1^{\text{put}}(\omega)\cdot\vartheta^2, \quad \omega \in \{\omega_1,\omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 84 \cdot \vartheta^1 + \ \ 0\vartheta^2 &= 5040 \\ 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 42 \cdot \vartheta^1 + 21\vartheta^2 &= 3360 \end{aligned}$$

mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Dieses besitzt unendlich viele Lösungen $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2)$, nämlich

$$\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2) = (4800 - 80\vartheta^1, \vartheta^1, 2\vartheta^1 - 80), \quad \vartheta^1 \in \mathbb{R}.$$

Das erforderliche Anfangskapital beträgt für jede dieser Replikationsstrategien

$$\begin{aligned} V_0^{\vartheta} &= S_0^0 \cdot \vartheta^0 + S_0^1 \cdot \vartheta^1 + C_0^{\text{put}} \cdot \vartheta^2 \\ &= 1 \cdot (4800 - 80\vartheta^1) + 56 \cdot \vartheta^1 + 12 \cdot (2\vartheta^1 - 80) = \underline{3840}. \end{aligned}$$

Dies illustriert das *Law of One Price*: Ist ein Contingent Claim replizierbar, so sind die Kosten der Replikation unabhängig von der gewählten Replikationsstrategie.

Bemerkung: Alternative Parameterisierungen der Replikationsstrategien sind möglich.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Zinssensitivitäten] [22 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Ein n-jähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe $\{Z, \ldots, Z, Z + N\}$ seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und $Z = N \cdot i$ die Höhe der jeweiligen (nachschüssigen) Zinszahlungen, wobei i die Nominalverzinsung des Bonds bezeichne.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert (Barwert) des Bonds unter Verwendung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Marktzins in Höhe von r zugrunde gelegt wird.

(ii) *[2 Punkte]* Weisen Sie auf der Grundlage von (i) nach, dass im Falle $r = i$ der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)!

(b) *[9 Punkte]* Betrachten Sie eine zweijährige Stufenzinsanleihe, die im ersten Jahr einen Kupon von 2% und im zweiten Jahr einen Kupon von 5% aufweist. Die Kupons sind jeweils am Jahresende fällig. Der Nennwert der Anleihe beträgt 100 €. Das aktuelle Marktzinsniveau ist flach und liegt bei 4% p.a..

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den heutigen Marktpreis der Anleihe.

(ii) *[3 Punkte]* Schätzen Sie die prozentuale Preisveränderung der Anleihe unter Verwendung des *Durationskonzepts* ab. Nehmen Sie an, dass sich das Marktzinsniveau um einen Prozentpunkt (=100 Basispunkte) reduziert.

(iii) *[4 Punkte]* Verwenden Sie nunmehr *Duration und Konvexität* zur Abschätzung der Preisveränderung. Wie groß ist die prozentuale Preisveränderung, wenn sich das Marktzinsniveau um einen Prozentpunkt reduziert?

(c) *[8 Punkte]* Ein Investor möchte einen Anlagebetrag von 10.000 € bei einem derzeitigen Marktzins von 4% p. a. und flacher Zinsstruktur in festverzinsliche Wertpapiere investieren. Ihm stehen Zerobonds mit Nennwert 1 sowie einer Restlaufzeit von einem Jahr bzw. alternativ sieben Jahren zur Verfügung.
Gehen Sie von einer hälftigen Aufteilung (in Geldeinheiten, nicht in Stückzahlen) des Investitionsbudgets aus.

(i) *[7,5 Punkte]* Berechnen Sie das Vermögen des Investors nach vier Jahren, wenn sich der Marktzins nach der Investition

- nicht ändert,
- unmittelbar nach Anlage auf 2% absinkt und im Weiteren dort verbleibt,
- unmittelbar nach Anlage auf 6% ansteigt und im Weiteren dort verbleibt.

(ii) *[0,5 Punkte]* Vergleichen Sie die Vermögensposition des Investors in den Szenarien mit einer Zinsänderung gegenüber dem Szenario ohne Zinsänderung.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Barwert der Zahlungsreihe ist gegeben durch ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned} Zq^{-1} + Zq^{-2} + \ldots + Zq^{-n} + Nq^{-n} &= Zq^{-n}(q^{n-1} + \ldots + q + 1) + Nq^{-n} \\ &= Z\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} + Nq^{-n} \\ &= \frac{Z}{r}(1 - q^{-n}) + Nq^{-n}. \end{aligned}$$

(ii) Mit $Z = N \cdot i$ und $r = i$ folgt aus (i)

$$\mathrm{BW}_0(r) = \frac{Ni}{i}(1 - q^{-n}) + Nq^{-n} = N.$$

<u>Alternativ</u> mit $v = q^{-1}$:

$$\begin{aligned} Zv + Zv^2 + \ldots + Zv^n + Nv^n &= Zv(1 + \ldots + v^{n-1}) + Nv^n \\ &= Zv\frac{1 - v^n}{1 - v} + Nv^n \end{aligned}$$

Mit $Z = N \cdot i$ und $r = i$ folgt hieraus mit $\frac{rv}{1-v} = 1$

$$\mathrm{BW}_0(r) = N\frac{rv}{1-v}(1 - v^n) + Nv^n = N.$$

(b) Es sei $P(r)$ der Marktpreis der Stufenzinsanleihe in $t = 0$ bezogen auf den flachen Zins r. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(r) &= 2(1 + r)^{-1} + 105(1 + r)^{-2}, \\ P'(r) &= -2(1 + r)^{-2} - 210(1 + r)^{-3}, \\ P''(r) &= 4(1 + r)^{-3} + 630(1 + r)^{-4}. \end{aligned}$$

(i) Es gilt $P(0{,}04) = \underline{99{,}00}$.

(ii) Die modifizierte Duration berechnet sich zu

$$\mathrm{DUR}^M(0{,}04) = -\frac{P'(0{,}04)}{P(0{,}04)} = \frac{188{,}54}{99{,}00} = 1{,}90$$

und entsprechend gilt

$$\Delta P/P \approx -\mathrm{DUR}^M(0{,}04)(-0{,}01) = \underline{0{,}0190}.$$

Die approximative Wertsteigerung beträgt somit 1,90%.

(iii) Die (relative) Konvexität ist gegeben durch

$$\mathrm{CONV}(0{,}04) = \frac{P''(0{,}04)}{P(0{,}04)} = \frac{542{,}08}{99{,}00} = 5{,}48.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta P/P &\approx -\mathrm{DUR}^M(0{,}04)(-0{,}01) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CONV}(0{,}04)(-0{,}01)^2 \\ &= 0{,}0190 + 0{,}0003 = \underline{0{,}0193}. \end{aligned}$$

Die approximative Wertsteigerung beträgt nun 1,93%.

(c) (i)
- Keine Zinsänderung:

$$5.000 \cdot 1{,}04^4 + 5.000 \cdot 1{,}04^4 = 10.000 \cdot 1{,}04^4 = \underline{11.698{,}59}$$

- Zinsrückgang auf 2%:

In $t = 0$ betragen die Marktpreise der Zerobonds mit Nennwert 1 und mit Restlaufzeit von einem bzw. sieben Jahren bei Bewertung zum Marktzins $1{,}04^{-1}$ bzw. $1{,}04^{-7}$. Insofern können zu Beginn bei hälftiger Aufteilung des Startkapitals

$$5.000/1{,}04^{-1} = 5.200{,}00 \text{ und } 5.000/1{,}04^{-7} = 6.579{,}66$$

Einheiten der Zerobonds mit Restlaufzeit von einem bzw. sieben Jahren erworben werden.

  – Entwicklung Zerobond 1: Rückzahlung zu 1 in $t = 1$, dann Wiederanlage über 3 Jahre zu 2%

  – Entwicklung Zerobond 2: Wert in $t = 4$ entspricht der über 3 Jahre abgezinsten Rückzahlung von 1 in $t = 7$ mit 2%.

  – Wert in $t = 4$ insgesamt somit:

$$\begin{aligned} 5.200{,}00 \cdot 1{,}02^3 + 6.579{,}66 \cdot 1{,}02^{-3} &= 5.518{,}28 + 6.200{,}16 \\ &= \underline{11.718{,}44} \end{aligned}$$

- Zinsanstieg auf 6%:

Analog:

$$\begin{aligned} 5.200{,}00 \cdot 1{,}06^3 + 6.579{,}66 \cdot 1{,}06^{-3} &= 6.193{,}28 + 5.524{,}41 \\ &= \underline{11.717{,}69}. \end{aligned}$$

(ii) In beiden Szenarien mit einer Zinsänderung ist das Vermögen des Investors jeweils höher als im Szenario mit unverändertem Zins.

Aufgabe 5. *[Derivatebewertung: Binomial- und Black-Scholes-Modell] [28 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Die Aktien der „Sonne & Meer AG“ werden heute zum Kurs von 100 € pro Stück gehandelt. Ihre Kollegen haben zur Bewertung einer *Call-Option* auf diese Aktie mit Ausübungspreis 120 € und mit Fälligkeit in $t = 2$ den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t=0,1,2}$ durch ein zweiperiodiges Binomialmodell mit Periodenzins $r = 5\%$ auf dem Sparbuch modelliert. Berechnungen ergeben als heutigen Preis der Call-Option $C_0^{\text{call}} = 8{,}4898$ € sowie die folgende Replikationsstrategie:

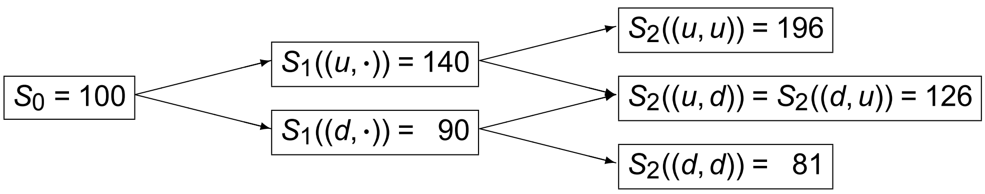
Call-Option	$t = 0$	$t = 1, \omega = (u, \cdot)$	$t = 1, \omega = (d, \cdot)$
Einheiten Aktie	0,4800	1,0000	0,1333
Einheiten Sparbuch	-39,5102	-108,8435	-9,7959

Ihr Arbeitsauftrag ist die Bewertung und Replikation der zweijährigen *Put-Option* mit Ausübungspreis 120 €; Sie möchten diese Aufgabe effizient lösen.

(i) *[2 Punkte]* Geben Sie für obiges Binomialmodell - mit *kurzer* Begründung - die *Put-Call-Parität* für die Preise von Call- und Put-Option in $t = 0$ an.

(ii) *[5 Punkte]* Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um den arbitrage-freien Preis in $t = 0$ sowie die Replikationsstrategie der Put-Option zu ermitteln.

(b) *[15 Punkte]* Im Markt wird eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie der „Green Finance AG“ mit Ausübungspreis 160 € und mit Fälligkeit in $t = 2$ gehandelt. Zur Validierung des Marktpreises verwenden Sie das zweiperiodige Binomialmodell mit Periodenzins $r = 5\%$ auf dem Sparbuch und folgender Spezifikation des Aktienpreisprozesses („Up-Faktor“ u und „Down-Faktor“ d für $0 < d < u$):



(i) *[9 Punkte]* Berechnen Sie durch *risikoneutrale Bewertung* die arbitrage-freien Preise der Put-Option zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$.

(ii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe der arbitrage-freien Preise aus (i) die Replikationsstrategie, beginnend in $t = 0$, für die Put-Option.

(c) *[6 Punkte]* Durch Grenzübergang in zeitdiskreten Binomialmodellen resultieren Black-Scholes-Preise von Finanzderivaten.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie die Grenzverteilung der terminalen Aktienpreise aus den approximierenden Binomialmodellen an und erläutern Sie den Zusammenhang mit der Verteilung des Aktienkurses im Black-Scholes-Modell.

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie mithilfe entsprechender Formeln, wie man ausgehend von der Grenzverteilung mithilfe der Dichte der Standardnormalverteilung den Preis einer Europäischen Put-Option auf eine Aktie mit Ausübungspreis $K > 0$ und Fälligkeit T berechnen kann.

Achtung: Die Durchführung der Berechnung ist nicht gefordert.

Lösungsskizze:

(a) (i) Aufgrund der Identität $(S_2 - 120)^+ - (120 - S_2)^+ = S_2 - 120$ besteht auf der Ebene der Auszahlungsprofile der Optionen der Zusammenhang

$$C_2^{\text{put}} = C_2^{\text{call}} - S_2 + 120.$$

Durch risikoneutrale Bewertung (bzw. das „Law of One Price“) folgt für die Preise der Optionen die *Put-Call-Parität*

$$C_0^{\text{put}} = C_0^{\text{call}} - S_0 + 120 \cdot 1{,}05^{-2}.$$

(ii) • Einsetzen der Werte in die Put-Call-Parität liefert konkret

$$C_0^{\text{put}} = 8{,}4898 - 100 + 120 \cdot 1{,}05^{-2} = \underline{17{,}3333}.$$

• Die Auszahlung der Put-Option ergibt sich als Kombination der Call-Option, einer Short-Position von einer Aktie sowie dem Vermögen aus der Anlage von $120 \cdot (1{,}05)^{-2} = 108{,}8435$ € in $t = 0$ im Sparbuch („buy-and-hold“). Damit ist aus der Replikationsstrategie der Call-Option die Replikation der Put-Option direkt ablesbar (jeweils eine Aktie weniger, jeweils 108,8435 Einheiten des Sparbuchs mehr):

		$t=0$	$t=1, \omega=(u,\cdot)$	$t=1, \omega=(d,\cdot)$
Call-Option	Einheiten Aktie	0,4800	1,0000	0,1333
	Einheiten Sparbuch	-39,5102	-108,8435	-9,7959
Put-Option	Einheiten Aktie	-0,5200	0,0000	-0,8867
	Einheiten Sparbuch	69,3333	0,0000	99,0476

(b) (i) Die Put-Option liefert zur Fälligkeit die Auszahlungen

$$C_2^{\text{put}} := (160 - S_2)^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 34 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 34 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 79 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

Aus dem Aktienpreisprozess sind weiterhin $d = 0{,}9$ und $u = 1{,}4$ ablesbar. Damit sind die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = \underline{0{,}3}$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1-q = \underline{0{,}7}$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie.

Bezeichnen nun C_t^{put} die arbitrage-freie Preise der Put-Option in $t = 0, 1, 2$, so gilt

$$\begin{aligned}
C_1^{\text{put}}((u,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_2^{\text{put}}|\mathcal{F}_1\right](u,\cdot)\\
&= \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\text{put}}((u,u))q + C_2^{\text{put}}((u,d))(1-q)]\\
&= \tfrac{1}{1{,}05}\left(0\cdot 0{,}3 + 34\cdot 0{,}7\right) = \underline{22{,}6667},\\
C_1^{\text{put}}((d,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_2^{\text{put}}|\mathcal{F}_1\right](d,\cdot)\\
&= \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\text{put}}((d,u))q + C_2^{\text{put}}((d,d))(1-q)]\\
&= \tfrac{1}{1{,}05}\left(34\cdot 0{,}3 + 79\cdot 0{,}7\right) = \underline{62{,}3810}
\end{aligned}$$

und rekursiv ergibt sich

$$\begin{aligned}
C_0^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_1^{\text{put}}\right] = \tfrac{1}{1+r}[C_1^{\text{put}}((u,\cdot))q + C_1^{\text{put}}((d,\cdot))(1-q)]\\
&= \tfrac{1}{1{,}05}\left[22{,}6667\cdot 0{,}3 + 62{,}3810\cdot 0{,}7\right] = \underline{48{,}0635}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Mit den Gewichten

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = \begin{cases} 0{,}09 & \text{für } \omega = (u,u),\\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (u,d),\\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (d,u),\\ 0{,}49 & \text{für } \omega = (d,d), \end{cases}$$

des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ berechnet man alternativ direkt

$$\begin{aligned}
C_0^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_2^{\text{put}}}{(1{,}05)^2}\right]\\
&= \frac{1}{(1{,}05)^2}(0\cdot 0{,}09 + 34\cdot 0{,}21 + 34\cdot 0{,}21 + 79\cdot 0{,}49) = \underline{48{,}0635}.
\end{aligned}$$

(ii) Die in (i) berechneten arbitrage-freien Preise entsprechen im vollständigen Binomialmodell den Kosten der perfekten Replikation in den jeweiligen Knoten. Die Berechnung der jeweiligen Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1{,}05; 1{,}1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u,\cdot):}$

$$\begin{aligned}
196x + 1{,}1025y &= 0\\
126x + 1{,}1025y &= 34
\end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}4857}$, $y = \underline{86{,}3476}$.

$\underline{t = 1, \omega = (d, \cdot)}$:

$$\begin{aligned} 126x + 1{,}1025y &= 34 \\ 81x + 1{,}1025y &= 79 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-1{,}0000}$, $y = \underline{145{,}1247}$.

$\underline{t = 0}$:

$$\begin{aligned} 140x + 1{,}05y &= 22{,}6667 \\ 90x + 1{,}05y &= 62{,}3810 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}7943}$, $y = \underline{127{,}4933}$.

(c) (i) Die Verteilungen der Aktienpreise zum Fälligkeitszeitpunkt T unter den Martingalmaßen der approximierenden Binomialmodellle konvergieren schwach gegen die Log-Normalverteilung $\mathcal{LN}(\ln S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$, wobei S_0 der Startkurs der Aktie ist, r die Zinsrate darstellt und σ die Volatilität bezeichnet. Dies ist ist die Verteilung der Zufallsvariable

$$S_T := S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$$

mit $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, die unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ den terminalen Aktienpreis im Black-Scholes-Modell modelliert.

(ii) Als Grenzwert der Preise der Put-Option ergibt sich der Black-Scholes-Preis

$$C_0^{\text{put}} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_T)^+] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+].$$

Wegen $\sqrt{T}X \sim \mathcal{N}(0, T)$ für $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} C_0^{\text{put}} &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}X + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+] \\ &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+ \varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

wobei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet. Durch konkretes Berechnen des Integrals resultiert die Black-Scholes-Formel für die Put-Option.

Aufgabe 6. *[Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [25 Punkte]*

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ und die Dichte φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi^{-1}(0{,}005) = -2{,}5758$, $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}3263$, $\varphi(-2{,}3263) = 0{,}0267$.

(a) *[5 Punkte]* Definieren Sie die Risikomaße *Value at Risk* (V@R), *Average Value at Risk* (AV@R) und *Tail Value at Risk* (TV@R) für Finanzpositionen formal. Geben Sie für den V@R und den TV@R eine ökonomische Interpretation an.

(b) *[6 Punkte]* Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2, deren Verteilungen spezifiziert sind durch:

$$\mathbb{P}[X_i = 50] = 0{,}97, \mathbb{P}[X_i = -200] = 0{,}03 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda = 0{,}05$ den Value at Risk für die Finanzpositionen X_1 und X_2 sowie für die aggregierte Position $X_1 + X_2$. Erläutern Sie *kurz*, welches Defizit des Value at Risk Ihr Berechnungsergebnis verdeutlicht.

(c) *[3 Punkte]* Angenommen, eine Versicherungsgruppe mit Risikobudget B (Obergrenze für das Risikokapital) besteht aus drei Tochtergesellschaften, die Versicherungsgeschäft betreiben. Die Basiseigenmittel der Tochtergesellschaften im Einjahreshorizont seien gegeben durch die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, die konsolidierten Basiseigenmittel der Gruppe durch $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Erläutern Sie, wie der Vorstand der Gruppe ein *Limit- und Schwellenwertsystem* für die Tochtergesellschaften etablieren kann, falls zur Risikomessung der Average Value at Risk verwendet wird.

(d) *[7 Punkte]* Im einem Bericht finden Sie für eine Finanzposition X Angaben zum Value at Risk zum Niveau 0,005 sowie zur Solvabilitätskapitalanforderung (SCR) (definiert über den Mean Value at Risk zum Niveau 0,005):

$$\mathrm{V@R}_{0{,}005}(X) = 1.390.960, \quad \mathrm{SCR}(X) = 3.090.960.$$

Sie interessieren sich jedoch zusätzlich für das Risiko, das mit dem *Average Value at Risk* (AV@R) gemessen wird. Nehmen Sie für Ihre weiteren Berechnungen vereinfachend an, dass X normalverteilt ist.

(i) *[3 Punkte]* Leiten Sie Formeln her, mit denen Sie den $\mathrm{V@R}_{0{,}005}(X)$ und $\mathrm{SCR}(X)$ im Normalverteilungskontext berechnen können.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie den AV@R von X zum Niveau 0,01.
Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X], \sigma^2(X))$ gilt $\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] + \frac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(X)$.

(e) *[4 Punkte]* Ihre Versicherung hält heute eine Finanzposition, die aus 1.000 Aktien sowie einer ausfallfreien Nullkuponanleihe (Nennwert: 100.000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) besteht. Der aktuelle Preis pro Aktie beträgt $S_0 = 5$ € und statistische Analysen deuten darauf hin, dass die jährliche Log-Rendite R der Aktie normalverteilt mit Erwartungswert 4% und Standardabweichung 6% ist.

Berechnen Sie den Value at Risk zum Niveau 0,005 dieser Finanzposition für den Einjahreshorizont.

Lösungsskizze:

(a) Definitionen der Risikomaße zum Niveau $\lambda \in (0,1)$:

- $\mathrm{V@R}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\}$
- $\mathrm{AV@R}_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha$
- $\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathbb{E}[-X| - X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)]$

Interpretationen:

- $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ ist der kleinste Geldbetrag, den man zu einer Finanzposition X hinzufügen muss, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich λ ausfällt.
- $\mathrm{TV@R}_\lambda(X)$ entspricht dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet.

(b) Aus der Definition des Value at Risk ist unmittelbar ablesbar:

$$\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -50.$$

Die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ nimmt nur die folgenden Werte an:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 100, & \text{wenn } X_1 = X_2 = 50 \\ -150, & \text{wenn } X_1 = 50, X_2 = -200 \text{ oder } X_1 = -200, X_2 = 50 \\ -400, & \text{wenn } X_1 = X_2 = -200 \end{cases}$$

Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten gilt hierbei:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 100] &= \mathbb{P}[X_1 = 50, X_2 = 50] = \mathbb{P}[X_1 = 50]\mathbb{P}[X_2 = 50] \\ &= (0{,}97)^2 = 0{,}9409 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -150] &= \mathbb{P}[X_1 = 50, X_2 = -200] + \mathbb{P}[X_1 = -200, X_2 = 50] \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 50]\mathbb{P}[X_2 = -200] \\ &= 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 0{,}0582 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -400] &= \mathbb{P}[X_1 = -200, X_2 = -200] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = -200]\mathbb{P}[X_2 = -200] \\ &= (0{,}03)^2 = 0{,}0009 \end{aligned}$$

Hieraus ist ablesbar: $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) = 150$. Insbesondere gilt:

$$150 = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) > \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -100.$$

Das Ergebnis verdeutlicht, dass das Risikomaß V@R im Allgemeinen nicht subadditiv ist, d. h. der V@R kann ökonomisch sinnvolle Diversifikation zwischen Risiken bestrafen.

(c) Das Risikomaß $\mathrm{AV@R}_\lambda$, $\lambda \in (0,1)$, ist im Gegensatz zum $\mathrm{V@R}_\lambda$ stets subadditiv und bestraft somit Diversifikation nicht. Für die Versicherungsgruppe bedeutet dies speziell

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) \leq \mathrm{AV@R}_\lambda(X_1) + \mathrm{AV@R}_\lambda(X_2) + \mathrm{AV@R}_\lambda(X_3).$$

Anstatt auf Ebene der Tochtergesellschaften Mikromanagement zu betreiben, kann der Vorstand der Gruppe den Tochtergesellschaften auch individuelle Risikobudgets B_1, B_2, B_3 mit $B_1 + B_2 + B_3 = B$ zuweisen, d. h. die Tochtergesellschaften können das Geschäft autark steuern und müssen nur sicher stellen, dass für das individuelle Risiko $\mathrm{AV@R}_\lambda(X_i) \leq B_i$, $i = 1, 2, 3$, gilt. In diesem Fall gilt auch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) \leq \mathrm{AV@R}_\lambda(X_1) + \mathrm{AV@R}_\lambda(X_2) + \mathrm{AV@R}_\lambda(X_3) \leq B_1 + B_2 + B_3 = B,$$

d. h. halten die Tochtergesellschaften die individuellen Risikobudgets ein, so ist auch auf Gruppenebene das Budget sicher eingehalten.

(d) (i) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0{,}005$ bestimmt durch $\lambda = \mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0]$. Hierbei gilt

$$\mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X). \tag{1}$$

Insbesondere folgt (z. B. mit der Cash-Invarianz des Value at Risk)

$$\mathrm{SCR}(X) = \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X) + \mathbb{E}[X] = -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X). \tag{2}$$

(ii) Durch Umstellen der Formeln (1) und (2) folgt aus dem gegebenen Zahlenwerk

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathrm{SCR}(X) - \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X) = 1.700.000, \\ \sigma(X) &= -\frac{\mathrm{SCR}(X)}{\Phi^{-1}(0{,}005)} = 1.200.000. \end{aligned}$$

Dies liefert durch Einsetzen in die Formel aus dem Hinweis

$$\begin{aligned} \mathrm{AV@R}_{0{,}01}(X) &= -\mathbb{E}[X] + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0{,}01))}{0{,}01} \cdot \sigma(X) \\ &= -1.700.000 + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0{,}01))}{0{,}01} \cdot 1.200.000 = \underline{1.504.000}. \end{aligned}$$

(e) In $t = 1$ ist der Wert der Finanzposition gegeben durch

$$V_1 = 1.000 \cdot S_0 \cdot \exp(R) + 100.000 = 5.000 \exp(R) + 100.000,$$

wobei der Zufall nur durch die zufällige Rendite $R \sim \mathcal{N}(0{,}04; (0{,}06)^2)$ getrieben wird.

Mit $q_{0,005}$ als Notation für das Quantil einer Zufallsvariable zum Niveau 0,005 und den Rechenregeln der Quantiltransformation für die wachsende Funktion $r \mapsto 5.000 \exp(r) + 100.000$ folgt somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}_{0,005}(V_1) &= -q_{0,005}(V_1) \\
&= -q_{0,005}(5.000 \exp(R) + 100.000) \\
&= -(5.000 \exp(q_{0,005}(R)) + 100.000) \\
&= -5.000 \exp(0{,}04 + 0{,}06\Phi^{-1}(0{,}005)) - 100.000 \\
&= -\underline{104.458{,}85}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. *[Grundkonzepte der Risikomessung] [12 Punkte]*

Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob die folgenden Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. **Beachten Sie, dass Punkte nur vergeben werden, wenn die zutreffende Antwort korrekt begründet ist.**

(a) *[1 Punkt]* Die Semi-Standardabweichung spiegelt den zweiseitigen Risikobegriff wider.

(b) *[1 Punkt]* Die Überprüfung des Roulette-Rads im Spielcasino ergab keinen Verdacht auf Manipulationen. Beim Setzen auf „Rot“ liegt – im Sinne von Knight – trotzdem Risiko vor.

(c) *[2 Punkte]* Das Risikomaß Standardabweichung ist immer subadditiv.

(d) *[1 Punkt]* Das Risikomaß Value at Risk ist positiv homogen.

(e) *[2 Punkte]* Ist ρ ein kohärentes Risikomaß, so ist die zugehörige Akzeptanzmenge immer konvex.

(f) *[1 Punkt]* Das Risikomaß ρ_γ, $\gamma > 0$, definiert durch

$$\rho_\gamma(X) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \tfrac{1}{\gamma}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})\},$$

ist kohärent. Hierbei ist $\mathbb{P}$ ein Referenzmaß, $\mathcal{M}_1$ stellt die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ dar und $H(\cdot|\cdot)$ ist die relative Entropie.

(g) *[1 Punkt]* Für eine log-normalverteilte Aktienposition ist (bei identischem Niveau $\lambda \in (0,1)$) der Average Value at Risk größer als der Tail Value at Risk.

(h) *[2 Punkte]* Der Beta-Faktor ist ein Maß für das systematische Risiko und nimmt für den diversifizierten Marktindex den Wert 0 an.

(i) *[1 Punkt]* Das SCR, definiert als Mean-Value-at-Risk, ist ein monetäres Risikomaß und kann daher unmittelbar als Kapitalanforderung interpretiert werden.

Lösungsskizze:

(a) **falsch:** Die Semi-Standardabweichung $\sigma_+(X) = \sqrt{\mathbb{E}[((\mathbb{E}[X]-X)^+)^2]}$ (hier einer Finanzposition) misst nur „ungünstige“ Abweichungen vom Erwartungswert und ist somit ein Beispiel für den einseitigen Risikobegriff.

(b) **wahr:** Da das Roulette-Rad nicht manipuliert ist, ist insbesondere die Eintrittswahrscheinlichkeit für „Rot“ bekannt. Dies entspricht im Sinne von Knight „Risiko“.

(c) **wahr:** Nach elementarer Stochastik gilt für die Varianz σ^2 (unabhängig von den Verteilungen) $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)$, wobei ρ die Korrelation zwischen X und Y bezeichnet. Wegen $\rho \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned}\sigma(X+Y) &= \sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2\rho\sigma(X)\sigma(Y)} \leq \sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2\sigma(X)\sigma(Y)} \\ &= \sqrt{(\sigma(X)+\sigma(Y))^2} = \sigma(X)+\sigma(Y).\end{aligned}$$

(d) **wahr:** Für jedes $\alpha \geq 0$ und jede Finanzposition X gilt per Quantiltransformation

$$\mathrm{V@R}_\lambda(\alpha X) = -q_{\alpha X}(\lambda) = -\alpha q_X(\lambda) = \alpha \mathrm{V@R}_\lambda(X).$$

(e) **wahr:** Es seien $X, Y \in \mathcal{A}$, d. h. es gilt $\rho(X) \leq 0$, $\rho(Y) \leq 0$. Dann gilt aufgrund der Konvexität des kohärenten Risikomaßes ρ für jedes $\lambda \in (0,1)$ auch

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \leq 0,$$

also $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}$.

(f) **falsch:** In der robusten Darstellung des konvexen Risikomaßes ρ_γ müsste für die Kohärenz die Straffunktion $\frac{1}{\gamma}H(\cdot|\mathbb{P})$ verschwinden; dies ist nicht der Fall, da im Allgemeinen $\frac{1}{\gamma}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \notin \{0, \infty\}$.

(g) **falsch:** Die Log-Normalverteilung ist eine stetige Verteilung. Daher stimmen der Average Value at Risk und der Tail Value at Risk der Aktienposition überein.

(h) **falsch:** Der Beta-Faktor eines Portfolios mit Rendite R ist definiert durch

$$\beta_R := \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$$

(R_M Rendite des Marktindex) und misst das systematische Risiko *relativ* zum Marktrisiko. Es gilt $\beta_{R_M} = 1$.

(i) **falsch:** Die Cash-Invarianz ist verletzt:

$$\begin{aligned}\mathrm{SCR}(X+m) &= \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X+m-\mathbb{E}[X+m]) = \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X-\mathbb{E}[X])\\ &= \mathrm{SCR}(X) \neq \mathrm{SCR}(X) - m.\end{aligned}$$

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [19 Punkte]*

Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Für den Korrelationskoeffizienten $\rho := \rho(R_1, R_2)$ gelte $-1 < \rho < 1$.

(a) *[4 Punkte]* Es bezeichnen $(x_{MVP}, 1 - x_{MVP})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios. Weisen Sie nach, dass

$$x_{MVP} = \frac{\mathrm{Var}(R_2) - \mathrm{Cov}(R_1, R_2)}{\mathrm{Var}(R_1) + \mathrm{Var}(R_2) - 2\mathrm{Cov}(R_1, R_2)}$$

gilt.

Hinweis: Es genügt hierbei die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Minimums.

(b) *[2 Punkte]* Begründen Sie, warum der Ausdruck für x_{MVP} aus (a) wohldefiniert ist!

(c) *[3 Punkte]* Welchen Wert muss die Kovarianz $\mathrm{Cov}(R_1, R_2)$ annehmen, damit $x_{MVP} = \frac{1}{6}$ beträgt?

(d) *[3 Punkte]* Unter welchen Bedingungen an $\mathrm{Cov}(R_1, R_2)$ gilt $0 \leq x_{MVP} \leq 1$, d. h. es können sowohl Leerverkäufe als auch eine Kreditaufnahme ausgeschlossen werden?

(e) *[3 Punkte]* Weisen Sie nach, dass im Zwei-Aktien-Fall mit Investmentgewichten $(x, 1-x)$ für jedes $0 \leq x \leq 1$ die Portfolio-Varianz $\sigma_P^2(x)$ monoton steigend im Korrelationskoeffizienten ρ ist.

(f) *[4 Punkte]* Im Zwei-Aktien-Fall liegt eine Diversifikation nach Markowitz vor, wenn es ein Portfolio P (mit Rendite R_P) aus beiden Aktien gibt, sodass

$$\mathrm{Var}(R_P) < \min\{\mathrm{Var}(R_1), \mathrm{Var}(R_2)\}.$$

Setzen Sie im Weiteren $0 \leq x \leq 1$ sowie $\mathrm{Var}(R_2) < \mathrm{Var}(R_1)$ voraus. Die Größe x_{MVP} ist wie in Aufgabenteil (a) definiert.

(i) *[1 Punkt]* Warum liegt im Fall $x_{MVP} = 0$ keine Diversifikation vor?

(ii) *[1 Punkt]* Warum kann der Fall $x_{MVP} = 1$ nicht eintreten?

(iii) *[2 Punkte]* Offenbar ist $x_{MVP} > 0$ ein geeignetes Diversifikationskriterium. Für welche Werte des Korrelationskoeffizienten ρ ist unter dieser Bedingung dann Diversifikation gesichert?

Lösungsskizze:

Es bezeichne $R := xR_1 + (1-x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 := \mathrm{Var}(R)$, $\sigma_1^2 := \mathrm{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 := \mathrm{Var}(R_2)$ sowie $C := \mathrm{Cov}(R_1, R_2)$.

(a) Es gilt damit

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)C.$$

Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2C - 4xC.$$

Es folgt

$$2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 4xC = 2\sigma_2^2 - 2C$$

und damit

$$x_{\text{MVP}} = \frac{\sigma_2^2 - C}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C}.$$

(b) Der Ausdruck für x_{MVP} ist wohldefiniert, falls der Nenner

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C = \operatorname{Var}(R_1 - R_2)$$

positiv ist. Die Bedingung $\operatorname{Var}(R_1 - R_2) > 0$ ist jedoch genau dann erfüllt, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d. h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$ für eine Konstante c. Die perfekte lineare Abhängigkeit von R_1 und R_2 ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

(c) Aus $x_{\text{MVP}} = \frac{1}{6}$ folgt

$$6(\sigma_2^2 - C) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C \quad \text{bzw.} \quad 5\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 4C.$$

Damit gilt insgesamt

$$C = \tfrac{1}{4}(5\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \tfrac{5}{4}\sigma_2^2 - \tfrac{1}{4}\sigma_1^2.$$

(d) Man beachte, dass gemäß Aufgabenteil (b) der Nenner des Ausdrucks x_{MVP} wohldefiniert ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} x_{\text{MVP}} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 \geq C \\ x_{\text{MVP}} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 - C \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C \quad \Leftrightarrow \quad C \leq \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Fazit: $0 \leq x_{\text{MVP}} \leq 1 \Leftrightarrow C \leq \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$

(e)

$$\sigma_P^2(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2(1-x)^2 + 2\rho x(1-x)\sigma_1\sigma_2$$

$$\frac{d\sigma_P^2(x)}{d\rho} = 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \geq 0.$$

Damit ist σ_P^2 monoton steigend in ρ.

(f) (i) Im Falle $x_{\text{MVP}} = 0$ wäre es risikominimal zu 100% nur in die risikoärmere Aktie mit Rendite R_2 zu investieren.

(ii) Im Falle $x_{MVP} = 1$ wäre es risikominimal zu 100% in die Aktie mit Rendite R_1 zu investieren. Dies stellt einen Widerspruch zu $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$ dar.

(iii) Aus der Bedingung $x_{MVP} > 0$ folgt aus Aufgabenteil (a) aufgrund von $\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$ zunächst

$$\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 > 0$$

und damit insgesamt die Bedingung

$$\rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

für das Eintreten eines Diversifikationseffekts.

Aufgabe 9. *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [13 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Gegeben sei ein rein riskantes Portfolio P, d. h. ein Portfolio aus der Menge der durch reine Aktienmischung realisierbaren Portfolios. Betrachten Sie nun ein Mischportfolio, das mit einem bestimmten Anteil x ($0 \leq x < \infty$) in P investiert ist und mit dem restlichen Anteil in die sichere Anlage zum risikofreien Zins r_0.

(i) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gesamtrendite R_x des Mischportfolios formelmäßig dar!

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie nun den Anteil x_N so, dass die Standardabweichung von R_x einer vorgegebenen „Norm-Risikoposition" σ_N entspricht!

(iii) *[3 Punkte]* Welche Rendite besitzt das solchermaßen definierte Mischportfolio mit Norm-Risikoposition σ_N?

(b) *[6 Punkte]* Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form des effizienten Rands im Rahmen der Markowitz'schen Portfoliotheorie ($\sigma^2 \geq 0{,}009$):

$$\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}009)}.$$

Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich eine risikofreie Anlage zu einem sicheren Zins von $r_0 = 0{,}08$ existiert, und bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden!

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Schnittpunkt von Tangentialgerade und dem effizienten Rand existieren muss.

Lösungsskizze:

(a) (i) Für die Rendite des Mischportfolios gilt

$$R_x = x \cdot R_P + (1 - x) \cdot r_0.$$

(ii) Zunächst ist die Standardabweichung von R_x allgemein zu bestimmen:

$$\sigma(R_x) = x \cdot \sigma(R_P).$$

Aus der Forderung $\sigma(R_x) = \sigma_N$ ergibt sich dann mit $\sigma_P := \sigma(R_P)$ das Resultat $x_N = \sigma_N/\sigma_P$.

(iii) Zunächst ist der Erwartungswert von R_x zu bestimmen. Es gilt allgemein:

$$\mu := \mathbb{E}[R_x] = x \cdot \mu_P + (1 - x) \cdot r_0 = r_0 + x \cdot (\mu_P - r_0).$$

Mit $x = x_N$ resultiert hieraus:

$$\mu_N := \mathbb{E}[R_{x_N}] = r_0 + (\sigma_N/\sigma_P) \cdot (\mu_P - r_0).$$

(b) Die Schnittpunktbedingung lautet

$$0{,}08 + a\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1\sigma^2 - 0{,}0009}.$$

Auflösung nach σ ergibt:

$$(a\sigma - 0{,}08)^2 = 0{,}1\sigma^2 - 0{,}0009$$
$$(a^2 - 0{,}1)\sigma^2 - 0{,}16a\sigma + 0{,}0073 = 0$$

Da eine Tangente vorliegt, darf nur „ein Schnittpunkt“ existieren. Eine einwertige Nullstelle liegt dann vor, wenn die Diskriminante $B^2 - 4AC$ der quadratischen Gleichung $A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$ null ist. Hieraus folgt

$$0{,}0256a^2 - 0{,}0292a^2 + 0{,}00292 = 0$$
$$a^2 = \frac{0{,}00292}{0{,}0036} = 0{,}8111.$$

Aufgrund von $a > 0$ folgt hieraus $a \approx 0{,}9$.

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist somit gegeben durch

$$\mu = 0{,}08 + 0{,}9\sigma.$$