DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Oktober 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 29 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][16 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine vierjährige *DAX-Bear-Anleihe* mit den folgenden Modalitäten:

- Es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen (Zerobond-Variante).
- Der Nennwert der Anleihe beläuft sich auf 200.000 €.
- Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer der Bear-Anleihe die Rückzahlung des Nennwerts sowie eine potentielle Bonus-Zahlung. Die Bonus-Zahlung erfolgt, wenn der DAX am Ende der Laufzeit *tiefer* steht als bei Erwerb der Anleihe.
- Die Höhe der Bonus-Zahlung beträgt 70% des Betrags der (nicht annualisierten) Vier-Perioden-Gesamtrendite des DAX und ist bezogen auf den Nennwert der Anleihe.
- Der Anfangsstand des DAX betrage (umgerechnet in Geldeinheiten) 10.000 €.

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_4 der Bear-Anleihe aus Sicht des Käufers der Anleihe *formelmäßig* dar.

(ii) *[3 Punkte]* Zerlegen Sie diese Position dann so, dass die eingebettete Option offengelegt wird. Welcher Optionstyp mit welchen Modalitäten geht hier in welchem Umfang ein?

(iii) *[1 Punkt]* Die Anleihe sei nun alternativ ein Kupon-Bond und weise dabei einen Nominalzins von 4% auf. Welche zusätzlichen Finanztitel sind in welchem Umfang zu erwerben, um diese zusätzlichen Rückflüsse zu duplizieren?

(b) *[10 Punkte]* Ein Investor habe ein Budget von 500 € und weise einen Anlagehorizont von einem Jahr auf.

- Mit seinem Budget kann er entweder ein Portfolio erwerben, das aus einer bestimmten Anzahl n von *XY*-Aktien sowie der gleichen Anzahl n von einjährigen Long Put-Optionen (jeweils bezogen auf eine Aktie) auf die *XY*-Aktie besteht. Die Put-Optionen werden dabei auf Kredit erworben und es wird unterstellt, dass das gesamte Budget investiert wird. Diese Position entspricht derjenigen eines voll investierten *1:1-Put-Hedges*.
- Alternativ kann der Investor ein Portfolio erwerben, bestehend aus in $t = 1$ fälligen Einheits-Zerobonds (Zerobonds mit Nennwert $N = 1$) sowie aus einjährigen Long Call-Optionen (jeweils bezogen auf eine Aktie) auf die *XY*-Aktie. Auch hier wird unterstellt, dass die Call-Optionen auf Kredit erworben werden.

Die am Markt zur Verfügung stehenden Finanztitel weisen dabei die folgenden Modalitäten auf. Eine *XY*-Aktie besitzt in $t = 0$ einen Marktpreis von 100 €. Die einjährigen Put-Optionen auf die *XY*-Aktie besitzen einen Ausübungspreis von 130 € und einen Marktpreis von $P_0 = 38{,}81$ €. Die einjährigen Call-Optionen weisen ebenfalls einen Ausübungspreis von 130 € auf sowie einen Marktpreis von $C_0 = 15$ €. Der einheitliche Marktzins für eine Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage 5%.

(i) *[4 Punkte]* Wie lautet die Rückfluss-Position V_1 zum Zeitpunkt $t = 1$ des voll investierten 1:1-Put-Hedges?

(ii) *[6 Punkte]* Wie viele Einheits-Zerobonds und wie viele Call-Optionen sind zu erwerben, um die Rückfluss-Position des voll investierten 1:1-Put-Hedges in $t = 1$ zu duplizieren?

Lösungsskizze:

(a) (i) Rückfluss-Position:

$V_4 = \max\{200.000, 200.000(1 + 0{,}7 \cdot \frac{\text{DAX}(0)-\text{DAX}(4)}{\text{DAX}(0)})\}$, wobei $\text{DAX}(t)$ den DAX-Stand zum Zeitpunkt t bezeichne.

(ii) Zerlegung:

$$\begin{aligned} V_4 &= 200.000 + \max\left\{0{,}7 \cdot 200.000 \cdot \tfrac{\text{DAX}(0)-\text{DAX}(4)}{\text{DAX}(0)}, 0\right\} \\ &= 200.000 + \tfrac{140.000}{\text{DAX}(0)} \cdot \max\{\text{DAX}(0) - \text{DAX}(4), 0\} \\ &= 200.000 + 14 \cdot \max\{10.000 - \text{DAX}(4), 0\} \end{aligned}$$

Die Zerlegung beinhaltet 14 vierjährige DAX-Put-Optionen mit einem Ausübungspreis in Höhe von 10.000.

(iii) Weist die Anleihe einen Nominalzins von 4% auf, dann sind zusätzlich jeweils 8.000 Einheits-Zerobonds mit Restlaufzeiten von 1, 2, 3 und 4 Jahren zu erwerben.

(b) Bezeichne S_1 den Wert der *XY*-Aktie in $t = 1$. In $t = 0$ können 5 Aktien erworben werden. Damit ist auch eine Long-Position in 5 Puts zu etablieren.

(i) Position V_1 des 1:1-Put-Hedge in $t = 1$:

$$\begin{aligned} V_1 &= 5(S_1 + \max\{130 - S_1, 0\}) - 5 \cdot P_0 \cdot 1{,}05 \\ &= 5\max\{S_1, 130\} - 194{,}05 \cdot 1{,}05 \\ &= 5\max\{S_1, 130\} - 203{,}75. \end{aligned}$$

(ii) Duplikation:

In $t = 0$ kostet der Einheits-Zerobond $(1{,}05)^{-1}$ Geldeinheiten. Der Investor kann sein gesamtes Budget zum Erwerb von Einheits-Zerobonds einsetzen, da die Kosten der Long Call-Position auf Kredit finanziert werden. In $t = 0$ gilt somit beim Erwerb von x Einheits-Zerobonds und einem sicheren Zins von 5%:

$$x(1{,}05)^{-1} = 500,$$

d. h. $x = 500 \cdot 1{,}05 = \underline{525}$.

Duplikationsgleichung in $t = 1$ bei Vorliegen von y Long Calls:

$$x \cdot 1 + y \cdot \max\{S_1 - 130, 0\} - y \cdot C_0 \cdot 1{,}05 = 5 \max\{S_1, 130\} - 203{,}75.$$

Mit $x = 525$, $C_0 = 15$ und bei einer Wahl von $S_1 = 130$ resultiert hieraus:

$$525 - 15{,}75y = 650 - 203{,}75 \quad \text{bzw.} \quad 15{,}75y = 78{,}75$$

und damit $y = \underline{5}$.

Es sind somit insgesamt 525 Einheitszerobonds zu erwerben und 5 Calls zu kaufen, um die voll investierte Put-Hedge-Position zu duplizieren.

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [12 Punkte]*

Ein Unternehmen besitzt ein Anfangsvermögen von $v_0 = 1.000$ Geldeinheiten. In der betrachteten Periode kann ein Schaden S eintreten, der dieses Anfangsvermögen mindert. Die Verteilung von S ist gegeben durch:

k	0	100	200	600
$\mathbb{P}[S = k]$	0,9	0,04	0,04	0,02

Das Unternehmen kann zur Deckung des Schadens eine Vollversicherung gegen Zahlung einer Prämie abschließen.

Das Unternehmen beurteilt die Endvermögensposition V_1 auf Basis des *Bernoulli-Prinzips*. Das Unternehmen ist risikoavers und legt die Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$ zugrunde.

(a) *[6 Punkte]* Bei welcher Höhe der Prämie π (*Nutzenindifferenzprämie*) ist das Unternehmen indifferent zwischen dem Abschluss eines Versicherungsvertrags und dem Verzicht auf die Versicherung?

(b) *[4 Punkte]* Wie ändert sich die Nutzenindifferenzprämie im Falle eines risikoneutralen Unternehmens, d.h. bei Ansatz der Nutzenfunktion $u(x) = x$?

(c) *[2 Punkte]* Ergibt sich für das risikoneutrale oder das risikoaverse Unternehmen eine höhere Nutzenindifferenzprämie? Interpretieren Sie dieses Ergebnis!

Hinweis: Betrachten Sie die Endvermögenspositionen $v_0 - \pi$ im Falle einer Vollversicherung bzw. $v_0 - S$ im Falle der Nichtversicherung.

Lösungsskizze:

(a) Für Indifferenz muss gelten $\mathbb{E}[u(v_0 - S)] = \mathbb{E}[u(v_0 - \pi)]$. Für $u(x) = \ln(x)$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(v_0 - S)] &= u(1.000) \cdot 0{,}9 + u(900) \cdot 0{,}04 + u(800) \cdot 0{,}04 + u(400) \cdot 0{,}02 \\ &= 6{,}8763.\end{aligned}$$

Es gilt ferner $\mathbb{E}[u(v_0 - \pi)] = u(v_0 - \pi)$. Mithin lautet die Indifferenzgleichung

$$\ln(1.000 - \pi) = 6{,}8763.$$

Hieraus resultiert als Nutzenindifferenzprämie

$$\pi = 1.000 - \exp(6{,}8763) = \underline{30{,}97}.$$

(b) Im Falle $u(x) = x$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(v_0 - S)] &= 1.000 \cdot 0{,}9 + 900 \cdot 0{,}04 + 800 \cdot 0{,}04 + 400 \cdot 0{,}02 \\ &= 976.\end{aligned}$$

Hieraus resultiert die Nutzenindifferenzprämie

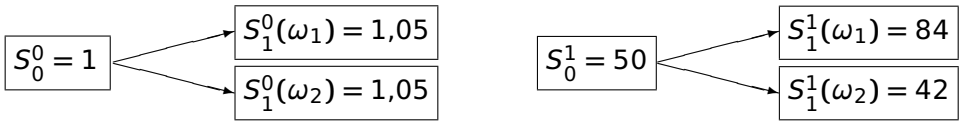
$$\pi = 1.000 - 976 = \underline{24}.$$

(c) Im Falle der Risikoneutralität ist die nutzenindifferente Prämie somit niedriger als im Falle eines risikoaversen Unternehmens. Das risikoaverse Unternehmen ist somit bereit, eine höhere Prämie zu zahlen.

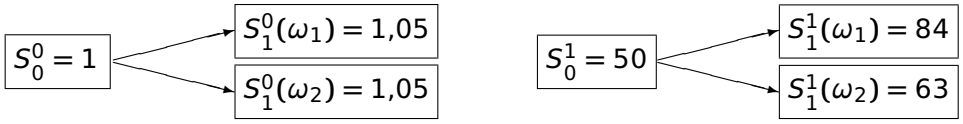
Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

Ihr Finanzvorstand bittet Ihr Team, einperiodige Finanzderivate auf die Aktie des Reisekonzerns „Happy Holiday AG“ zu analysieren. Ihr Team entscheidet sich für die Modellierung in einem statischen Einperiodenmodell mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1). Zur Diskussion stehen dabei drei Finanzmarktmodelle mit folgenden Wertentwicklungen der primären Finanztitel:

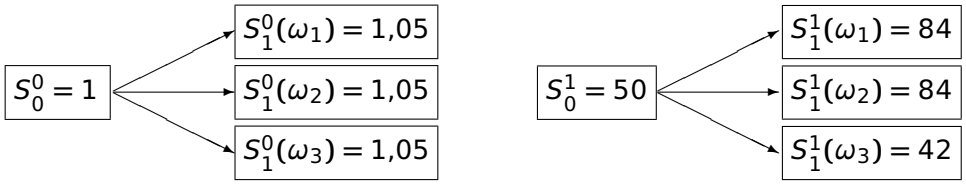
(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$,



(2) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$,



(3) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{3}$, $i \in \{1, 2, 3\}$,



(a) *[11 Punkte]*

(i) *[9 Punkte]* Welche dieser drei Finanzmarktmodelle sind arbitrage-frei (und damit überhaupt geeignet)? Begründen Sie Ihre Antwort! Geben Sie für die arbitrage-freien Modelle alle äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße an. Konstruieren Sie anderenfalls eine Arbitragestrategie.

(ii) *[2 Punkte]* Untersuchen Sie die arbitrage-freien Finanzmarktmodelle hinsichtlich der Vollständigkeit. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(b) *[9 Punkte]* Sie verwenden zunächst das **Finanzmarktmodell (1)**, um eine *Europäische Call-Option* sowie eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie, jeweils mit Fälligkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ und Ausübungspreis 63 €, zu analysieren.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0^{call} der Call-Option zum Zeitpunkt $t = 0$ durch risikoneutrale Bewertung.

(ii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für die Call-Option sowie das in $t = 0$ erforderliche Anfangsinvestment. Was stellen Sie fest?

(iii) *[4 Punkte]* Erläutern Sie inklusive Herleitung die *Put-Call-Parität* und nutzen Sie diese, um den Preis C_0^{put} der Put-Option herzuleiten.

(c) *[5 Punkte]* Bei der *Garantieposition* $C_1^{\mathrm{GP}} := \max\{10 \cdot S_1^1, 630\}$ wird für 10 Aktien zum Zeitpunkt $t = 1$ eine Wertuntergrenze von 630 € garantiert.

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie im **Finanzmarktmodell (3)** die Menge der arbitrage-freien Preise für diese Garantieposition. Ist die Garantieposition mithilfe der primären Produkte „Aktie“ und „Sparbuch“ replizierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) *[1 Punkt]* Erläutern Sie, wie die Garantieposition mithilfe von Call-Optionen und dem Sparbuch repliziert werden kann.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der *1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* besagt, dass ein (einperiodiges) Finanzmarktmodell genau dann arbitrage-frei ist, wenn ein äquivalentes risikoneutrales Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Mit dieser Charakterisierung folgt:

Finanzmarktmodell (1):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines zum Ursprungsmaß $\mathbb{P}$ äquivalenten risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ sind bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 50 = 80q_1 + 40q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$50 = 80q_1 + 40(1 - q_1) = 40q_1 + 40$$

und entsprechend $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$. Das Finanzmarktmodell ist arbitrage-frei.

Finanzmarktmodell (2):

Analog zum Finanzmarktmodell (1) berechnet man die eindeutigen Gewichte $q_1 = -\frac{1}{2}$ und $q_2 = \frac{3}{2}$, die jedoch kein Wahrscheinlichkeitsmaß definieren. Das Modell ist nicht arbitrage-frei.

Bemerkung: Alternativ kann argumentiert werden, dass die Aktie in beiden Szenarien eine höhere Rendite als das Sparbuch liefert und somit systematisch besser ist.

Eine Arbitragestrategie ist der Kauf einer Aktie durch Aufnahme eines Kredits der Höhe 50 in $t = 0$ und Verkauf der Aktie sowie Rückzahlung des Kredits in $t = 1$.

Finanzmarktmodell (3):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes sind bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1)\cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2)\cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3)\cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$50 = 80q_1 + 80q_2 + 40q_3 = 80(1-q_3) + 40q_3 = 80 - 40q_3.$$

Es folgt $q_3 = \frac{3}{4}$, $q_1 + q_2 = \frac{1}{4}$. Jede Aufteilung $q_1(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha$, $q_2(\alpha) = \frac{1}{4}(1-\alpha)$ mit $\alpha \in (0,1)$ definiert ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_\alpha$, das zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist. Das Finanzmarktmodell ist arbitrage-frei.

(ii) Ein arbitrage-freies Finanzmarktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert (*2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung*). Damit ist mit den Erkenntnissen aus Teil (i) das arbitrage-freie Marktmodell (1) vollständig, während das Marktmodell (3) unvollständig ist.

Bemerkung: Alternativ kann argumentiert werden, dass das Marktmodell (1) vollständig ist, da für jeden Contingent Claim eine Replikationsstrategie durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten bestimmt werden kann. Im Marktmodell (3) ist Replikation mit dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen verbunden. Dies ist für bestimmte Contingent Claims nicht möglich; das Marktmodell ist unvollständig.

(b) (i) Das Auszahlungsprofil der Call-Option beträgt zur Fälligkeit

$$C_1^{\text{call}}(\omega) = (S_1^1(\omega) - 63)^+ = \begin{cases} 21 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel ergibt sich der arbitrage-freie Preis

$$C_0^{\text{call}} = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1^{\text{call}}}{S_1^0}\right] = 20q_1 + 0q_2 = 20\cdot\frac{1}{4} = \underline{5}.$$

(ii) Für die Replikationsstrategie ϑ muss gelten

$$C_1^{\text{call}}(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega)\cdot\vartheta^0 + S_1^1(\omega)\cdot\vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05\cdot\vartheta^0 + 84\cdot\vartheta^1 &= 21, \\ 1{,}05\cdot\vartheta^0 + 42\cdot\vartheta^1 &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \frac{1}{2}$, $\vartheta^0 = -20$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von $\frac{1}{2}$ Einheiten der Aktie und der Kreditaufnahme von 20. Das hierfür erforderliche Anfangskapital beträgt

$$V_0^\vartheta = -20 \cdot S_0^0 + \tfrac{1}{2} \cdot S_0^1 = -20 \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 50 = \underline{5}$$

und entspricht dem eindeutigen arbitrage-freien Preis C_0^{call} der Call-Option.

(iii) Auf Ebene der Auszahlungsprofile der Optionen in $t = 1$ gilt für den Ausübungspreis $K = 63$

$$C_1^{\text{call}} - C_1^{\text{put}} = (S_1^1 - K)^+ - (K - S_1^1)^+ = S_1^1 - K.$$

Da das Funktional $f(S_1^1) \mapsto (1{,}05)^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_1^1)]$ der arbitrage-freien Preise zu $t = 0$ linear ist, resultiert hieraus die Put-Call-Parität

$$C_0^{\text{call}} - C_0^{\text{put}} = S_0^1 - (1{,}05)^{-1}K,$$

d. h. die Preise von Aktie, Call- und Put-Option sind abhängig voneinander. Insbesondere folgt für den arbitrage-freien Preis der Put-Option:

$$\begin{aligned} C_0^{\text{put}} &= C_0^{\text{call}} - S_0^1 + (1{,}05)^{-1}K \\ &= 5 - 50 + (1{,}05)^{-1} \cdot 63 = \underline{15}. \end{aligned}$$

(c) (i) Für die Garantieposition

$$C_1^{\text{GP}}(\omega) = \max\{10 \cdot S_1^1(\omega), 630\} = \begin{cases} 840 & \text{für } \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}, \\ 630 & \text{für } \omega = \omega_3, \end{cases}$$

berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, aus (a) einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha}^{\text{GP}} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\tfrac{C_1^{\text{GP}}}{S_1^0}\right] \\ &= \tfrac{1}{1{,}05}\left(C_1^{\text{GP}}(\omega_1) \cdot q_1(\alpha) + C_1^{\text{GP}}(\omega_2) \cdot q_2(\alpha) + C_1^{\text{GP}}(\omega_3) \cdot q_3\right) \\ &= 800 \cdot \tfrac{1}{4}\alpha + 800 \cdot \tfrac{1}{4}(1-\alpha) + 600 \cdot \tfrac{3}{4} \\ &= \underline{650}. \end{aligned}$$

Dieser ist unabhängig von der Wahl des risikoneutralen Maßes, d. h. der eindeutige arbitrage-freie Preis beträgt $C_0^{\text{GP}} = 650$. Insbesondere ist die Garantieposition replizierbar mit C_0^{GP} als Replikationskosten; anderenfalls wäre die Menge der arbitrage-freien Preise ein offenes Intervall (vgl. Dichotomie für arbitrage-freie Preise in unvollständigen Modellen).

(ii) Umformen des Auszahlungsprofils der Garantieposition liefert

$$\begin{aligned} C_1^{\text{GP}} &= \max\{10 \cdot S_1^1, 630\} = \max\{10(S_1^1 - 63), 0\} + 630 \\ &= 10(S_1^1 - 63)^+ + 630 = 10C_1^{\text{call}} + 600 \cdot S_1^0, \end{aligned}$$

d. h. die Garantieposition kann durch den Erwerb von 10 Call-Optionen und die Anlage von 600 € im Sparbuch repliziert werden.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Duration] [32 Punkte]*

Im Folgenden seien $P(t,T)$, $t \leq T$, die Preise von ausfallfreien Nullkuponanleihen mit Fälligkeit in T und normiertem Nennwert 1 € (Einheits-Zerobond).

(a) *[4 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Leiten Sie die Spot Rate $r_t^z(T)$ bei zusammengesetzter Verzinsung in Abhängigkeit von $P(t,T)$ her!

(ii) *[*2 Punkte] Leiten Sie die Spot Rate $r_t^s(T)$ bei stetiger Verzinsung in Abhängigkeit von $P(t,T)$ her!

(b) *[5 Punkte]* Es gelte $t < u < v$. Bestimmen Sie mithilfe der Preise der Nullkuponanleihen die Forward Rate $f_t^z(u,v)$ bei zusammengesetzter Verzinsung auf der Basis des Vergleichs zweier Anlagestrategien und der Annahme arbitragefreier Märkte. Begründen Sie, warum die Eigenschaft der Arbitragefreiheit beim Vergleich der beiden Strategien angewendet werden darf!

(c) *[2 Punkte]* Welcher Zusammenhang besteht bei zusammengesetzter Verzinsung zwischen der Spot Rate $r_t^z(T)$ und den einperiodigen Forward Rates $f_t^z(u,u+1)$? Gehen Sie dabei von $T = t+n$ aus.

(d) *[9 Punkte]* Betrachten Sie eine zweijährige Stufenzinsanleihe, die im ersten Jahr einen Kupon von 2% und im zweiten Jahr einen Kupon von 4% aufweist. Die Kupons sind jeweils am Jahresende fällig. Der Nennwert der Anleihe beträgt 100 €. Das aktuelle Marktzinsniveau ist flach und liegt bei 4% p.a..

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den heutigen Marktpreis der Anleihe.

(ii) *[3 Punkte]* Schätzen Sie die prozentuale Preisveränderung der Anleihe unter Verwendung des *Durationskonzepts* ab. Nehmen Sie an, dass sich das Marktzinsniveau um einen Prozentpunkt reduziert.

(iii) *[4 Punkte]* Verwenden Sie nunmehr *Duration und Konvexität* zur Schätzung der Preisveränderung. Wie groß ist die prozentuale Preisveränderung, wenn sich das Marktzinsniveau um einen Prozentpunkt reduziert?

(e) *[12 Punkte]* Gegeben seien die Zahlungszeitpunkte $t \leq u < v$. Betrachten Sie einen in t abgeschlossenen Forwardkontrakt mit Fälligkeit u auf einen Zerobond mit Nennwert $N = 1$ € und Fälligkeit v. Bestimmen Sie den Wert des Forwardkontrakts in t, d. h. den *Forwardpreis* $F(t;u,v)$,

(i) *[5 Punkte]* zum einen auf der Basis eines (begründeten) *No-Arbitrage-Vergleichs* zweier alternativer Strategien, die in v beide die Auszahlung 1 € liefern,

(ii) *[7 Punkte]* und zum anderen auf Basis einer *risikoneutralen Bewertung* unter Verwendung eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ bezüglich des Numeraires Geldmarktfonds $(K_t)_{t\geq 0}$.

Lösungsskizze:

(a) (i) Es muss gelten (Aufzinsung) $P(t,T)(1+r_t^z(T))^{T-t}=1$. Hieraus folgt

$$r_t^z(T)=\left(\tfrac{1}{P(t,T)}\right)^{\frac{1}{T-t}}-1.$$

(ii) Es muss gelten (Aufzinsung) $P(t,T)\exp(r_t^s(T)(T-t))=1$. Hieraus folgt

$$r_t^s(T)=-\tfrac{\ln P(t,T)}{T-t}.$$

(b) Strategie A:

Investiere in t einen Euro in einen Zerobond mit Maturität v. Die Anzahl der in t erworbenen Einheiten beträgt $1/P(t,v)$, dies ist zugleich die Auszahlung in v.

Strategie B:

Investiere in t einen Euro in einen Zerobond mit Maturität u; analog: die Zahlung in u beträgt $1/P(t,u)$. Lege nun diesen Betrag zum gesuchten Terminzins bis v an. Die Auszahlung in v beträgt dann $P(t,u)^{-1}(1+f_t^z(u,v))^{v-u}$.

Bei beiden Strategien wird in t ein Euro investiert. Die Auszahlungen in v sind sicher, da die Größen $P(t,v)$, $P(t,u)$ und $f_t(u,v)$ zum Zeitpunkt t bekannt sind. Bei Arbitragefreiheit muss also gelten

$$P(t,u)^{-1}(1+f_t^z(u,v))^{v-u}=P(t,v)^{-1}$$

und somit

$$f_t(u,v)=(P(t,u)/P(t,v))^{\frac{1}{v-u}}-1.$$

(c) Es muss gelten

$$\begin{aligned}(1+r_t^z(T))^{T-t} &= \prod_{k=0}^{n-1}(1+f_t^z(t+k,t+k+1))\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+f_t^z(t+k-1,t+k)).\end{aligned}$$

(d) Es sei $P(r)$ der Marktpreis der Stufenzinsanleihe in $t=0$ bezogen auf den flachen Zins r. Dann gilt:

$$\begin{aligned}P(r) &= 2(1+r)^{-1}+104(1+r)^{-2},\\ P'(r) &= -2(1+r)^{-2}-208(1+r)^{-3},\\ P''(r) &= 4(1+r)^{-3}+624(1+r)^{-4}.\end{aligned}$$

(i) Es gilt $P(0{,}04) = \underline{98{,}08}$.

(ii) Für die modifizierte Duration gilt

$$\mathrm{DUR}^M(0{,}04) = -\frac{P'(0{,}04)}{P(0{,}04)} = \frac{186{,}76}{98{,}08} = 1{,}90$$

und entsprechend

$$\frac{\Delta P}{P}(r) \approx -\mathrm{DUR}^M(0{,}04)(\text{-}0{,}01) = \underline{0{,}0190}.$$

Die approximative Wertsteigerung beträgt 1,9 %.

(iii) Die (relative) Konvexität ist gegeben durch

$$\mathrm{CONV}(0{,}04) = \frac{P''(0{,}04)}{P(0{,}04)} = \frac{536{,}95}{98{,}08} = 5{,}47.$$

Dies liefert unter Berücksichtigung der Konvexität

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P}(r) &\approx -\mathrm{DUR}^M(0{,}04)(-0{,}01) + \frac{1}{2}\mathrm{CONV}(0{,}04)(-0{,}01)^2 \\ &= 0{,}0190 + 0{,}0003 = \underline{0{,}0193}. \end{aligned}$$

d. h. eine approximative Wertsteigerung in Höhe von 1,93 %.

(e) (i) Strategie 1: Erwerb des v-Bonds in t zu $P(t, v)$ auf Kredit mit Rückzahlung des Kredits in u. Der Kapitaleinsatz in t beträgt null.

Wert in u: $P(u, v) - P(t, v) \cdot \frac{1}{P(t,u)}$.

Strategie 2: Erwerb des v-Bonds in t durch Abschluss des Forwardkontrakts mit Zahlung des in t vereinbarten Forward-Preises $F(t; u, v)$ in u. Der Kapitaleinsatz in t beträgt wiederum null.

Wert in u: $P(u, v) - F(t; u, v)$.

Beide Strategien erfordern keinen anfänglichen Kapitaleinsatz und führen zum Besitz des v-Bonds in u. Unter No Arbitrage-Gesichtspunkten müssen sie damit wertmäßig identisch sein.

Folgerung:

$$P(u, v) - \frac{P(t, v)}{P(t, u)} = P(u, v) - F(t; u, v)$$

und damit

$$F(t; u, v) = \frac{P(t, v)}{P(t, u)}.$$

(ii) Der Wert der Position in t gemäß risikoneutraler Bewertung lautet:

$$K_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(u,v) - F(t;u,v)}{K_u}\middle|\mathcal{F}_t\right] = K_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(u,v)}{K_u}\middle|\mathcal{F}_t\right] - F(t;u,v) K_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{K_u}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Der erste Term des letzten Ausdrucks ist gerade der Wert des v-Bonds in t, mithin $P(t, v)$. Der zweite Term entspricht gerade $F(t; u, v)P(t, u)$.

Damit lautet der Wert der Position in t nunmehr

$$P(t,v) - F(t;u,v)P(t,u).$$

Dieser Wert muss null betragen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$F(t;u,v) = \frac{P(t,v)}{P(t,u)}.$$

Aufgabe 5. *[Bewertung von Aktienderivaten: Binomialmodell] [25 Punkte]*

Die Aktien des Chip-Herstellers „Power Chip AG“ werden heute zum Kurs von 100 € pro Stück gehandelt. Zur Analyse von Aktienderivaten modellieren Sie den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t=0,1,\dots}$ des Chip-Herstellers durch ein mehrperiodiges Binomialmodell, in dem für die Aktie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 40% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 10% mit positiven Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden. Der einperiodige Zinssatz auf dem Sparbuch (Startwert per Konvention: 1 €) für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 5\%$.

(a) *[20 Punkte]* Im Markt werden auf die Aktie jeweils mit Fälligkeit in $t = 2$ eine *Europäische Call-Option* mit Ausübungspreis 120 € sowie eine *Europäische Put-Option* mit Ausübungspreis 140 € gehandelt.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ für alle Szenarien die Auszahlungen C_2^{call} der Call-Option sowie C_2^{put} der Put-Option an.

(ii) *[4 Punkte]* Überprüfen Sie, dass das vorliegende zweiperiodige Binomialmodell arbitrage-frei ist, und geben Sie ggf. das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ explizit an. Berechnen Sie durch *risikoneutrale Bewertung* den arbitrage-freien Preis der Call-Option in $t = 0$.

(iii) *[9 Punkte]* Berechnen Sie beginnend in $t = 0$ die *Replikationsstrategie* für die Put-Option. Geben Sie in jedem Knoten die Kosten der perfekten Replikation an.

(iv) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie für die Finanzposition C_2 mit Fälligkeit in $t = 2$, die aus 100 dieser Put-Optionen sowie einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in $t = 2$ und Nennwert 100.000 € besteht, die Replikationsstrategie durch die primären Produkte Aktie und Sparbuch in allen Knoten sowie den arbitrage-freien Preis in $t = 0$.

Hinweis: Sie können mithilfe der Ergebnisse aus (iii) argumentieren.

(b) *[5 Punkte]* Bei einer *(Floating Strike) Lookback Put-Option* mit Maturität $T > 0$ auf die Aktie mit diskretem Preisprozess $(S_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ist das Auszahlungsprofil

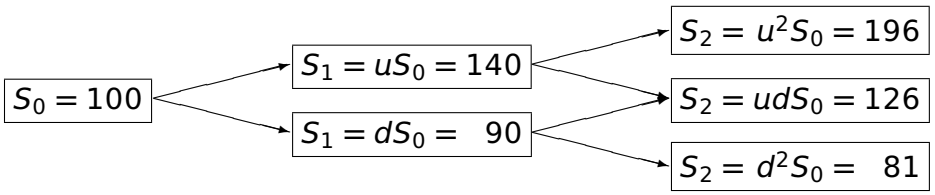
$$C_T^{\text{put,max}} := \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T$$

abhängig vom pfadweisen Maximum des Aktienpreisprozesses. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots$ aus einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ generieren können.

Beschreiben Sie unter Angabe entsprechender Formeln, wie Sie im Kontext des mehrperiodigen Binomialmodells die Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* implementieren können.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit „Down"-Faktor $d = 0{,}9$ und „Up"-Faktor $u = 1{,}4$ ist der Kursverlauf S_0, S_1, S_2 der Aktie gegeben durch:



Hieraus sind die terminalen Auszahlungen der Optionen für alle vier Szenarien $\omega \in \Omega = \{(u,u),(u,d),(d,u),(d,d)\}$ ablesbar:

$$C_2^{\text{call}}(\omega) = (S_2(\omega) - 120)^+ = \begin{cases} 76 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 6 & \text{für } \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 0 & \text{für } \omega = (d,d), \end{cases}$$

$$C_2^{\text{put}}(\omega) = (140 - S_2(\omega))^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 14 & \text{für } \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 59 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

(ii) „Down"-Faktor $d = 0{,}9$, „Up"-Faktor $u = 1{,}4$ und Zins $r = 0{,}05$ erfüllen die Bedingung $d < 1 + r < u$. Dies sichert die Existenz (genau) eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ und damit insbesondere die Arbitragefreiheit des vorliegenden Binomialmodells.

Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ sind gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = 0{,}3$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = 0{,}7$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt $\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1-q)^{2-N(\omega)} q^{N(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $N(\omega)$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet, d. h.

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = \begin{cases} 0{,}09 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 0{,}49 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

Mit diesen Gewichten des Martingalmaßes liefert die risikoneutrale Bewertungsformel den arbitragen-freien Preis

$$\begin{aligned} C_0^{\text{call}} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{C_2^{\text{call}}}{S_2^0}\right] \\ &= \tfrac{1}{(1{,}05)^2}\left(76 \cdot \mathbb{Q}[\{(u,u)\}] + 6 \cdot \mathbb{Q}[\{(u,d)\}] + 6 \cdot \mathbb{Q}[\{(d,u)\}]\right) \\ &= \tfrac{1}{(1{,}05)^2}\left(76 \cdot 0{,}09 + 6 \cdot 0{,}21 + 6 \cdot 0{,}21\right) = \underline{8{,}4898}. \end{aligned}$$

(iii) Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1{,}05; 1{,}1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u, \cdot)}$:

$$\begin{aligned} 196x + 1{,}1025y &= 0 \\ 126x + 1{,}1025y &= 14 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}2000}$, $y = \underline{35{,}5556}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((u, \cdot)) = 140x + 1{,}05y = \underline{9{,}3334}.$$

$\underline{t = 1, \omega = (d, \cdot)}$:

$$\begin{aligned} 126x + 1{,}1025y &= 14 \\ 81x + 1{,}1025y &= 59 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-1{,}0000}$, $y = \underline{126{,}9841}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((d, \cdot)) = 90x + 1{,}05y = \underline{43{,}3333}.$$

$\underline{t = 0}$:

$$\begin{aligned} 140x + 1{,}05y &= 9{,}3334 \\ 90x + 1{,}05y &= 43{,}3333 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}6800}$, $y = \underline{99{,}5556}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_0 = 100x + y = \underline{31{,}5556}.$$

Man beachte für (iv), dass die Kosten der perfekten Replikation dem arbitragefreien Preis entsprechen.

(iv) Die Finanzposition liefert in $t = 2$ die Auszahlung

$$C_2 = 100 \cdot C_2^{\text{put}} + 100.000.$$

Zur Replikation der deterministischen Auszahlung in Höhe von 100.000 €, die im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt, genügt es, in $t = 0$ den Barwert

$$100.000 \cdot (1{,}05)^{-2} = 90.702{,}9478\ €$$

in das Sparbuch zu investieren, also 90.702,9478 Einheiten des Sparbuchs zu erwerben, und diese bis $t = 2$ zu halten („buy-and-hold“). Insofern sind für die Berechnung der Replikationsstrategie der Finanzposition C_2 die Einheiten von Aktie und Sparbuch, die zur Replikation einer Put-Option verwendet werden, jeweils mit 100 zu multiplizieren und im Fall des Sparbuchs um 90.702,9478 Einheiten zu erhöhen.

		$t=0$	$t=1, \omega=(u,\cdot)$	$t=1, \omega=(d,\cdot)$
Put-	Einheiten Aktie	-0,6800	-0,2000	-1,0000
Option	Einheiten Sparbuch	99,5556	35,5556	126,9841
Finanz-	Einheiten Aktie	-68,0000	-20,0000	-100,0000
position	Einheiten Sparbuch	100.658,5078	94.258,5078	103.401,3578

Für den Preis der Finanzposition gilt

$$C_0 = 100 \cdot C_0^{\text{put}} + 100.000 \cdot 1{,}05^{-2} = \underline{93.858,5078}.$$

Hinweis: Die Replikationsstrategie kann alternativ auch analog zu (a)(iii) ermittelt werden.

(b) Der arbitrage-freie Preis der Lookback Put-Option in $t=0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T^{\text{put,max}}}{S_T^0}\right] = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{0\le t\le T} S_t - S_T\right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten Pfaden $\{s_0(j), s_1(j), \ldots, s_T(j)\}$, $j=1,\ldots,n$, des Aktienpreisprozesses $\{S_0, S_1, \ldots, S_T\}$ approximiert werden:

$$C_0 = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{0\le t\le T} S_t - S_T\right] \approx (1+r)^{-T}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\max_{0\le t\le T} s_t(j) - s_T(j)\right).$$

Grundlage dieser Monte-Carlo-Approximation ist das starke Gesetz der großen Zahlen, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Der Aktienpreisprozess besitzt die Form

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k, \quad t=0,1,\ldots,T,$$

wobei die Zufallsvariablen $Y_1,\ldots,Y_T$ unter $\mathbb{Q}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{Q}[Y_k=u]=q$ und $\mathbb{Q}[Y_k=d]=1-q$ sind. Basierend auf unabhängigen Zufallszahlen $u_1(j),\ldots,u_T(j)$, $j=1,\ldots,n$, aus einer stetigen Gleichverteilung auf $[0,1]$ können nun Pfade wie folgt simuliert werden.

- Setze $y_k(j)=u$, falls $u_k(j)\le q$, und $y_k(j)=d$, falls $u_k(j)>q$.
- Erzeuge Pfade $j=1,\ldots,n$ des Aktienpreisprozesses durch

$$s_t(j) = S_0 \prod_{k=1}^{t} y_k(j), \quad t=0,1,\ldots,T.$$

Aufgabe 6. *[Value at Risk, Average Value at Risk und SCR] [25 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Betrachten Sie die zwei Finanzpositionen X_1 und X_2 mit wie folgt spezifizierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen (W.=Wahrscheinlichkeit):

$$X_1 = \begin{cases} 5.000 & \text{mit W. } 0{,}930 \\ -3.000 & \text{mit W. } 0{,}060 \\ -9.000 & \text{mit W. } 0{,}010 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 5.000 & \text{mit W. } 0{,}930 \\ -3.000 & \text{mit W. } 0{,}060 \\ -9.000 & \text{mit W. } 0{,}008 \\ -20.000 & \text{mit W. } 0{,}002 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beide Finanzpositionen den *Value at Risk* (V@R) sowie den *Tail Value at Risk* (TV@R) zum Niveau $\lambda = 0{,}01$. Kommentieren Sie Ihre Berechnungsergebnisse!

(b) *[18 Punkte]* Die *Solvabilitätskapitalanforderung* (SCR) unter Solvency II wird durch den *Mean Value at Risk* $\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0{,}005}(E_1 - \mathbb{E}[E_1])$ zum Niveau 0,005 der Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont definiert.

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ und die Dichte φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi^{-1}(0{,}005) = \text{-}2{,}5758$, $\Phi^{-1}(0{,}01) = \text{-}2{,}3263$, $\varphi(\text{-}2{,}3263) = 0{,}0267$.

(i) *[2 Punkte]* Benennen Sie, welche beiden Kritikpunkte des V@R sich im Allgemeinen auf das SCR vererben.

(ii) *[3 Punkte]* Leiten Sie für eine normalverteilte Finanzposition X explizite Berechnungsformeln für $\mathrm{V@R}_{0{,}005}(X)$ sowie $\mathrm{SCR}(X)$ her.

(iii) *[5 Punkte]* Gegeben seien zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen X, Y mit Korrelation ρ.

Zeigen Sie mithilfe von (ii), dass in diesem Fall die Anwendung der Wurzelformel zur Risikoaggregation mathematisch korrekt auf das SCR der Position $X + Y$ führt und sich das SCR subadditiv verhält. Wie beurteilen Sie allgemein die Anwendbarkeit der Wurzelformel zur Risikoaggregation?

(iv) *[5 Punkte]* Im einem Bericht finden Sie für eine Finanzposition Z Angaben zum Value at Risk zum Niveau 0,005 sowie zum SCR:

$$\mathrm{V@R}_{0{,}005}(Z) = 4.581.920, \quad \mathrm{SCR}(Z) = 6.181.920.$$

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass Z normalverteilt ist, den *Average Value at Risk* (AV@R) von Z zum Niveau 0,01.

Hinweis: Für $Z \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[Z], \sigma^2(Z))$ gilt $\mathrm{AV@R}_\lambda(Z) = -\mathbb{E}[Z] + \frac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(Z)$.

(v) *[3 Punkte]* Ihre Versicherung hält ein Teilportfolio, das aus 4.000 Aktien der „Easy Fly AG“, 5 ausfallfreien Nullkuponanleihen (Nennwert pro Anleihe: 100.000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) der „Sunshine AG“ sowie einer Anlage von

90.000 € auf einem Sparbuch mit Zinssatz 0,1% p. a. besteht. Der aktuelle Preis pro Aktie beträgt $S_0 = 30$ € und statistische Analysen deuten darauf hin, dass die jährliche Log-Rendite R normalverteilt mit Erwartungswert 5% und Standardabweichung 8% ist.

Berechnen Sie für dieses Teilportfolio das SCR.

Hinweis: Es gilt $\mathbb{E}[\exp(R)] = 1{,}0546$.

Lösungsskizze:

(a)

- Aus der Definition $\mathrm{V@R}_{0,01}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq 0{,}01\}$ lässt sich unmittelbar ablesen:

$$\mathrm{V@R}_{0,01}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,01}(X_2) = \underline{3.000}.$$

- Der Tail Value at Risk zum Niveau 0,01 ist definiert durch den bedingten Erwartungswert

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X) = \mathbb{E}[-X | -X > \mathrm{V@R}_{0,01}(X)].$$

Dieser berechnet sich für die diskreten Zufallsvariablen X_k, $k = 1, 2$, via

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_k) = \frac{1}{\mathbb{P}[-X_k > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)]} \sum_{i=1,\dots,n, -x_i > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)} -x_i \mathbb{P}[X_k = x_i]$$

mit den Realisierungen $\{x_1, x_2, x_3\} = \{5.000, -3.000, -9.000\}$ für X_1 sowie $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{5.000, -3.000, -9.000, -20.000\}$ für X_2.

Für X_1 erfüllt nur $x_3 = -9.000$ die Bedingung $-x_3 > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_1)$, und entsprechend gilt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) = \tfrac{1}{0,01}(9.000 \cdot 0{,}01) = \underline{9.000}.$$

Für X_2 sind $x_3 = -9.000$ und $x_4 = -20.000$ zu berücksichtigen, und es folgt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = \tfrac{1}{0,01}(9.000 \cdot 0{,}008 + 20.000 \cdot 0{,}002) = \underline{11.200}.$$

- *Kommentierung:* Trotz identischem V@R ist die Finanzposition X_2 offensichtlich gefährlicher als X_1. Der Value at Risk berücksichtigt nur die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Verlusten über einer kritischen Grenze, nicht aber die potentiellen Höhen der Verluste, die diese kritische Grenze übersteigen.

  Der TV@R misst dagegen die erwartete Höhe der Verluste, die den V@R übersteigen. Der gefährlicheren Finanzposition X_2 wird auch das höhere Risiko zugeordnet:

$$9.000 = \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) < \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = 11.200.$$

(b) (i) Der Value at Risk hat zwei wesentliche Kritikpunkte:

(A) Extreme Verluste, die nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, werden vom V@R völlig ausgeblendet. Unternehmen, die Risiken ausschließlich auf Basis von V@R messen, können folglich keine adäquaten Strategien für den Umgang mit Extremereignissen entwickeln.

(B) Das Risikomaß V@R ist im Allgemeinen nicht subadditiv. Daher kann V@R ökonomisch sinnvolle Diversifikation bestrafen.

(ii) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0,005$ bestimmt durch $\lambda = \mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0]$. Hierbei gilt

$$\mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = \mathbb{P}\left[\tfrac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X). \tag{1}$$

Insbesondere folgt (z. B. mit der Cash-Invarianz des Value at Risk)

$$\mathrm{SCR}(X) = \mathrm{V@R}_{0,005}(X) + \mathbb{E}[X] = -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X). \tag{2}$$

(iii) Da X, Y gemeinsam normalverteilt sind, ist auch die aggregierte Position $X + Y$ normalverteilt, d. h. die SCRs aller Finanzpositionen entsprechen nach Teilaufgabe (ii) bis auf den positiven Faktor $-\Phi^{-1}(0,005)$ der Standardabweichung. Nach elementarer Stochastik gilt (unabhängig von den Verteilungen)

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Dies impliziert nach Multiplikation mit $-\Phi^{-1}(0,005)$ erstens

$$\mathrm{SCR}(X+Y) = \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

d. h. die Aggregation des Risikokapitals per Wurzelformel ist im Normalverteilungskontext mathematisch korrekt. Zweitens folgt

$$\mathrm{SCR}(X+Y) \leq \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)} = \mathrm{SCR}(X) + \mathrm{SCR}(Y),$$

d. h. das SCR ist im Normalverteilungskontext auch subadditiv.

Die Wurzelformel liefert eine mathematisch korrekte Aggregation für gemeinsam normalverteilte Risiken (bzw. allgemeiner elliptische Verteilungen). Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken (speziell: schiefe Verteilungen, heavy tails) oder Abhängigkeiten (speziell: Tailabhängigkeiten) ist die Wurzelformel nicht allgemeingültig.

(iv) Mithilfe von (1) und (2) können aus dem gegebenen Zahlenwerk der Erwartungswert und die Standardabweichung von Z rekonstruiert werden:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathrm{SCR}(Z) - \mathrm{V@R}_{0,005}(Z) = 1.600.000, \sigma(Z) = -\frac{\mathrm{SCR}(Z)}{\Phi^{-1}(0,005)} = 2.400.000.$$

Entsprechend folgt mit der AV@R-Formel aus dem Hinweis

$$\mathrm{AV@R}_{0,01} = -1.600.000 + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0,01))}{0,01} \cdot 2.400.000 = \underline{4.808.000}.$$

(v) Für den zentrierten Portfoliowert gilt

$$V_1 - \mathbb{E}[V_1] = 4.000 \cdot S_0(\exp(R) - \mathbb{E}[\exp(R)]) = 120.000\exp(R) - 126.552,$$

wobei der Zufall nur durch die zufällige Rendite $R \sim \mathcal{N}(0{,}05; (0{,}08)^2)$ getrieben wird. Insbesondere sind die deterministischen Portfoliokomponenten (Nullkuponanleihe und Sparbuch) nicht relevant.

Mit $q_{0,005}$ als Notation für das Quantil einer Zufallsvariable zum Niveau 0,005 und den Rechenregeln der Quantiltransformation folgt somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}(V_1) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(V_1 - \mathbb{E}[V_1]) \\
&= -q_{0,005}(V_1 - \mathbb{E}[V_1]) \\
&= -q_{0,005}(120.000\exp(R) - 126.552) \\
&= -(120.000\exp(q_{0,005}(R)) - 126.552) \\
&= -120.000\exp(0{,}05 + 0{,}08\Phi^{-1}(0{,}005)) + 126.552 \\
&= \underline{23.891{,}4676}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. *[Axiomatische Theorie der Risikomaße und Anwendungen] [15 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Es sei ρ ein *monetäres Risikomaß* auf einer Menge von Finanzpositionen $\mathcal{X}$ (mathematisch: Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$).

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie *formal* die beiden Eigenschaften an, die ein monetäres Risikomaß definieren. Interpretieren Sie diese jeweils ökonomisch.

(ii) *[3 Punkte]* Zeigen Sie *formal*, dass das Risikomaß ρ aus seiner Akzeptanzmenge $\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$ rekonstruiert werden kann. Interpretieren Sie die Rekonstruktionsformel ökonomisch.

(iii) *[2 Punkte]* Definieren Sie den Begriff eines *konvexen Risikomaßes*. Erläutern Sie *kurz*, welche wichtige ökonomische Eigenschaft konvexe Risikomaße abdecken.

(iv) *[2 Punkte]* Formulieren Sie ausgehend von der „robusten Darstellung“ ein allgemeines Konstruktionsprinzip für konvexe Risikomaße. Interpretieren Sie anhand der Konstruktionsformel, wie ein konvexes Risikomaß Risiken quantifiziert.

(b) *[5 Punkte]* Angenommen, eine Versicherungsgruppe mit Risikobudget B (Obergrenze für das Risikokapital) besteht aus n Tochtergesellschaften, die Versicherungsgeschäft betreiben. Die Basiseigenmittel der Tochtergesellschaften im Einjahreshorizont seien gegeben durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die konsolidierten Basiseigenmittel der Gruppe durch $X = X_1 + \ldots + X_n$.

Erläutern Sie, wie der Vorstand der Gruppe ein *Limit- und Schwellenwertsystem* für die Tochtergesellschaften etablieren kann, sodass bei einer Risikomessung mit einem *subadditiven Risikomaß* ρ das Risikobudget der Gruppe eingehalten wird. Welche Probleme können in der Praxis resultieren, wenn die Risikomessung hingegen mit dem Value at Risk erfolgt?

Lösungsskizze:

(a) (i) Ein Funktional $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, falls:

(1) *Inverse Monotonie:* Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

(2) *Cash-Invarianz:* Für jede reelle Zahl m gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Eigenschaft (1) besagt, dass die Risikokennziffer für eine Position Y kleiner als die Risikokennziffer einer Position X ist, wenn Y stets mindestens so viel wert ist wie X. Eigenschaft (2) bedeutet, dass Risikomaße auf einer monetären Skala messen: Wird zur Finanzposition X das Kapital m € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X + m$ um diesen Betrag.

(ii) Das Risikomaß ρ kann aus der Akzeptanzmenge via

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} \tag{3}$$

rekonstruiert werden, da aufgrund der Cash-Invarianz gilt:

$$X + m \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X + m) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X) - m \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X) \leq m.$$

Formel (3) erlaubt, monetäre Risikomaße mit Kapitalanforderungen zu assoziieren: $\rho(X)$ ist das kleinste Kapital, das zur Finanzposition X hinzugefügt werden muss, sodass X akzeptabel wird.

(iii) Ein monetäres Risikomaß ρ auf $\mathcal{X}$ heißt konvexes Risikomaß, falls es die Eigenschaft

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \max\{\rho(X), \rho(Y)\} \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1)$$

besitzt und damit ein konvexes Funktional ist:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1).$$

Die Eigenschaft der Konvexität bedeutet, dass ein Risikomaß ökonomisch sinnvolle Diversifikation nicht bestraft.

Hinweis: Es genügt, eine der Formeln anzugeben.

(iv) Mithilfe einer Teilmenge $\mathcal{Q}$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und einer Straffunktion $\alpha : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ kann ein konvexes Risikomaß auf $\mathcal{X}$ durch die „robuste Darstellung“ definiert werden:

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}.$$

Die Maße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ repräsentieren mögliche probabilistische Modelle, die entsprechend der Straffunktion α mehr oder weniger stark gewichtet werden. Die Kapitalanforderung $\rho(X)$ wird als „worst-case“ des pönalisierten erwarteten Verlustes $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$ über alle Modelle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ berechnet.

(b) Anstatt auf Ebene der Tochtergesellschaften Mikromanagement zu betreiben, kann der Vorstand der Gruppe den Tochtergesellschaften auch individuelle Risikobudgets $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_1 + \ldots + B_n = B$ zuweisen, d. h. die Tochtergesellschaften können das Geschäft autark steuern und müssen nur sicher stellen, dass für das individuelle Risiko $\rho(X_i) \leq B_i$ gilt.

Gilt nun $\rho(X_i) \leq B_i$, $i = 1, \ldots, n$, so impliziert die Subadditivität von ρ

$$\rho(X) \leq \rho(X_1) + \ldots + \rho(X_n) \leq B_1 + \ldots + B_n = B.$$

Ist das Risikomaß hingegen wie der Value at Risk nicht subadditiv, so kann das Risikobudget B der Gruppe überschritten werden, obwohl die Tochtergesellschaften die individuellen Risikobudgets B_i eingehalten haben. Ein dezentrale Steuerung im Kontext interner Modelle mit dem Value at Risk bzw. dem daraus abgeleiteten SCR ist insofern nur bedingt sinnvoll.

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [16 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2, wobei $\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = 0$.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie zunächst die Größe x_{MVP}, wobei $(x_{\mathrm{MVP}}, 1 - x_{\mathrm{MVP}})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios aus beiden Aktien bezeichnen!

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie nun die Größe x_{OPT}, wobei $(x_{\mathrm{OPT}}, 1 - x_{\mathrm{OPT}})$ die Investmentgewichte des nutzenoptimalen Portfolios bezeichnen! Gehen Sie dabei davon aus, dass der Investor für Renditen die Präferenzfunktion $U(R) = \mathbb{E}[R] - 3\mathrm{Var}(R)$ besitzt.

(iii) *[1 Punkt]* Bestimmen Sie die Differenz $x_{\mathrm{OPT}} - x_{\mathrm{MVP}}$!

(b) *[5 Punkte]* Gegeben sei nun ein Portfolio aus zwei Aktien, deren Renditen R_1 und R_2 perfekt positiv korreliert sind, d. h. für den Korrelationskoeffizienten gilt $\rho = 1$. Es sei weiterhin $\mathbb{E}[R_1] = \mu_1$, $\mathbb{E}[R_2] = \mu_2$, $\sigma(R_1) = \sigma_1$ und $\sigma(R_2) = \sigma_2$. Unterstellen Sie, dass $\mu_1 < \mu_2$ und $\sigma_1 < \sigma_2$ gilt. Leerverkäufe bei der Portfoliobildung sind erlaubt.

(i) *[4 Punkte]* Welche Investmentgewichte weist das global varianzminimale Portfolio in diesem Fall auf? Sind Leerverkäufe erforderlich?

Hinweis: Im Fall, dass Leerverkäufe zulässig sind, kann in der vorliegenden Konstellation eine Portfoliovarianz in Höhe von null erreicht werden.

(ii) *[1 Punkt]* Es existiere nun eine Anlage mit einer sicheren Verzinsung in Höhe von r_0. Welche Rendite weist dann das varianzminimale Portfolio aus Aufgabenteil (i) auf? Begründen Sie Ihre Aussage!

(c) *[3 Punkte]* Gegeben seien drei Aktien A, B und C. Man fixiere den Erwartungswert der Portfoliorendite R_P, d. h. es gilt $\mathbb{E}[R_P] = r$. Auf der Basis einer Lagrange-Optimierung ergeben sich die folgenden Investmentgewichte des korrespondierenden (lokal) varianzminimalen Portfolios:

$$x_A = \tfrac{2}{3},\ x_B = \tfrac{5}{3} - 5r,\ x_C = 5r - \tfrac{1}{3}.$$

Für welche Werte von r ist der Ausschluss von Leerverkäufen („No Short Sales“) gewährleistet?

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $R = xR_1 + (1-x)R_2$ und $\sigma_i^2 := \mathrm{Var}(R_i)$, $i = 1, 2$, gilt

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}(R) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2.$$

Entsprechend lautet die Bedingung erster Ordnung für das varianzminimale Portfolio

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 = 2x(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - 2\sigma_2^2$$

und damit folgt

$$x_{\text{MVP}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

(ii) Mit $R = xR_1 + (1-x)R_2$ und $\mu_i := \mathbb{E}[R_i]$ sowie $\sigma_i^2 := \text{Vαr}(R_i)$, $i = 1, 2$, gilt

$$U(R) = \mathbb{E}[R] - 3\text{Vαr}(R) = (\mu_1-\mu_2)x + \mu_2 - 3[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2]$$

Hieraus folgt

$$0 = \frac{dU(R)}{dx} = (\mu_1-\mu_2) - 3[2x(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - 2\sigma_2^2]$$

und damit insgesamt

$$x_{\text{OPT}} = \frac{\frac{1}{6}(\mu_1-\mu_2) + \sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

(iii) $x_{\text{OPT}} - x_{\text{MVP}} = \frac{\mu_1-\mu_2}{6(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$

(b) (i) Die Portfoliovarianz σ_P^2 lautet im Falle $\rho = 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= x\sigma_1^2 + (1-x)\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \\ &= (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2.\end{aligned}$$

Nach Hinweis ist die varianzminimale Position gegeben durch $\sigma_P^2 = 0$. Hieraus folgt

$$x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 = 0$$

und somit

$$x = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1},\ 1-x = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} < 0.$$

Fazit: Die Aktie 2 ist leer zu verkaufen.

Alternativ: Bestimmung des varianzminimalen Portfolios über

$$0 = \frac{d\sigma_P^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2(1-2x)\sigma_1\sigma_2,$$

d. h.

$$x = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}.$$

(ii) Das varianzminimale Portfolio aus (i) weist eine Renditevarianz von null auf. Damit ist das varianzminimale Portfolio eine sichere Anlage. Dessen Rendite muss der sicheren Verzinsung r_0 entsprechen, denn aus Gründen der Arbitragefreiheit (*Law of One Price*) ist die sichere Verzinsung eine eindeutig bestimmte Größe.

(c) Es muss gelten $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$ sowie $x_C \geq 0$.

Für x_A ist dies erfüllt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} x_B \geq 0 &\iff r \leq \tfrac{1}{3}, \\ x_C \geq 0 &\iff r \geq \tfrac{1}{15}. \end{aligned}$$

Damit ist die Nichtnegativitätsbedingung für $\frac{1}{15} \leq r \leq \frac{1}{3}$ gewährleistet.

Aufgabe 9. *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [14 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Der effiziente Rand einer Menge von vorgegebenen riskanten Anlagen ist gegeben durch ($a > 0$, $\sigma \geq \sigma_{\text{MVP}}$)

$$\mu = \mu_{\text{MVP}} + \sqrt{a(\sigma^2 - \sigma^2_{\text{MVP}})}.$$

Dem Investor steht zusätzlich eine risikolose Anlage zum Zins r_0 zur Verfügung. Das resultierende Tangentialportfolio besitze die Koordinaten (σ_T, μ_T) im (σ, μ)-Raum. Der Investor möchte nun ein effizientes Portfolio P mit $\mathbb{E}[R_P] = \mu_0$ realisieren

(i) *[1 Punkt]* Welche grundsätzliche Struktur muss dieses Portfolio besitzen?

(ii) *[4 Punkte]* Welche Investmentgewichte für P ergeben sich aus (i)?

(b) *[6 Punkte]* Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die Koordinaten des effizienten Rands:

$$\mu = \tfrac{1}{5} + \sqrt{\tfrac{1}{20}(\sigma^2 - \tfrac{1}{15})}.$$

Unter Berücksichtigung der Präferenzen des Investors ergibt sich des Weiteren als optimales Portfolio das Portfolio mit den (σ, μ)-Koordinaten $(0{,}4; 0{,}15)$.

Gehen Sie nun davon aus, dass zusätzlich ein risikoloses Investment existiert. Wie hoch muss der zugehörige risikolose Zins sein, damit das zuvor ermittelte Portfolio unverändert das optimale Portfolio ist?

(c) *[3 Punkte]* Gegeben sei die Regressionsbeziehung

$$R = \gamma + \delta R_I + U,$$

wobei R die Rendite einer Einzelaktie, R_I die Rendite eines repräsentativen Aktienindex und U die residuale Größe bezeichnen. Es gelte

$$\text{Cov}(R_I, U) = 0.$$

Weisen Sie nach, dass

$$\delta = \frac{\text{Cov}(R, R_I)}{\text{Var}(R_I)}$$

gilt!

Lösungsskizze:

(a) (i) Bezeichnet R_T die Rendite des Tangentialportfolios T, so muss gelten

$$R_P = x r_0 + (1 - x) R_T.$$

(ii) Hieraus ergibt sich auf Ebene der Erwartungswerte

$$\mathbb{E}[R_P] = xr_0 + (1-x)\mathbb{E}[R_T]$$

bzw.

$$\mu_P = xr_0 + (1-x)\mu_T = x(r_0 - \mu_T) + \mu_T.$$

Aus der Bedingung $\mu_P = \mu_0$ folgt

$$x(r_0 - \mu_T) + \mu_T = \mu_0$$

und damit insgesamt

$$x = \frac{\mu_0 - \mu_T}{r_0 - \mu_T} = \frac{\mu_T - \mu_0}{\mu_T - r_0}$$

sowie

$$1 - x = \frac{\mu_0 - r_0}{\mu_T - r_0}.$$

(b) Die Effizienzgerade bei Berücksichtigung einer risikolosen Anlage zum Zins r_0 ist gegeben durch die Tangente von $(0, r_0)$ an den bisherigen effizienten Rand. Die entsprechende Steigung lautet

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \left(\frac{1}{20}\left(\sigma^2 - \frac{1}{15}\right)\right)^{-1/2} \cdot \frac{\sigma}{20} = \left(\sigma^2 - \frac{1}{15}\right)^{-1/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{20}}.$$

Auswertung in $\sigma = 0{,}4$ ergibt

$$\frac{d\mu}{d\sigma}(0{,}4) = 0{,}2928.$$

Dies entspricht zugleich der Steigung a der Effizienzgeraden $\mu = r_0 + a\sigma$. Damit das Portfolio optimal bleibt, d. h. dem Tangentialportfolio entspricht, folgt hieraus die Bedingung

$$0{,}15 = r_0 + 0{,}2928 \cdot 0{,}4.$$

Hieraus resultiert insgesamt

$$r_0 = 0{,}15 - 0{,}1171 = \underline{0{,}0329} \quad (3{,}29\%).$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(R, R_I) &= \mathrm{Cov}(\gamma + \delta R_I + U, R_I) \\ &= \delta \mathrm{Cov}(R_I, R_I) + \mathrm{Cov}(U, R_I) \\ &= \delta \mathrm{Var}(R_I). \end{aligned}$$

Hieraus resultiert

$$\delta = \frac{\mathrm{Cov}(R, R_I)}{\mathrm{Var}(R_I)}.$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\mathrm{Cov}(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform ist und $\mathrm{Cov}(a, X) = 0$ für eine skalare Größe a gilt, und die Voraussetzung $\mathrm{Cov}(U, R_I) = 0$ verwendet.