DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11. Oktober 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 28 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][18 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine vierjährige DAX-Bull-Anleihe mit den folgenden Modalitäten:

- Es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen (Zerobond-Variante).
- Der Nennwert der Anleihe beläuft sich auf 150.000 €.
- Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer der Bull-Anleihe die Rückzahlung des Nennwerts sowie eine potentielle Bonus-Zahlung. Die Bonus-Zahlung erfolgt, wenn der DAX am Ende der Laufzeit *höher* steht als bei Erwerb der Anleihe.
- Der Anfangsstand des DAX betrage 10.000 € (umgerechnet in Geldeinheiten).
- Die Höhe der Bonus-Zahlung beträgt 60% der (nicht annualisierten) Vier-Perioden-Gesamtrendite des DAX und ist bezogen auf den Nennwert der Anleihe.

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_4 der Bull-Anleihe aus Sicht des Käufers der Anleihe formal dar.

(ii) *[3 Punkte]* Zerlegen Sie diese Position dann so, dass die eingebettete Option offengelegt wird. Welcher Optionstyp mit welchen Modalitäten geht hier in welchem Umfang ein?

(iii) *[1 Punkt]* Die Anleihe weise nun einen Nominalzins von 5% auf. Welche zusätzlichen Finanztitel sind in welchem Umfang zu erwerben, um die zusätzlichen Rückflüsse zu duplizieren?

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Discount-Zertifikat auf eine Einheit der ZZ-Aktie mit einer Laufzeit von 3 Jahren. Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer des Zertifikats den Marktwert S_3 der ZZ-Aktie, *maximal* aber den Betrag 700 € (Cap).

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_3 des Zertifikats zum Zeitpunkt 3 formal dar.

(ii) *[4 Punkte]* Zerlegen Sie diese Position dann auf *zwei alternative Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese beiden Zerlegungen ein?

Hinweis: Es gilt $\min\{-x, 0\} = -\max\{x, 0\}$.

(c) *[6 Punkte]* Einem Investor mit einem Budget von 2.000 € stehen drei Investitionsalternativen zur Verfügung. Aktien der YZ-AG zum Kurs von 1.000 € sowie Puts auf eine Einheit der YZ-Aktie mit einem Ausübungspreis von 700 € und einem Kurs von 400 €. Schließlich besteht die Möglichkeit einer einperiodigen sicheren Anlage bzw. Aufnahme von Kapital zum Zins r.
Der Investor bildet nun ein Portfolio aus Aktien, Puts und sicherer Anlage bzw. Aufnahme von Kapital. Dabei können nur *ganzzahlige* Anteile von Aktien und Puts erworben werden. Das Budget soll dabei jeweils voll investiert werden.

(i) *[2 Punkte]* Wie lautet die Portfolioposition aus Aktien, Puts und sicherer Anlage in $t = 1$, falls die (positive) Anzahl der Aktien der Anzahl der Puts entsprechen soll? Die Möglichkeit einer Kreditaufnahme sei dabei ausgeschlossen.

(ii) *[1 Punkt]* Wie groß ist der minimale (positive) Wert der Position aus Aufgabenteil (i) in $t = 1$?

(iii) *[2 Punkte]* Nehmen Sie nun an, dass die Möglichkeit einer Kreditaufnahme in Höhe von 800 € besteht, um die Aktienposition zu erhöhen. Nach wie vor soll die Anzahl der Aktien derjenigen der Puts entsprechen und die Möglichkeit der Kreditaufnahme soll wahrgenommen werden. Welche Portfolioposition resultiert hieraus in $t = 1$?

(iv) *[1 Punkt]* Wie groß ist der minimale (positive) Wert der Position aus Aufgabenteil (iii) in $t = 1$?

Lösungsskizze:

(a) (i) Rückfluss-Position:

$V_4 = \max\{150.000, 150.000(1 + 0{,}6 \cdot \frac{\text{DAX}(4)-\text{DAX}(0)}{\text{DAX}(0)})\}$, wobei DAX($t$) den DAX-Stand zum Zeitpunkt t bezeichne.

(ii) Zerlegung:

$$\begin{aligned} V_4 &= 150.000 + \max\left\{0{,}6 \cdot 150.000 \cdot \tfrac{\text{DAX}(4)-\text{DAX}(0)}{\text{DAX}(0)}, 0\right\} \\ &= 150.000 + \tfrac{90.000}{\text{DAX}(0)} \cdot \max\{\text{DAX}(4) - \text{DAX}(0), 0\} \\ &= 150.000 + 9 \cdot \max\{\text{DAX}(4) - 10.000, 0\} \end{aligned}$$

Die Zerlegung beinhaltet 9 vierjährige DAX-Call-Optionen mit einem Ausübungspreis in Höhe von 10.000 €.

(iii) Weist die Anleihe einen Nominalzins von 5% auf, dann sind zusätzlich jeweils $150.000 \cdot 0{,}05 = 7.500$ Einheits-Zerobonds mit Restlaufzeiten von 1, 2, 3 und 4 Jahren zu erwerben.

(b) (i) Rückfluss-Position: Mit S_3 als Bezeichnung für den Aktienkurs in $t = 3$ gilt

$$V_3 = \min\{S_3, 700\}.$$

(ii) Zerlegung 1:

$$\begin{aligned} V_3 &= S_3 + \min\{700 - S_3,\, 0\} \\ &= S_3 - \max\{S_3 - 700,\, 0\} \end{aligned}$$

Zerlegung 1 beinhaltet einen *Short* Call auf die ZZ-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis 700.

Zerlegung 2:

$$\begin{aligned} V_3 &= 700 + \min\{S_3 - 700,\, 0\} \\ &= 700 - \max\{700 - S_3,\, 0\} \end{aligned}$$

Zerlegung 2 beinhaltet einen *Short* Put auf die ZZ-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis 700.

(c) (i) Bei einem Budget von 2.000 € kann unter den spezifizierten Bedingungen jeweils nur eine Aktie sowie ein Put erworben werden. Hierdurch werden 1.400 € des Budgets ausgeschöpft. Das restliche Budget in Höhe von 600 € kann sicher angelegt werden.
Bezogen auf den Aktienpreis S_1 lautet der Wert des Portfolios in $t = 1$ damit:

$$S_1 + \max\{700 - S_1, 0\} + 600(1 + r) = \max\{700, S_1\} + 600(1 + r).$$

(ii) Damit beläuft sich der minimale Wert des Portfolios in $t = 1$ auf $700 + 600(1 + r)$.

(iii) Bei einer Kreditaufnahme von 800 € können nunmehr zwei Aktien sowie zwei Puts erworben werden. Der Wert des Portfolios in $t = 1$ lautet damit:

$$2S_1 + 2\max\{700 - S_1, 0\} - 800(1 + r) = 2\max\{700, S_1\} - 800(1 + r).$$

(iv) Damit beläuft sich der minimale (positive) Wert des Portfolios in $t = 1$ auf $1.400 - 800(1 + r)$, sofern $r < 0{,}75$ (was in praxi stets erfüllt ist).

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [13 Punkte]*

Ein Unternehmen besitzt ein Anfangsvermögen von $v_0 = 1.000$ €. In der betrachteten Periode kann ein Schaden S in € eintreten, der dieses Anfangsvermögen vermindert. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S ist gegeben durch:

k	0	100	500	800
$\mathbb{P}[S = k]$	0,9	0,04	0,04	0,02

Das Unternehmen hat drei Handlungsalternativen. Es kann den Schaden zunächst selbst tragen (Nicht-Versicherung). Alternativ kann es zur Deckung des Schadens eine Vollversicherung abschließen oder aber eine Versicherung mit Selbstbehalt, jeweils gegen Zahlung einer Prämie.

Das Unternehmen beurteilt die Handlungsalternativen auf Basis der resultierenden Endvermögenspositionen V_{NV} bzw. V_{VV} bzw. V_{SB} unter Zugrundelegung des *Bernoulli-Prinzips*. Dabei geht es von der Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$ aus.

Bitte rechnen Sie mit jeweils fünf Nachkommastellen!

(a) *[3 Punkte]* Welcher Erwartungsnutzen resultiert aus der Handlungsalternative Nicht-Versicherung?

(b) *[2 Punkte]* Dem Unternehmen liegt ein Angebot über eine Vollversicherung gegen eine Prämie π_{VV} in Höhe von 70 € vor. Welcher Erwartungsnutzen resultiert hieraus? Sollte das Unternehmen die angebotene Vollversicherung gegenüber einer Nicht-Versicherung präferieren?

(c) *[3 Punkte]* Bei welcher Höhe der Prämie π_{NI} (*Nutzenindifferenzprämie*) ist das Unternehmen indifferent zwischen dem Abschluss eines Versicherungsvertrags und dem Verzicht auf die Versicherung?

(d) *[5 Punkte]* Dem Unternehmen liegt nun ein weiteres Angebot vor, eine Versicherung mit 100 € Selbstbehalt. Im vorliegenden Fall trägt das Unternehmen somit bei jedem (positiven) Schaden 100 € selbst. Die zugehörige Prämie π_{SB} beträgt 20 €.

  (i) *[1 Punkt]* Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Selbstbehalt-Schadens S_{SB}?

  (ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen dieser Handlungsalternative!

  (iii) *[1 Punkt]* Welche der drei vorstehend spezifizierten Handlungsalternativen unter (a), (b) und (d) sollte das Unternehmen wählen?

Lösungsskizze:

(a) Zu bestimmen ist $\mathbb{E}[u(v_0 - S)]$. Für $u(x) = \ln(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(1000-S)] &= u(1.000)\cdot 0{,}9 + u(900)\cdot 0{,}04 + u(500)\cdot 0{,}04 + u(200)\cdot 0{,}02 \\ &= \underline{6{,}84362}.\end{aligned}$$

(b) Zu bestimmen ist $\mathbb{E}[u(v_0 - \pi_{\text{VV}})] = u(v_0 - \pi_{\text{VV}}) = \ln(930) = \underline{6{,}83518}$. Das Unternehmen sollte somit die angebotene Vollversicherung *nicht* akzeptieren.

(c) Zu erfüllen ist die Äquivalenz $\mathbb{E}[u(v_0 - \pi_{\text{NI}})] = \mathbb{E}[u(v_0 - S)]$. Mithin lautet die Indifferenzgleichung

$$\ln(1.000 - \pi_{\text{NI}}) = 6{,}84362.$$

Hieraus resultiert als Nutzenindifferenzprämie

$$\pi_{\text{NI}} = 1.000 - \exp(6{,}84362) = \underline{62{,}12}.$$

(d) (i) Es gilt $\mathbb{P}[S_{\text{SB}} = 0] = 0{,}9$ sowie $\mathbb{P}[S_{\text{SB}} = 100] = 0{,}1$.

(ii) Zu bestimmen ist $\mathbb{E}[u(v_0 - S_{\text{SB}} - \pi_{\text{SB}})]$. Für $u(x) = \ln(x)$ resultiert hieraus:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(v_0 - S_{\text{SB}} - \pi_{\text{SB}})] &= \ln(1.000 - \pi_{\text{SB}})\cdot 0{,}9 + \ln(900 - \pi_{\text{SB}})\cdot 0{,}1 \\ &= \ln(980)\cdot 0{,}9 + \ln(880)\cdot 0{,}1 \\ &= \underline{6{,}87679}.\end{aligned}$$

(iii) Zu den gegebenen Konditionen sollte das Unternehmen daher die Versicherung mit Selbstbeteiligung wählen.

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [28 Punkte]*

Am Finanzmarkt werden Aktien des Reisekonzerns „Happy Holiday AG“ sowie einjährige Call-Optionen (auf je eine dieser Aktien) liquide gehandelt:

- Der Marktpreis der Aktie beträgt aktuell 28 € pro Stück.
- Eine Call-Option hat den Strike 42 € und kostet 4 €.
- Geld kann zum Zinssatz 5% p. a. risikofrei angelegt bzw. geliehen werden.

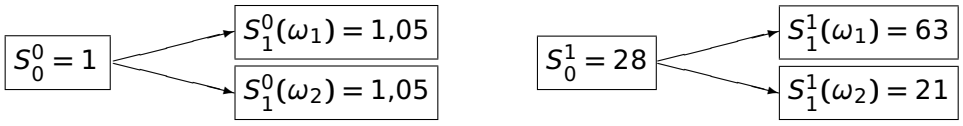
Ihr Finanzvorstand bittet Ihr Team, einjährige Finanzderivate auf die Aktie der „Happy Holiday AG“ zu analysieren. Ihr Team entscheidet sich für die Modellierung in einem *arbitrage-freien* Einperiodenmodell auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($\mathbb{P}$=real-world Maß) mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1) mit zugehörigen Preisprozessen $(S_0^0; S_1^0) = (1; 1{,}05)$ bzw. $(S_0^1; S_1^1)$. Während der heutige Aktienpreis S_0^1 bekannt ist, ist der zukünftige Preis S_1^1 eine Zufallsvariable, über deren genaue Spezifikation sich Ihr Team zunächst uneinig ist.

(a) *[4 Punkte]* Ein *Straddle* ist eine Optionsposition, die als Long-Position den Erwerb sowohl einer Call- als auch einer Put-Option auf denselben Basiswert mit identischem Strike und identischer Fälligkeit kombiniert. Wie ist der Straddle auf die Aktie mit Strike 42 € und einjähriger Restlaufzeit zu bewerten, um keine Arbitragemöglichkeit zu generieren?

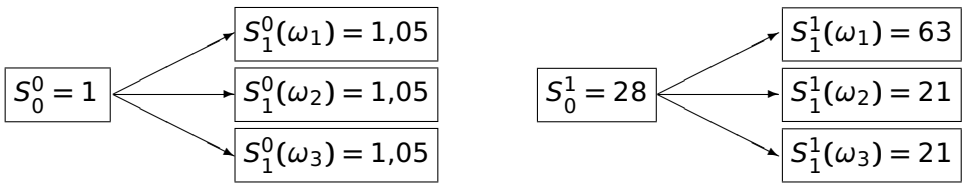
(b) *[3 Punkte]* Es sei $\mathbb{Q}$ ein risikoneutrales Maß bezüglich des Numéraires „Sparbuch“. Berechnen Sie die erwartete Rendite der Aktie unter $\mathbb{Q}$. Erläutern Sie, was dies für die erwartete Rendite jedes Portfolios aus Sparbuch und Aktie unter $\mathbb{Q}$ bedeutet.

Nach ausgiebiger Diskussion einigt sich Ihr Team auf folgende Finanzmarktmodelle:

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = \frac{1}{2}$,



(2) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[\{\omega_2\}] = \mathbb{P}[\{\omega_3\}] = \frac{1}{4}$,



(c) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie für beide Finanzmarktmodelle die Menge aller äquivalenten risikoneutralen Maße. Worin besteht der strukturelle Unterschied zwischen den beiden „Modellvarianten“?

(d) *[3 Punkte]* Zeigen Sie im **Finanzmarktmodell (1)** durch risikoneutrale Bewertung, dass der arbitrage-freie Preis der einjährigen Call-Option auf die Aktie der „Happy Holiday AG“ mit Strike 42 € exakt deren Marktpreis in Höhe von 4 € ist. Geben Sie eine alternative Interpretation des eindeutigen arbitrage-freien Preises an.

(e) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie im **Finanzmarktmodell (2**) explizit die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim C_1, definiert durch

$$C_1(\omega_1) = 84, \quad C_1(\omega_2) = 42, \quad C_1(\omega_3) = 126.$$

Geben Sie mit Begründung an, ob C_1 in diesem Modell replizierbar ist.

(f) *[7 Punkte]* Da die Call-Option mit Strike 42 € am Markt liquide gehandelt wird, schlägt eine Kollegin mit Blick auf das Ergebnis von Teilaufgabe (d) vor, das **Finanzmarktmodell (1)** um die Call-Option als primären Finanztitel zu erweitern, d. h. die Call-Option wird Produkt 2 mit Preisprozess $(S_0^2; S_1^2) = (C_0^{\text{call}}; C_1^{\text{call}})$. Als Finanzderivat betrachten Sie die Garantieposition

$$G_1 = \max\{10 \cdot S_1^1, 525\},$$

die für ein Portfolio aus 10 Aktien zum Zeitpunkt 1 eine Wertuntergrenze von 525 € sichert.

Bestimmen Sie alle Strategien, mit denen die Auszahlung des Derivats G_1 durch Handel mit Sparbuch, Aktie und Call-Option repliziert werden kann, und bestimmen Sie die jeweiligen Kosten der perfekten Replikation. Welches finanzmathematische Grundprinzip wird durch Ihre Berechnungen illustriert? Formulieren Sie dieses in *Kurzform*.

Lösungsskizze:

(a) Die Marktpreise C_0^{call}, C_0^{put}, S_0^1 von Call- und Put-Option sowie der Aktie müssen der Put-Call-Parität

$$C_0^{\text{call}} - C_0^{\text{put}} = S_0^1 - \tfrac{42}{1{,}05}$$

genügen; anderenfalls kann Arbitrage durch Handel mit diesen Finanzinstrumenten erzielt werden. Umstellen und Einsetzen der gegebenen Preise ergibt für die Put-Option den arbitrage-freien Preis

$$C_0^{\text{put}} = C_0^{\text{call}} - S_0^1 + \tfrac{42}{1{,}05} = 4 - 28 + 40 = 16,$$

also als Wert des Straddles $C_0^{\text{straddle}} = C_0^{\text{call}} + C_0^{\text{put}} = 4 + 16 = \underline{20}$.

(b) Die Martingaleigenschaft des diskontierten Aktienpreisprozesses ist gleichbedeutend mit:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{S_1^1}{1{,}05}\right] = S_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^1] = 1{,}05 \cdot S_0^i$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1}\right] = \tfrac{1{,}05 \cdot S_0^1 - S_0^1}{S_0^1} = 0{,}05.$$

Unter $\mathbb{Q}$ entsprechen die künftigen Einperiodenrenditen der primären Produkte (und damit aller linearen Portfolios) im Erwartungswert dem risikolosen Zins. Unter $\mathbb{Q}$ müssen - sehr vereinfachend gesprochen - alle Titel risikolos sein.

(c) Finanzmarktmodell (1):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines zum Ursprungsmaß $\mathbb{P}$ äquivalenten risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ sind bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1)\cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2)\cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 28 = 60q_1 + 20q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$28 = 60q_1 + 20(1-q_1) = 40q_1 + 20$$

und entsprechend $q_1 = 0{,}2$, $q_2 = 0{,}8$. Diese Gewichte bestimmen ein eindeutiges risikoneutrales Maß $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$.

Finanzmarktmodell (2):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes sind bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1)\cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2)\cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3)\cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$28 = 60q_1 + 20q_2 + 20q_3 = 60q_1 + 20(1-q_1) = 40q_1 + 20.$$

Es folgt $q_1 = 0{,}2$, $q_2 + q_3 = 0{,}8$. Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ definiert $q_1(\alpha) = 0{,}2$, $q_2(\alpha) = 0{,}8 \cdot \alpha$, $q_3(\alpha) = 0{,}8 \cdot (1-\alpha)$ ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_\alpha$, das zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist.

Modell (1) ist vollständig; Modell (2) ist unvollständig (siehe *2. Fundamentalsatz*).

(d) Das Auszahlungsprofil der Call-Option beträgt zur Fälligkeit

$$C_1^{\text{call}}(\omega) = (S_1^1(\omega) - 42)^+ = \begin{cases} 21 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel ergibt sich der eindeutige arbitrage-freie Preis

$$C_0^{\text{call}} = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1^{\text{call}}}{S_1^0}\right] = 20q_1 + 0q_2 = 20 \cdot 0{,}2 = \underline{4}.$$

Dieser entspricht den Kosten, um die Call-Option durch Handel mit Sparbuch und Aktie (im vorliegenden Modell) zu replizieren.

(e) Für den Contingent Claim $C_1(\omega_1) = 84$, $C_1(\omega_2) = 42$, $C_1(\omega_3) = 126$ berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, aus (c) einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\tfrac{C_1}{1{,}05}\right] \\ &= \tfrac{1}{1{,}05}\left(C_1(\omega_1)\cdot q_1(\alpha) + C_1(\omega_2)\cdot q_2(\alpha) + C_1(\omega_3)\cdot q_3(\alpha)\right) \\ &= 80\cdot 0{,}2 + 40\cdot 0{,}8\cdot\alpha + 120\cdot 0{,}8\cdot(1-\alpha) \\ &= 112 - 64\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0,1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = (48, 112)$, also ein ganzes Preisintervall. Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der perfekten Replikation entsprechen würde.

Bemerkung: Die replizierbaren Contingent Claims besitzen für $(\vartheta^0, \vartheta^1) \in \mathbb{R}^2$, interpretiert als Einheiten von Sparbuch und Aktie, die Struktur

$$C_1(\omega) = \vartheta^0 S_1^0(\omega) + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

stellen also eine Linearkombination der primären Finanztitel dar. Insbesondere kann im vorliegenden Modell Replizierbarkeit nur vorliegen, wenn die Auszahlungen eines Contingent Claims in den Szenarien ω_2, ω_3 identisch sind. Dies liefert eine alternative Begründung der Nicht-Replizierbarkeit.

(f) Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch, Aktie und Call-Option) und den zugehörigen Portfoliowert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$G_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega)\cdot\vartheta^0 + S_1^1(\omega)\cdot\vartheta^1 + C_1^{\text{call}}(\omega)\cdot\vartheta^2, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05\cdot\vartheta^0 + 63\cdot\vartheta^1 + 21\vartheta^2 &= 630 \\ 1{,}05\cdot\vartheta^0 + 21\cdot\vartheta^1 + \ 0\vartheta^2 &= 525 \end{aligned}$$

mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Dieses besitzt unendlich viele Lösungen $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2)$, nämlich

$$\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2) = (500 - 20\vartheta^1, \vartheta^1, 5 - 2\vartheta^1), \quad \vartheta^1 \in \mathbb{R}.$$

Das erforderliche Anfangskapital beträgt für jede dieser Replikationsstrategien

$$\begin{aligned} V_0^\vartheta &= S_0^0(\omega)\cdot\vartheta^0 + S_0^1(\omega)\cdot\vartheta^1 + C_0^{\text{call}}(\omega)\cdot\vartheta^2 \\ &= 1\cdot(500 - 20\vartheta^1) + 28\cdot\vartheta^1 + 4\cdot(5 - 2\vartheta^1) = \underline{520}. \end{aligned}$$

Dies illustriert das *Law of One Price*: Ist ein Contingent Claim replizierbar, so sind die Kosten der Replikation unabhängig von der gewählten Replikationsstrategie.

Bemerkung: Alternative Parameterisierungen der Replikationsstrategien sind möglich.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Sensitivitäten (Duration, Konvexität)] [22 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Eine Aktuarin erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 50$ Millionen €, $L_2 = 75$ Millionen € und $L_3 = 100$ Millionen €. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100 €).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins
Bond 1	105,00	1	10,00%
Bond 2	102,50	2	5,00%
Bond 3	100,00	3	2,00%

Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welches ist der Wert des Portfolios P in $t = 0$? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsüberlegungen!)

(b) *[9 Punkte]* Gegeben sei eine Anleihe mit unbegrenzter Restlaufzeit, eine sogenannte *ewige Anleihe*. Die konstante (jährlich nachschüssige) Kuponzahlung betrage $Z = Ni$, wobei N den Nennwert und i den Nominalzins der Anleihe bezeichne.

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie den Barwert der ewigen Anleihe! Gehen Sie dabei aus von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins $r > 0$.

Hinweis: Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P(r, T) = N\left[\frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right)(1 + r)^{-T}\right].$$

(ii) *[4 Punkte]* Welchen Wert nimmt die Macaulay-Duration der ewigen Anleihe an?

(iii) *[3 Punkte]* Welchen Wert nimmt die (relative) Konvexität der ewigen Anleihe an?

(c) *[7 Punkte]* Gegeben seien die Zeitpunkte $t < u \leq T < S$. Betrachten Sie einen in t abgeschlossenen *Forward-Kontrakt* (Long-Position) mit Fälligkeit T auf einen S-Bond (einen Zerobond mit Nennwert $N = 1$ und Fälligkeit S).

Der Forwardpreis in t wird definitionsgemäß so bestimmt, dass der Wert des Kontrakts in t den Wert 0 annimmt.

Welchen Wert besitzt nun ein in t erworbener (Long-Position) Forward-Kontrakt zum Zeitpunkt u? Lösen Sie die Aufgabe unter Verwendung des allgemeinen Ansatzes der *risikoneutralen Bewertung* bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds und stellen Sie das Ergebnis in Termen von Zerobondpreisen dar!

Lösungsskizze:

(a) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:

$$102N_3 = 100 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert $N_3 = \underline{980.392{,}16}$.

Weiter gilt

$$105N_2 + 2N_3 = 75 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert: $N_2 = \underline{695.611{,}58}$.

Schließlich gilt

$$110N_1 + 5N_2 + 2N_3 = 50 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert: $N_1 = \underline{405.101{,}43}$.

Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf

$$P = 105{,}00N_1 + 102{,}50N_2 + 100{,}00N_3 = \underline{211{,}875} \text{ Millionen.}$$

(b) (i) Betrachte $\lim_{T\to\infty} P(r,T)$. Es folgt:

$$P(r) := \lim_{T\to\infty} P(r,T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r} = Zr^{-1}.$$

(ii) Es gilt zunächst

$$P'(r) = dP(r)/dr = -Zr^{-2}.$$

Hieraus folgt für die modifizierte Duration

$$\mathrm{Dur}^{\mathrm{M}}(r) := -P'(r)/P(r) = r^{-1}$$

und somit für die Macaulay-Duration

$$\mathrm{Dur}^{\mathrm{Mac}}(r) = (1+r)\,\mathrm{Dur}^{\mathrm{M}}(r) = \frac{1+r}{r}.$$

(iii) Es gilt zunächst

$$P''(r) = d^2P(r)/dr^2 = 2Zr^{-3}.$$

Hieraus folgt für die (relative) Konvexität

$$\mathrm{Conv}(r) := P''(r)/P(r) = 2r^{-2}.$$

(c) Bezeichne $P(T,S)$ den Wert des S-Bonds in T und $F(t;T,S)$ den Preis des in t abgeschlossenen Forward-Kontrakts. Der Rückfluss aus dem Kontrakt zum Zeitpunkt T beläuft sich mithin auf

$$P(T,S) - F(t;T,S).$$

Bezeichne $(K_\tau)_{\tau \geq 0}$ die Wertentwicklung des Geldmarktfonds, so ist der risikoneutrale Wert der Zahlung $P(T,S) - F(t;T,S)$ zum Zeitpunkt u gegeben durch

$$K_u \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tfrac{P(T,S)-F(t;T,S)}{K_T} | \mathcal{F}_u] = K_u \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tfrac{P(T,S)}{K_T} | \mathcal{F}_u] - F(t;T,S) K_u \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tfrac{1}{K_T} | \mathcal{F}_u].$$

Der erste Term des letzten Ausdrucks ist gerade der Wert des S-Bonds in u, mithin $P(u,S)$. Der zweite Term entspricht gerade $F(t;T,S)P(u,T)$. Damit lautet der Wert der Position in u insgesamt

$$P(u,S) - F(t;T,S)P(u,T).$$

Aufgabe 5. *[Bewertung von Aktienderivaten: Binomialmodell] [25 Punkte]*

Zur Analyse von Aktienderivaten modellieren Sie den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t=0,1,\dots}$ des Solarparkbetreibers „Sun Energy AG“ durch ein mehrperiodiges Binomialmodell mit „Up-Faktor“ u und „Down-Faktor“ d ($0 < d < u$), wobei in jeder Periode Kursänderungen mit Faktor u bzw. d mit positiven „real-world“ Wahrscheinlichkeiten realisiert werden. Der einperiodige Zinssatz auf dem Sparbuch (Startwert per Konvention: 1 €) für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme wird mit r bezeichnet.

(a) *[4 Punkte]* Unter welcher Bedingung an die Parameter u, d, r ist das Binomialmodell arbitrage-frei? Begründen Sie diese Bedingung *intuitiv*.

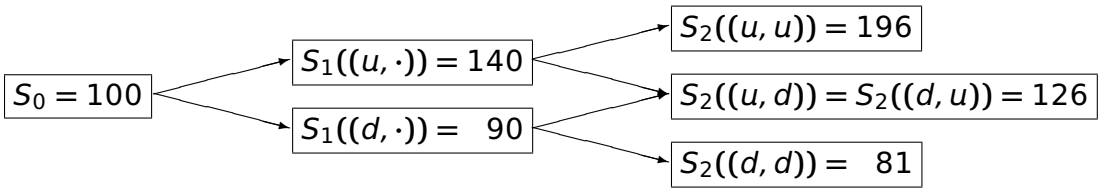
(b) *[6 Punkte]* Bei einer *(Floating Strike) Lookback Put-Option* mit Maturität $T > 0$ auf eine Aktie der „Sun Energy AG“ ist das Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{put, max}} := \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T$$

abhängig vom pfadweisen Maximum des Aktienpreisprozesses. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots$ aus einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ generieren können.

Beschreiben Sie mithilfe geeigneter Formeln, wie Sie im Kontext eines mehrperiodigen, arbitrage-freien Binomialmodells die Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* implementieren können. Welche theoretische Grundlage begründet Monte-Carlo-Methoden?

(c) *[15 Punkte]* Im Markt wird eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie mit Ausübungspreis 150 € und mit Fälligkeit in $t = 2$ gehandelt. Zur Validierung des Marktpreises verwenden Sie das zweiperiodige Binomialmodell mit Periodenzins $r = 5\%$ und folgender Spezifikation des Aktienpreisprozesses:



(i) *[9 Punkte]* Berechnen Sie durch *risikoneutrale Bewertung* die arbitragefreien Preise der Put-Option zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$.

(ii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe der arbitrage-freien Preise aus (i) die Replikationsstrategie, beginnend in $t = 0$, für die Put-Option.

Lösungsskizze:

(a) Das Modell ist (genau) unter der Bedingung $d < 1 + r < u$ arbitrage-frei. Nimmt man anderenfalls zum einen $1 + r \leq d < u$ an, würde die Aktie systematisch besser als das Sparbuch performen und man könnte eine Arbitragemöglichkeit generieren, indem man heute Aktien auf Kredit (Vereinbarung der Rückzahlung zu einem späteren Zeitpunkt) erwirbt und zum vereinbarten Zeitpunkt den Kredit durch Aktienverkäufe bedient sowie einen risikofreien Gewinn vereinnahmt. Wäre zum anderen $d < u \leq 1 + r$ wäre das Sparbuch der Aktie überlegen und man könnte durch Leerverkäufe der Aktie arbitrieren.

(b) Monte-Carlo-Schätzer:

Der arbitrage-freie Preis der Lookback Put-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T^{\text{put,max}}}{(1+r)^T}\right] = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{0\leq t\leq T} S_t - S_T\right].$$

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten Pfaden $\{s_0(j), s_1(j), s_2(j), \ldots, s_T(j)\}$, $j = 1, \ldots, n$, des Aktienpreisprozesses $\{S_0, S_1, \ldots, S_T\}$ approximiert werden:

$$C_0 = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{0\leq t\leq T} S_t - S_T\right] \approx (1+r)^{-T}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\max_{0\leq t\leq T} s_t(j) - s_T(j)\right).$$

Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das starke Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Der Aktienpreisprozess besitzt die Form

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k, \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

wobei die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_T$ unter $\mathbb{Q}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{Q}[Y_k = u] = q$ und $\mathbb{Q}[Y_k = d] = 1 - q$ sind. Basierend auf unabhängigen Zufallszahlen $u_1(j), \ldots, u_T(j)$, $j = 1, \ldots, n$, aus einer stetigen Gleichverteilung auf $[0, 1]$ können nun Pfade wie folgt simuliert werden.

- Setze $y_k(j) = u$, falls $u_k(j) \leq q$, und $y_k(j) = d$, falls $u_k(j) > q$.
- Erzeuge Pfade $j = 1, \ldots, n$ des Aktienpreisprozesses durch

$$s_t(j) = S_0 \prod_{k=1}^{t} y_k(j), \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

(c) (i) Die Put-Option liefert zur Fälligkeit die Auszahlungen

$$C_2^{\text{put}} := (150 - S_2)^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 24 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 24 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 69 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

Aus dem Aktienpreisprozess sind weiterhin $d = 0{,}9$ und $u = 1{,}4$ ablesbar. Damit sind die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = \underline{0{,}3}$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = \underline{0{,}7}$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie.

Bezeichnen nun C_t^{put} die arbitrage-freie Preise der Put-Option in $t = 0, 1, 2$, so gilt

$$\begin{aligned} C_1^{\text{put}}((u,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_2^{\text{put}} | \mathcal{F}_1\right](u,\cdot) \\ &= \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\text{put}}((u,u))q + C_2^{\text{put}}((u,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}05}(0 \cdot 0{,}3 + 24 \cdot 0{,}7) = \underline{16{,}0000}, \\ C_1^{\text{put}}((d,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_2^{\text{put}} | \mathcal{F}_1\right](d,\cdot) \\ &= \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\text{put}}((d,u))q + C_2^{\text{put}}((d,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}05}(24 \cdot 0{,}3 + 69 \cdot 0{,}7) = \underline{52{,}8571} \end{aligned}$$

und rekursiv ergibt sich

$$\begin{aligned} C_0^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_1^{\text{put}}\right] = \tfrac{1}{1+r}[C_1^{\text{put}}((u,\cdot))q + C_1^{\text{put}}((d,\cdot))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}05}[16{,}0000 \cdot 0{,}3 + 52{,}8571 \cdot 0{,}7] = \underline{39{,}8095}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Mit den Gewichten

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = \begin{cases} 0{,}09 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 0{,}21 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 0{,}49 & \text{für } \omega = (d,d), \end{cases}$$

des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ berechnet man alternativ direkt

$$\begin{aligned} C_0^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{C_2^{\text{put}}}{(1{,}05)^2}\right] \\ &= \tfrac{1}{(1{,}05)^2}(0 \cdot 0{,}09 + 24 \cdot 0{,}21 + 24 \cdot 0{,}21 + 69 \cdot 0{,}49) = \underline{39{,}8095}. \end{aligned}$$

(ii) Die in (i) berechneten arbitrage-freien Preise entsprechen im vollständigen Binomialmodell den Kosten der perfekten Replikation in den jeweiligen Knoten. Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1{,}05; 1{,}1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u, \cdot):}$

$$\begin{aligned} 196x + 1{,}1025y &= 0 \\ 126x + 1{,}1025y &= 24 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}3429}$, $y = \underline{60{,}9624}$.

$\underline{t = 1, \omega = (d, \cdot):}$

$$\begin{aligned} 126x + 1{,}1025y &= 24 \\ 81x + 1{,}1025y &= 69 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-1{,}0000}$, $y = \underline{136{,}0544}$.

$\underline{t = 0:}$

$$\begin{aligned} 140x + 1{,}05y &= 16{,}0000 \\ 90x + 1{,}05y &= 52{,}8571 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}7371}$, $y = \underline{113{,}5237}$.

Aufgabe 6. *[Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Definieren Sie das monetäre Risikomaß *Value at Risk* zum Niveau $\lambda \in (0,1)$, kurz $\mathrm{V@R}_\lambda$, ausgehend von der Menge der akzeptablen Finanzpositionen (*Akzeptanzmenge*). Erläutern Sie anhand Ihrer Definition, in welchem Sinne der Value at Risk als Kapitalanforderung aufgefasst werden kann.

(b) *[7 Punkte]* Betrachten Sie die zwei Finanzpositionen X_1 und X_2 mit wie folgt spezifizierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen (W.=Wahrscheinlichkeit):

$$X_1 = \begin{cases} 10.000 & \text{mit W. } 0{,}920 \\ -6.000 & \text{mit W. } 0{,}070 \\ -20.000 & \text{mit W. } 0{,}010 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 10.000 & \text{mit W. } 0{,}920 \\ -6.000 & \text{mit W. } 0{,}070 \\ -20.000 & \text{mit W. } 0{,}009 \\ -50.000 & \text{mit W. } 0{,}001 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beide Finanzpositionen den V@R sowie den *Tail Value at Risk* (TV@R) zum Niveau $\lambda = 0{,}01$. Kommentieren Sie Ihre Berechnungsergebnisse!

(c) *[3 Punkte]* Welches Hauptdefizit des V@R wird im Allgemeinen nicht durch den TV@R behoben? Geben Sie inklusive formaler Definition ein verwandtes Risikomaß an, das beide Defizite des V@R behebt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Risikomaß und dem TV@R?

(d) *[6 Punkte]* Angenommen, Sie arbeiten im Aktuariat einer Schadenversicherung und modellieren den Jahresgesamtschaden S einer Versicherungssparte (aufgefasst wie in der Versicherungsmathematik üblich als nicht-negative Zufallsvariable) mithilfe einer *Pareto-Verteilung* (stetige Verteilung), nach Anpassung an die Schadenhistorie gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_S(x) = \mathbb{P}[S \le x] = 1 - \left(\frac{x}{2.000.000}\right)^{-2}, \quad x > 2.000.000,$$

und $F_S(x) = 0$ sonst. Für diese Sparte besteht ein proportionaler Rückversicherungsvertrag, sodass 40% des Jahresgesamtschadens an den Rückversicherer zediert werden. Nach Abzug der Prämienzahlung an den Rückversicherer verbleiben Ihrem Unternehmen von den vereinnahmten Prämien der Sparte 2,5 Mio. Euro.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie zum Niveau 0,95 das Quantil der Verteilung von S, kurz $q_S(0{,}95)$. Interpretieren Sie diesen Wert.

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau 0,05 für die Finanzposition X, die dem Jahresgewinn der Versicherungssparte entspricht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(e) *[6 Punkte]* Die *Solvabilitätskapitalanforderung* (SCR) unter Solvency II wird durch den *Mean Value at Risk* $\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0{,}005}(E_1 - \mathbb{E}[E_1])$ zum Niveau 0,005 der Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont definiert.

Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X], \sigma^2(X))$ gilt $\mathrm{SCR}(X) = -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X)$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

(i) *[4 Punkte]* Gegeben seien zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen X, Y mit Korrelation ρ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Anwendung der Wurzelformel zur Risikoaggregation mathematisch korrekt auf das SCR der Position $X+Y$ führt und sich das SCR subadditiv verhält. Wie beurteilen Sie allgemein die Anwendbarkeit der Wurzelformel zur Risikoaggregation?

(ii) *[2 Punkte]* Geben Sie inklusive Interpretation die definierende Eigenschaft monetärer Risikomaße an, durch die ein monetäres Risikomaß als Kapitalanforderung aufgefasst werden kann. Ist das SCR ein monetäres Risikomaß? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsskizze:

(a) Die Akzeptanzmenge des $\mathrm{V@R}_\lambda$ ist gegeben durch

$$\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} | \mathbb{P}[X < 0] \leq \lambda\},$$

wobei $\mathcal{X}$ die Menge aller Finanzpositionen zu einem festen Zeitpunkt darstellt und $\mathbb{P}$ das real-world Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet. Dies bedeutet, dass alle Finanzpositionen, die mit Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich λ keine Verluste erzeugen, akzeptabel sind. Der $\mathrm{V@R}_\lambda$ lässt sich aus der Akzeptanzmenge ableiten via

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\}.$$

In diesem Sinn ist der $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ der kleinste Geldbetrag, der zu einer Finanzposition X hinzuzufügen ist, sodass diese akzeptabel wird.

(b) Aus $\mathrm{V@R}_{0,01}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq 0{,}01\}$ lässt sich unmittelbar ablesen:

$$\mathrm{V@R}_{0,01}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,01}(X_2) = \underline{6.000}.$$

Der Tail Value at Risk zum Niveau 0,01 ist definiert durch den bedingten Erwartungswert

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X) = \mathbb{E}[-X | -X > \mathrm{V@R}_{0,01}(X)].$$

Dieser berechnet sich für die diskreten Zufallsvariablen X_k, $k = 1, 2$, via

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_k) = \frac{1}{\mathbb{P}[-X_k > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)]} \sum_{i=1,\dots,n, -x_i > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)} -x_i \mathbb{P}[X_k = x_i]$$

mit den Realisierungen $\{x_1, x_2, x_3\} = \{10.000, -6.000, -20.000\}$ für X_1 sowie $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{10.000, -6.000, -20.000, -50.000\}$ für X_2.

Für X_1 erfüllt nur $x_3 = -20.000$ die Bedingung $-x_3 > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_1)$, und entsprechend gilt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) = \frac{1}{0{,}01}(20.000 \cdot 0{,}01) = \underline{20.000}.$$

Für X_2 sind $x_3 = -20.000$ und $x_4 = -50.000$ zu berücksichtigen, und es folgt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = \tfrac{1}{0,01}(20.000 \cdot 0,009 + 50.000 \cdot 0,001) = \underline{23.000}.$$

Kommentierung: Trotz identischem V@R ist die Finanzposition X_2 offensichtlich gefährlicher als X_1. Der Value at Risk berücksichtigt nur die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Verlusten über einer kritischen Grenze, nicht aber die potentiellen Höhen der Verluste, die diese kritische Grenze übersteigen. Der TV@R misst dagegen die erwartete Höhe der Verluste, die den V@R übersteigen. Der gefährlicheren Finanzposition X_2 wird auch das höhere Risiko zugeordnet:

$$20.000 = \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) < \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = 23.000.$$

(c) Der TV@R berücksichtigt (siehe (b)) zwar den unteren Tail der Verteilung, ist jedoch zumindest im Allgemeinen nicht subadditiv, sodass ökonomisch sinnvolle Diversifikation bestraft werden kann. Ein verwandtes Risikomaß, das sowohl extreme Verluste berücksichtigt als auch stets subadditiv ist, ist der *Average Value at Risk* zum Niveau $\lambda \in (0,1)$, definiert durch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha.$$

Für stetige Verteilungen stimmen der AV@R und TV@R überein.

Hinweis: Genauer gilt mit $\gamma_\lambda = \mathbb{P}[-X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)]/\lambda$

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \gamma_\lambda \cdot \mathrm{TV@R}_\lambda(X) + (1-\gamma_\lambda)\cdot \mathrm{V@R}_\lambda(X).$$

(d) (i) Das Quantil $q_S(0,95)$ der stetigen Pareto-Verteilung ist eindeutig festgelegt durch

$$0,95 = F_S(q_S(0,95)) = 1 - \left(\frac{q_S(0,95)}{2.000.000}\right)^{-2}.$$

Auflösen dieser Gleichung liefert $q_S(0,95) = \underline{8.944.272}$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 nimmt der Schaden S Werte kleiner oder gleich $q_S(0,95)$ an; nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 übersteigt S den Wert $q_S(0,95)$.

(ii) Der zufällige Jahresgewinn (Werte in Mio. Euro) ist gegeben durch

$$X = 2,5 - 0,6 \cdot S,$$

d. h. $X = f(S)$ für die fallende Funktion $f(s) = 2,5 - 0,6 \cdot s$. Somit gilt nach den Rechenregeln der Quantiltransformation

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}_{0,05}(X) &= -q_X(0,05) = -q_{2,5-0,6\cdot S}(0,05) \\
&= -(2,5 - 0,6 \cdot q_S(0,95)) \\
&= -(2,5 - 0,6 \cdot 8,944) \\
&= \underline{2,866}.
\end{aligned}$$

Dem Jahresgewinn müssen mindestens 2,866 Mio. Euro hinzugefügt werden, sodass diese Finanzposition akzeptabel in Bezug auf den Value at Risk zum Niveau 0,05 wird, d. h. die Verlustwahrscheinlichkeit nach Kapitalzuführung kleiner oder gleich 0,05 ausfällt.

(e) (i) Da X, Y gemeinsam normalverteilt sind, ist auch die aggregierte Position $X + Y$ normalverteilt, d. h. die SCRs aller Finanzpositionen entsprechen gemäß Hinweis bis auf den positiven Faktor $-\Phi^{-1}(0,005)$ der Standardabweichung. Nach elementarer Stochastik gilt (unabhängig von den Verteilungen)

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Dies impliziert nach Multiplikation mit $-\Phi^{-1}(0,005)$ erstens

$$\mathrm{SCR}(X+Y) = \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

d. h. die Aggregation des Risikokapitals per Wurzelformel ist im Normalverteilungskontext mathematisch korrekt. Zweitens folgt

$$\mathrm{SCR}(X+Y) \leq \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)} = \mathrm{SCR}(X)+\mathrm{SCR}(Y),$$

d. h. das SCR ist im Normalverteilungskontext auch subadditiv.

Die Wurzelformel liefert eine mathematisch korrekte Aggregation für gemeinsam normalverteilte Risiken (bzw. allgemeiner elliptische Verteilungen). Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken (speziell: schiefe Verteilungen, heavy tails) oder Abhängigkeiten (speziell: Tailabhängigkeiten) ist die Wurzelformel nicht allgemeingültig.

(ii) Ein monetäres Risikomaß ρ muss insbesondere *cash-invariant* sein, d. h.

$$\rho(X+m) = \rho(X) - m \text{ für alle } m \in \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet, dass ρ auf einer monetären Skala misst: Wird zur Finanzposition X das Kapital m € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X + m$ um diesen Betrag.

Das SCR ist nicht cash-invariant und damit auch kein monetäres Risikomaß:

$$\begin{aligned} \mathrm{SCR}(X+m) &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X+m-\mathbb{E}[X+m]) \\ &= \mathrm{V@R}_{0,005}(X-\mathbb{E}[X]) = \mathrm{SCR}(X). \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *[Grundkonzepte der Risikomessung] [12 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Geben Sie – jeweils mit kurzer Begründung – an, ob die folgenden Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. **Beachten Sie, dass *[1 Punkt]* nur vergeben wird, wenn die zutreffende Antwort korrekt begründet ist.**

(i) *[1 Punkt]* Die Varianz spiegelt den einseitigen Risikobegriff wider.

(ii) *[1 Punkt]* Die Standardabweichung ist ein positiv homogenes, monetäres Risikomaß.

(iii) *[1 Punkt]* Beim Werfen einer fairen Münze liegt – im Sinne von Knight – Unsicherheit vor.

(iv) *[1 Punkt]* Jedes konvexe Risikomaß ist automatisch auch kohärent.

(v) *[1 Punkt]* Bei identischem Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist der Average Value at Risk einer Finanzposition X immer kleiner als der Value at Risk, da über die Verluste gemittelt wird.

(vi) *[1 Punkt]* Ist ρ ein konvexes Risikomaß, so ist die zugehörige Akzeptanzmenge immer konvex.

(vii) *[1 Punkt]* Das Risikomaß ρ_γ, $\gamma > 0$, definiert durch

$$\rho_\gamma(X) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1 : H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})\leq\gamma} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X],$$

ist konvex. Hierbei ist $\mathbb{P}$ ein Referenzmaß, $\mathcal{M}_1$ stellt die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ dar und $H(\cdot|\cdot)$ ist die relative Entropie.

(viii) *[1 Punkt]* Sind Erwartungswert und Standardabweichung einer Finanzposition bekannt, können der Value at Risk und der Average Value at Risk immer leicht mithilfe von Werten der Verteilungsfunktion und der Dichte der Standardnormalverteilung berechnet werden.

(b) *[4 Punkte]* Angenommen, eine Versicherungsgruppe mit Risikobudget B (Obergrenze für das Risikokapital) besteht aus n Tochtergesellschaften, die Versicherungsgeschäft betreiben. Die Basiseigenmittel der Tochtergesellschaften im Einjahreshorizont seien gegeben durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die konsolidierten Basiseigenmittel der Gruppe durch $X = X_1 + \ldots + X_n$.

Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung an das zugrunde liegende Risikomaß ρ und mit welchem Steuerungsansatz der Vorstand der Gruppe ein *Limit- und Schwellenwertsystem* für die Tochtergesellschaften etablieren kann, sodass bei der Risikomessung das Risikobudget der Gruppe eingehalten wird.

Lösungsskizze:

(a) (i) **falsch:** Die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ misst Abweichungen vom Erwartungswert in beide Richtungen („günstige“ und „ungünstige“ Abweichungen) und ist somit ein Beispiel für den zweiseitigen Risikobegriff.

(ii) **falsch:** Für die positiv homogene Standardabweichung (Streuungsmaß) gilt $\sigma(X+m) = \sigma(X)$, $m \in \mathbb{R}$, d. h. die Standardabweichung ist nicht cash-invariant und damit kein monetäres Risikomaß.

(iii) **falsch:** Da die Münze fair ist, sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten für „Kopf“ und „Zahl“ bekannt. Dies entspricht im Sinne von Knight „Risiko“ und nicht „Unsicherheit“.

(iv) **falsch:** Kohärenz liegt nur vor, wenn das konvexe Risikomaß zusätzlich positiv homogen ist.

(v) **falsch:** Die Quantilsfunktion $\lambda \mapsto q_\lambda(X)$ ist nicht-fallend, d. h. $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -q_\lambda(X)$ ist nicht-wachsend in λ. Dies impliziert

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha \geq \mathrm{V@R}_\lambda(X).$$

(vi) **wahr:** Es seien $X, Y \in \mathcal{A}$, d. h. es gilt $\rho(X) \leq 0$, $\rho(Y) \leq 0$. Dann gilt aufgrund der Konvexität von ρ für jedes $\lambda \in (0,1)$ auch

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \leq 0,$$

also $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}$.

(vii) **wahr:** Das Risikomaß ρ_γ besitzt die robuste Darstellung eines kohärenten Risikomaßes und ist damit insbesondere auch konvex.

(viii) **falsch:** Die Aussage ist zwar korrekt im Kontext von Normalverteilungen, jedoch nicht auf beliebige Verteilungen übertragbar, da der Value at Risk und der Average Value at Risk im Allgemeinen keine einfachen Funktionale von Erwartungswert und Standardabweichung sind.

(b) Ein wirkungsvolles Limit- und Schwellenwertsystem darf Diversifikation nicht bestrafen. Daher sollte das zugrunde liegende Risikomaß konvex bzw. noch spezieller subadditiv sein.

Anstatt auf Ebene der Tochtergesellschaften Mikromanagement zu betreiben, kann der Vorstand der Gruppe den Tochtergesellschaften auch individuelle Risikobudgets $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_1 + \ldots + B_n = B$ zuweisen, d. h. die Tochtergesellschaften können das Geschäft autark steuern und müssen nur sicher stellen, dass für das individuelle Risiko $\rho(X_i) \leq B_i$ gilt. Gilt nun $\rho(X_i) \leq B_i$, $i = 1, \ldots, n$, so impliziert die Subadditivität von ρ

$$\rho(X) \leq \rho(X_1) + \ldots + \rho(X_n) \leq B_1 + \ldots + B_n = B.$$

Halten also die Tochtergesellschaften die individuellen Risikobudgets ein, so ist auf Gruppenebene das Budget sicher eingehalten.

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [22 Punkte]*

(a) *[13 Punkte]* Gegeben seien die beiden riskanten Wertpapiere A und B, deren Renditen R_A und R_B eine Korrelation $\rho = \rho(R_A, R_B)$ in Höhe von $\rho = 0$ aufweisen. Die erwarteten Renditen μ_A bzw. μ_B sowie die zugehörigen Rendite-Standardabweichungen σ_A bzw. σ_B weisen die folgenden Werte auf:

$$\mu_A = 0{,}25, \qquad \sigma_A = 0{,}30,$$
$$\mu_B = 0{,}15, \qquad \sigma_B = 0{,}10.$$

(i) *[3 Punkte]* Mit $(x_{\text{MVP}}, 1 - x_{\text{MVP}})$ seien die Investmentgewichte des varianzminimalen Portfolios aus den beiden Wertpapieren bezeichnet. Bestimmen Sie x_{MVP}!

Hinweis: Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines Minimums.

(ii) *[6 Punkte]* Ermitteln Sie analytisch die Menge aller (μ, σ)-Kombinationen der durch Mischung der beiden Wertpapiere erreichbaren Portfolios. Leerverkäufe (Short Sales) sind dabei zugelassen. Es genügt, wenn Sie dabei die Varianz σ^2 der erreichbaren Portfolios als Funktion von μ darstellen!

(iii) *[4 Punkte]* Das Präferenzfunktional des Investors (auf der Renditeebene) sei gegeben durch $U(R) = \mathbb{E}[R] - 2 \cdot \text{Var}(R)$. Mit $(x_{\text{OPT}}, 1 - x_{\text{OPT}})$ seien die Investmentgewichte des optimalen (präferenzmaximalen) Portfolios aus den beiden Aktien bezeichnet. Die Investmentgewichte seien dabei nicht auf den Wertebereich $[0, 1]$ beschränkt. Bestimmen Sie x_{OPT}!

Hinweis: Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für Optimalität.

(b) *[9 Punkte]* Als dritte Anlagemöglichkeit neben den beiden riskanten Wertpapieren A und B aus Aufgabenteil (a) steht dem Investor nunmehr eine risikolose Geldmarktanlage mit einer Verzinsung von $r_0 = 0{,}10$ zur Verfügung.

(i) *[6 Punkte]* Der Investor fordert eine erwartete Portfolio-Rendite in Höhe von 0,16. Welche Investmentgewichte und welche Renditestandardabweichung weist das zugehörige *effiziente* Portfolio R_{eff} auf? Gehen Sie dabei davon aus, dass das Tangentialportfolio T die Koordinaten $\mu_T = 0{,}175$ sowie $\sigma_T = 0{,}106$ besitzt.

(ii) *[1 Punkt]* Der Investor orientiert sich bei der Wahl des optimalen Portfolios an der *Sharpe-Ratio*. Ermitteln Sie dasjenige Portfolio aus *rein riskanten* Anlagen, welches die Sharpe-Ratio maximiert!

(iii) *[2 Punkte]* Unterstellen Sie nun zwei Wertpapiere, deren Renditen perfekt negativ miteinander korreliert sind. Welche Rendite weist das varianzminimale Portfolio auf, wenn Sie arbitrage-freie Märkte unterstellen?

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $R = xR_A + (1-x)R_B$ gilt im vorliegenden Fall

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}(R) = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 = 0{,}09x^2 + 0{,}01(1-x)^2$$

Entsprechend lautet die Bedingung erster Ordnung für das varianzminimale Portfolio

$$0 = \tfrac{d\sigma^2}{dx} = 0{,}18x - 0{,}02(1-x) = 0{,}2x - 0{,}02.$$

Damit folgt

$$x_{\mathrm{MVP}} = 0{,}1.$$

(ii) Mit $R = xR_A + (1-x)R_B$ gilt zunächst

$$\mu := \mathbb{E}[R_P] = x\mu_A + (1-x)\mu_B = 0{,}25x + 0{,}15(1-x) = 0{,}1x + 0{,}15$$

bzw.

$$x = 10\mu - 1{,}5.$$

Aus dem Einsetzen von x in

$$\sigma^2 = 0{,}09x^2 + 0{,}01(1-x)^2$$

aus Aufgabenteil (i) resultiert

$$\sigma^2 = 0{,}09(10\cdot\mu - 1{,}5)^2 + 0{,}01(1 - 10\cdot\mu + 1{,}5)^2.$$

Hieraus ergibt sich insgesamt:

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 3{,}2\mu + 0{,}265.$$

(iii) Mit $R = xR_A + (1-x)R_B$ gilt nach den vorstehenden Ergebnissen für das Präferenzfunktional $U(R) = \mathbb{E}[R] - 2\mathrm{Var}(R)$:

$$U(R) = (0{,}1x + 0{,}15) - 2(0{,}09x^2 + 0{,}01(1-x)^2).$$

Entsprechend lautet die Bedingung erster Ordnung für das präferenzmaximale Portfolio

$$0 = \tfrac{dU}{dx} = 0{,}1 - 2(2\cdot 0{,}09\cdot x - 2\cdot 0{,}01\cdot(1-x)) = 0{,}14 - 0{,}4x.$$

Damit folgt

$$x_{\mathrm{OPT}} = \underline{0{,}35}.$$

(b) (i) Bezeichnet R_T die Rendite des Tangentialportfolios T, so muss gelten

$$R_{\text{eff}} = xr_0 + (1-x)R_T.$$

Hieraus ergibt sich auf Ebene der Erwartungswerte

$$\mu_{\text{eff}} := \mathbb{E}[R_{\text{eff}}] = xr_0 + (1-x)\mathbb{E}[R_T]$$

bzw.

$$\mu_{\text{eff}} = xr_0 + (1-x)\mu_T = x(r_0 - \mu_T) + \mu_T.$$

Aus der Bedingung $\mu_{\text{eff}} = 0{,}16$ folgt dann

$$0{,}175 - 0{,}075x = 0{,}16$$

und damit insgesamt

$$x = \tfrac{0{,}015}{0{,}075} = \underline{0{,}2} \text{ sowie } 1-x = \underline{0{,}8}.$$

Ferner gilt

$$\mathrm{Var}(R_{\text{eff}}) = (1-x)^2\mathrm{Var}(R_T) = (0{,}8 \cdot 0{,}106)^2 = 0{,}0072$$

und damit $\sigma(R_{\text{eff}}) = \underline{0{,}085}$.

Alternative Lösung: Setzen wir die Tangentialgerade in der Form $\mu = r_0 + a\sigma$ an, so gilt insbesondere $\mu_T = r_0 + a\sigma_T$. Mit $\mu_T = 0{,}175$, $r_0 = 0{,}1$ sowie $\sigma_T = 0{,}106$ erhalten wir hieraus den Wert $a = 0{,}7075$.

Auch jedes effiziente Portfolio befindet sich auf der Tangentialgeraden, d. h. es gilt $\mu_{\text{eff}} = r_0 + a\sigma_{\text{eff}}$. Mit $\mu_{\text{eff}} = 0{,}16$, $r_0 = 0{,}1$ sowie $a = 0{,}7075$ erhalten wir hieraus $\sigma_{\text{eff}} = 0{,}0848$.

Setzen wir nun die Rendite R_x eines Mischportfolios allgemein in der Form $R_x = xr_0 + (1-x)R$ an, so erhalten wir hieraus zunächst $\sigma(R_x) = (1-x)\sigma(R)$. Mit $R_x = R_{\text{eff}}$, $R = R_T$, $\sigma(R_{\text{eff}}) = 0{,}0848$ sowie $\sigma(R_T) = 0{,}106$ erhalten wir hieraus $1-x = 0{,}8$ und $x = 0{,}2$.

(ii) Das gesuchte Portfolio ist identisch mit dem Tangentialportfolio.

(iii) Das varianzminimale Portfolio hat in diesem Falle eine Varianz von null, d. h. ist risikolos. Seine Rendite muss in einem arbitrage-freien Markt daher (Law of One Price) identisch mit der risikolosen Verzinsung, d. h. 10%, sein.

Aufgabe 9. *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [15 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Im Rahmen der CAPM-Modellwelt seien für das Marktportfolio R_M die erwartete Rendite und die Rendite-Standardabweichung bekannt:

$$\mathbb{E}[R_M] = 0{,}1,\ \sigma(R_M) = 0{,}5.$$

Der Zins r_0 für die sichere Anlage betrage 5%. Zusätzlich sei bekannt, dass das Portfolio R^* mit $\mathbb{E}[R^*] = 0{,}12$ und $\sigma(R^*) = 0{,}7$ ein *optimales* Portfolio ist.

(i) *[2 Punkte]* Wie lautet allgemein die Gleichung für die Kapitalmarktlinie? Interpretieren Sie diese Gleichung!

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie im CAPM-Gleichgewicht die erwartete Rendite eines Wertpapierportfolios mit einem Beta-Faktor in Höhe von 2 . Welches Hauptresultat des CAPM ist hierbei zu verwenden und wie lautet dieses formelmäßig?

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie im CAPM-Gleichgewicht die Korrelation $\rho(R^*, R_M)$ zwischen den Renditen des optimalen Portfolios R^* und des Marktportfolios. Wie ist dieses Ergebnis inhaltlich begründet?

Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang zwischen Beta-Faktor und Korrelationskoeffizient.

(b) *[6 Punkte]* Gegeben seien die Einperiodenrenditen R_i ($i = 1, \ldots, m$) der Aktien $i = 1, \ldots, m$ sowie eine Indexrendite R_I der Form $R_I = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i$ ($0 \le x_i \le 1$, $i = 1, \ldots, m$; $\sum x_i = 1$).

(i) *[1 Punkt]* Definieren Sie das systematische Risiko S_i von Aktie i in Bezug auf die Indexrendite R_I.

(ii) *[2 Punkte]* In welcher Beziehung stehen die Standardabweichung $\sigma(R_I)$ der Indexrendite R_I und die systematischen Risiken S_i der Aktien i ($i = 1, \ldots, m$)? Interpretieren Sie auf dieser Grundlage das systematische Risiko S_i.

(iii) *[3 Punkte]* Weisen Sie die Beziehung aus Aufgabenteil (ii) nach!

Lösungsskizze:

(a) (i) Es gilt

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R).$$

Die *Kapitalmarktlinie* charakterisiert alle *optimalen* Portfolios im CAPM-Kontext. Im Kapitalmarkt-Gleichgewicht gilt für die optimalen Portfolios ein linearer Zusammenhang: für einen höheren erwarteten (Exzess-)Ertrag muss ein proportional höheres Risiko in Kauf genommen werden.

(ii) Im CAPM-Modell sind *beliebige* Portfolios R durch die *Wertpapiermarktlinie* charakterisiert. Diese lautet:

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \beta_R(\mathbb{E}[R_M] - r_0),$$

wobei $\beta_R = \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ den Beta-Faktor bezeichnet. Für $\beta_R = 2$ berechnet sich im CAPM-Gleichgewicht die erwartete Rendite zu

$$\mathbb{E}[R] = 0{,}05 + 2(0{,}1 - 0{,}05) = \underline{0{,}15}.$$

(iii) Aus der Wertpapiermarktlinie ergibt sich zunächst der Beta-Faktor von R^* zu:

$$\beta_{R^*} = \frac{\mathbb{E}[R^*] - r_0}{\mathbb{E}[R_M] - r_0} = \frac{0{,}12 - 0{,}05}{0{,}1 - 0{,}05} = 1{,}4.$$

Weiterhin folgt aus $\beta_{R^*} = \mathrm{Cov}(R^*, R_M)/\mathrm{Var}(R_M) = \rho(R^*, R_M)\sigma(R^*)/\sigma(R_M)$

$$\rho(R^*, R_M) = \frac{\beta_{R^*}\sigma(R_M)}{\sigma(R^*)} = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}7} = 1.$$

Dies resultiert aus der Tatsache, dass alle optimalen Portfolios im rein riskanten Teil identisch mit dem Marktportfolio sind.

(b) (i) Das systematische Risiko von Aktie i in Bezug auf R_I ist definiert durch

$$S_i = \rho(R_i, R_I)\sigma(R_i).$$

(ii) Es gilt

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^{m} x_i S_i.$$

Damit erfasst S_i den Beitrag von Aktie i zum Risiko des durch den Index I repräsentierten Portfolios.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R_I) = \mathrm{Cov}(R_I, R_I) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i R_i, R_I\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \mathrm{Cov}(R_i, R_I) = \sum x_i \rho(R_i, R_I)\sigma(R_i)\sigma(R_I).\end{aligned}$$

Division der linken und rechten Seite durch $\sigma(R_I)$ ergibt schließlich

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^{m} x_i S_i.$$