Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Oktober 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Gegeben sei die Abbildung $\eta : \mathcal{B}^1 \longrightarrow \{0, 1\}$, $\eta(A) = 1_A(x)$.

(a) *[3 Punkte] Seien paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}^1$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Zeigen Sie, dass*
$$1_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$$
gilt.

(b) *[3 Punkte] Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass η ein Maß auf $\mathcal{B}^1$ ist.*

(c) *[2 Punkte] Bestimmen Sie alle Nullmengen bezüglich η.*

(d) *[16 Punkte] Beweisen Sie: für alle Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt*
$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\eta = f(x).$$

Lösung Aufgabe 1 [3, 3, 2, 16 Punkte]

Zu (a)

$1_A(\omega) = 1 \iff \omega \in A \iff \exists_1 n_0 \in \mathbb{N} : \omega \in A_{n_0} \iff 1_{A_{n_0}}(\omega) = 1, 1_{A_n}(\omega) = 0$ für alle $n \neq n_0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(\omega) = 1_{A_{n_0}}(\omega) = 1$.

Zu (b)

$\eta(\emptyset) = 0$ ist klar. Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}^1$ paarweise disjunkt und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt

$$\eta(A) \quad = \quad 1_A(x) \overset{(a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n).$$

Zu (c)

Sei $A \in \mathcal{B}^1$. Es gilt:

$\eta(A) = 0 \iff 1_A(x) = 0 \iff x \notin A$. Damit ist A genau dann eine Nullmenge, wenn $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x\}$.

Zu (d)

Ist $f \geq 0$ eine Treppenfunktion, d.h. es gibt $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{B}^1$, $i = 1, \ldots, n$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\eta(A_i)}_{=1_{A_i}(x)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = f(x).$$

Ist nun $f \geq 0$, dann sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $f_n \uparrow f$, $f_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\eta = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\eta = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\eta}_{=f_n(x)} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Im allgemeinen Fall sei $f_\pm := \max(0, \pm f) \geq 0$. f_+ und f_- sind messbar, somit gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_+ \, d\eta = f_+(x) \in \mathbb{R} \text{ und } \int_{\mathbb{R}} f_- \, d\eta = f_-(x) \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt wegen $|f| = f_+ + f_-$, dass f integrierbar ist und aus $f = f_+ - f_-$ schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\eta = \int_{\mathbb{R}} f_+ \, d\eta - \int_{\mathbb{R}} f_- \, d\eta = f_+(x) - f_-(x) = f(x).$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

Sei $q \in (0,1)$, $Z : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\}$ mit $P(Z=1) = q$, $P(Z=-1) = 1-q$, $X \sim N(0,1)$, X, Z seien unabhängig und $Y := X \cdot Z$.

(a) [6 Punkte] Beweisen Sie: $Y \sim N(0,1)$.

(b) [7 Punkte] Beweisen Sie: X, Y sind genau dann unkorreliert, wenn $q = \frac{1}{2}$ gilt.

(c) [5 Punkte] Bestimmen Sie $P(X+Y=0)$ und zeigen Sie, dass $X+Y$ keine λ^1-Dichte besitzt.

(d) [3 Punkte] Sei $q = \frac{1}{2}$. Sind X, Y unabhängig?

(e) [3 Punkte] Ist (X, Y) zweidimensional normalverteilt?

Lösung Aufgabe 2 [(a) 6, (b) 7, (c) 5, (d) 3, (e) 3]

Zu (a)

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) = P(XZ \leq y) &= P(XZ \leq y, Z=1) + P(XZ \leq y, Z=-1) \\ &= P(X \leq y, Z=1) + P(-X \leq y, Z=-1) \\ &\overset{X,Z \text{ unabh.}}{=} q\Phi(y) + (1-q)(1-\Phi(-y)) \\ &= q\Phi(y) + (1-q)(1-(1-\Phi(y))) \\ &= \Phi(y), \end{aligned}$$

mit Φ Verteilungsfunktion von $N(0,1)$.

Zu (b)

Aus der Definition von Y, der Unabhängigkeit von X und Z sowie $Var(X) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^2Z) - E(X)E(XZ) \\ &= E(X^2)E(Z) - E(X)E(X)E(Z) = Var(X)E(Z) = E(Z). \end{aligned}$$

Damit gilt $Cov(X,Y) = 0$ genau dann, wenn $E(Z) = 0$. Dies ist wegen

$$E(Z) = q - (1-q) = 2q - 1$$

genau dann der Fall, wenn $q = \frac{1}{2}$ gilt.

Zu (c)

Es gilt

$$X + Y = \begin{cases} 2X & Z = 1 \\ 0 & Z = -1 \end{cases}$$

also $P(X+Y=0) = 1-q > 0$, d.h. $X+Y$ besitzt keine λ^1-Dichte, denn dann müsste $P(X+Y=0) = 0$ gelten.

Zu (d)

Angenommen X, Y sind unabhängig. Da $X, Y \sim N(0,1)$ wäre $X+Y \sim N(0,2)$, hätte also eine Dichte. Dies ist ein Widersruch zu (c).

Zu (e)

Nein, (X,Y) ist nicht zweidimensional normalverteilt. Würde das zutreffen, dann wäre $X+Y$ als Linearkombination von X und Y normalverteilt. Dies ist ein Widerspruch zu (c).

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Für einen Versicherungsvertrag (in einem inhomogenen Bestand) bezeichne T die zufällige Dauer des Vertrages und N die zufällige Anzahl der gemeldeten Schäden. Es wird angenommen,

- *dass die bedingte Verteilung von N gegeben T die Verteilung $Poi(\alpha e^{-T})$ mit $\alpha > 0$ ist und*
- *dass $T \sim Exp(1)$ gilt.*

(a) [4 Punkte] Bestimmen Sie $E\left(e^{-kT}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) [8 Punkte] Bestimmen Sie $E(N|T)$ und $Var(N|T)$.

(c) [6 Punkte] Bestimmen Sie $E(N)$ und $Var(N)$.

(d) *[4 Punkte] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Versicherungsnehmer mindestens einen Schaden meldet.*
Hinweis: $\exp(-\alpha e^{-t})' = \exp(-\alpha e^{-t})\alpha e^{-t}$.

(e) *[2 Punkte] Sind N und T unabhängig?*

Lösung Aufgabe 3 [(a) 4, (b) 8, (c) 6, (d) 4, (e) 2]

Zu (a)

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$E\left(e^{-kT}\right) = \int_0^\infty e^{-(k+1)t}\,dt = \frac{1}{k+1}.$$

Zu (b)

Aus den Eigenschaften der Poisson-Verteilung ergibt sich

$$Var(N|T) = E(N|T) = \alpha e^{-T}.$$

Zu (c)

Mit dem Satz vom iterierten Erwartungswert gilt

$$E(N) = E(E(N|T)), \quad Var(N) = Var(E(N|T)) + E(Var(N|T)).$$

Somit folgt mit (a) und (b)

$$\begin{aligned} E(N) &= E(\alpha e^{-T}) = \frac{\alpha}{2} \\ Var(N) &= Var(\alpha e^{-T}) + E(\alpha e^{-T}) \\ &= \alpha^2 E(e^{-2T}) - \alpha^2 E(e^{-T})^2 + \alpha E(e^{-T}) \\ &= \alpha^2 \cdot \frac{1}{3} - \alpha^2 \cdot \frac{1}{4} + \alpha \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Zu (d)

Laut Annahme gilt $P(N = 0|T = t) = \exp(-\alpha e^{-t})$. Somit folgt

$$P(N = 0) \;=\; E[P(N = 0|T)] = E[\exp(-\alpha e^{-T})] = \int_0^\infty \underbrace{\exp(-\alpha e^{-t})e^{-t}}_{=-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha e^{-t})'}\,dt = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}).$$

Damit erhält man $P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha})$.

Zu (e)

Wegen $E(N) = \frac{a}{2} \neq E(N|T) = ae^{-aT}$ sind N, T nicht unabhängig, da hier andernfalls Gleichheit gelten würde.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Seien $X \sim N(1,\theta)$ und $Y \sim N\left(1, \frac{1}{\theta}\right)$ mit $\theta > 0$ unabhängig. Es seien jeweils Stichproben vom Umfang n durch unabhängige Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ von X bzw. Y gegeben.

(a) [18 Punkte] Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ unter Verwendung der Daten aus beiden Stichproben.

(b) [6 Punkte] Beweisen Sie, dass $\hat{\hat{\theta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

Lösung Aufgabe 4 [(a) 18, (b) 6]

Zu (a) Wegen der Unabhängigkeit ist die Likelihood gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-1)^2}{\theta}\right)\right] \cdot \left[\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_i-1)^2\theta\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i-1)^2\theta\right). \end{aligned}$$

Somit folgt für $\ell := \ln L$

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= -n\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i-1)^2}{\theta} + (y_i-1)^2\theta\right) \\ \ell'(\theta) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i-1)^2}{\theta^2} - (y_i-1)^2\right) \\ \ell''(\theta) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-1)^2}{\theta^3} < 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich durch Nullsetzen und Auflösen

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-1)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i-1)^2}}$$

und mit ℓ'' folgt, dass in $\hat{\theta}$ ein Maximum vorliegt. Dies ist der gesuchte Schätzer.

Zu (b)

Wegen $E(X_i) = 1$, $Var(X_i) = \theta$ gilt

$$E\left(\hat{\hat{\theta}}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left((X_i-1)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n}n\theta = \theta.$$

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Im Rahmen einer Studie über die Sinnhaftigkeit von Motivationsschreiben bei der Auswahl von Studierenden werden bei einer Prüfung die folgenden Daten erhoben:

	Motivationsschreiben	
	ohne	mit
Mittelwert der erreichten Punkte	42	56
empirische Standardabweichung der erreichten Punkte	19	20
Anzahl der Studierenden	220	30
Bestanden	141	26

Es wird angenommen, dass für die Anzahl der erreichten Punkte $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ in jeder Gruppe gilt, wobei X_1 bzw. X_2 die erreichte Punkteanzahl der Studierenden ohne bzw. mit Motivationsschreiben ist.

Am Ende der Aufgabe finden Sie eine Tabelle mit Quantilen.

(a) *Wird die Hypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ zu einem Niveau von 5 % verworfen?*

(b) *Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese, $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ gegen die Alternative $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.*

(c) *Sei p_1 bzw. p_2 die Wahrscheinlichkeit des Bestehens der Prüfung für Studierende mit bzw. ohne Motivationsschreiben.*

   (i) *Bestimmen Sie approximative 95 % Schätzintervalle für p_1 und p_2.*

   (ii) *Erläutern Sie das Ergebnis im Vergleich zu (b).*

Quantile der $F_{m,n}$-Verteilung

m	n	p: 0,025	0,05	0,95	0,0975
29	219	0.54017	0.59828	1.51941	1.64407
29	220	0.54023	0.59833	1.51918	1.64376
30	219	0.54608	0.60368	1.51141	1.63383
30	220	0.54613	0.60373	1.51118	1.63352

Lösung Aufgabe 5 [(a) 6, (b) 4, (c) 7, (d) 7]

Zu (a)

Zu prüfen ist die Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_1^2$ gegen $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_1^2$. Es wird der F-Test verwendet. Der Wert der Testgröße ist

$$t = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20^2}{19^2} \approx 1,11$$

und wegen $F_{29;19;0,975} = 1.64407 > t$ und $F_{29;219;0,025} = 0,54017 < t$ wird H_0 nicht verworfen.

Zu (b)

Es handelt sich um einen zwei-Stichproben t-Test. Die Testgröße ist

$$T(x,y) = \frac{\overline{y} - \overline{x}}{s}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \qquad s^2 := \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{m+n-2}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$s^2 = \frac{219 \cdot 19^2 + 29 \cdot 20^2}{248} = 365,56$$
$$t = \frac{56-42}{s}\sqrt{\frac{220 \cdot 30}{250}} = 3,76.$$

H_0 wird abgelehnt, falls $t > t_{248;0,95} \approx 1,64$. Somit wird H_0 verworfen.

Zu (c)

(i) Es ergibt sich $\hat{p}_1 = 0,64$ und $\hat{p}_2 = 0,87$. Die approximativen Schätzintervalle ergeben sich aus der Formelsammlung

$$\left[\hat{p} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

Einsetzen mit $\alpha = 0,05$ und $u_{0,975} = 1,96$ ergibt $[0,58,\ 0,7]$ für p_1 und $[0,75,\ 0,99]$ für p_2:

$$\left[0,64 - 1,96\sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{220}},\ 0,64 + 1,96\sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{220}}\right] = [0,58,\ 0,7]$$
$$\left[0,87 - 1,96\sqrt{\frac{0,87 \cdot 0,13}{30}},\ 0,87 + 1,96\sqrt{\frac{0,87 \cdot 0,13}{30}}\right] = [0,75,\ 0,99]$$

(ii) Das Auswahlgespräch wirkt sich positiv auf die Bestehenswahrscheinlichkeit aus. Auch die im Mittel erreichte Punkteanzahl ist bei Studierenden mit Auswahlgespräch höher. Die Irrtumswahrscheinlichkeit für letzte Aussage beträgt 5%.