Reinsurance-Pricing

DAA-Workshop für junge Mathematiker
Tagungsstätte Loccum 27. und 28. September 2013

Prof. Dr. Michael Fröhlich

26. September 2013

Agenda

1. Introduction
2. Experience Pricing - BC methods and examples
3. Exposure Pricing (Casualty and Property)
4. Probabilistic Methods (Frequency / Severity models)
5. Conclusion

1. Introduction

In the following we exclusively consider **per risk Excess of Loss treaties (per risk XLs)**. This is a special **non-proportional reinsurance contract**: The distribution of each loss between **cedant (insurer)** and **reinsurer** isn't proportional but depends on the respective loss size.

Priority (Deductible) = Retention of the cedant and **Limit (Coverage) = maximum excess-loss for the reinsurer** are the most important characterizing parameters of an XL.

Common description of an (per risk) XL:

Limit after / in excess of / xs **Priority**,
e.g. 3.000.000 EUR xs 1.000.000 EUR.

XL Pricing = XL Quotation = Calculation of XL Net Premium = Calculation of **XL Risk Premium** =
Expected XL-loss amount for the forthcoming year =
(Expected XL severity) * (Expected XL frequency).

1. Introduction

Reinsurance is all about peak risks or risk volatility on:

Severity, Claims frequency or both (Aggregate loss amount)

Mathematics and Statistics help:

1.) To decompose information available and to analyze all.
2.) To recompose results into a synthesis.
3.) Translate results into economic and business interpretations.

Pricing Approach needs to be:

1.) Accurate and reproducible (even if little information).
2.) Flexible (quantitative and qualitative information)
3.) Easy to communicate and to disclose.

Ideal World:

1.) Stable portfolio, claims frequency, average loss amount.
2.) Stable underwriter / actuary judgement.

2. One year Burning Cost of accident year i

Let N_i be the number of losses to the treaty per accident year i.

Let $L_{i,k}$ be the k^{th} loss to the treaty in accident year i.

Let P_i be the Volume (e.g. premium, number of policies, aggregate sum insureds, exposed premium) of accident year i.

The Burning Cost BC_i of accident year i is defined as

$$BC_i := \sum_{k=1}^{N_i} \frac{L_{i,k}}{P_i}.$$

2. BC multi-year calculation: Several definitions

Same estimator over a longer period = weighted average

Given n accident years. Let N_i be the number of losses to the treaty per accident year i.

Let $L_{i,k}$ be the k^{th} loss to the treaty in accident year i.

Let P_i be the Volume (e.g. premium, number of policies, aggregate sum insureds, exposed premium) of accident year i.

The Burning Cost BC of the accident years 1 to n is defined as

$$BC := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N_i} \frac{L_{i,k}}{P_i} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \right) \cdot BC_i \right].$$

2. BC: Split between frequency and average cost:

$$BC = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{P_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} \right) \cdot \left(\frac{N_i}{P_i} \right) \cdot \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_i} L_{i,k}}{N_i} \right) \right].$$

$\frac{P_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}$ are weights to consider portfolio growth development.

$\frac{N_i}{P_i}$ represents the claims frequency in the accident year i.

$\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_i} L_{i,k}}{N_i}$ represents the average loss to the treaty in the ay i.

2. Burning Cost improving evaluation

Accuracy: Portfolio risk volume could be modeled by information other than premium:

1.) Exposed Premium (i.e. $\neq$ ratable premium)
2.) Number of risks
3.) Total sum insureds

Weights can be allocated to each accident year to reflect data reliability, portfolio changes etc.

Trends adjustments on:

1.) Claims Frequency
2.) Average Claim Amounts
3.) ...and to reflect portfolio specificities.

As with all BC analysis, prior to applying historic losses to the XL, these must be trended for claims inflation, developed for IBNR/IBNER and adjusted on-level for changes in exposure between the loss years.

3. Exposurequotierung in der Sachversicherung

In der Sachversicherung sind Versicherungsverträge in der Regel auf PML-Basis gegeben. Ein PML kann als Mass für die Höhe eines Risikos angesehen werden. Die Aufteilung der Originalprämie erfolgt in diesem Fall anhand sogenannter **Exposurekurven**.

Für die verschiedenen Geschäftssegmente bzw. Risikoarten stehen diverse Exposurekurven zur Verfügung. Die richtige Auswahl der zu dem Portefeuille passenden Kurven hat wesentlichen Einfluss auf die korrekte Kalkulation der Prämie.

Die in der Praxis am häufigsten verwendeten Exposurekurven entstehen durch die Auswertung der Schadenhistorie grosser Portefeuilles.

3. Exposurequotierung in der Sachversicherung

In der Sachversicherung wird davon ausgegangen, dass Risiken der gleichen Risikogruppe dieselbe Verteilung

$$G(w) = P(Y_i \leq w) = P(\frac{X_i}{PML_i} \leq w)$$

der Schadengrade $Y_i := \frac{X_i}{PML_i}$ besitzen.

Es werden oft seit Jahrzehnten die gleichen Exposurekurven verwendet. So entstanden zum Beispiel die von Peter Gasser entwickelten Swiss Re Kurven aus Schadenstatistiken der Jahre 1959-1967. Das beste Argument für die fortdauernde Anwendung dieser Kurven ist die Tatsache, dass sie sich in der Praxis seit jeher bewährt haben - und das sogar weltweit.

3. Exposurequotierung in der Sachversicherung

Der RV ermittelt also lediglich einen Anteil an der vom EV kalkulierten Originalprämie. Dies birgt die Gefahr, dass bei unzureichender Originalprämie auch eine nicht ausreichende Rückversicherungsprämie verlangt wird. Um dies zu vermeiden, kann der RV die berechnende Prämie mit dem Faktor SQ (**erwartete** Schadenquote) korrigieren.

In der vorstehenden Formel wird anstelle der PMLs der einzelnen Risiken (sind aufgrund der Klassenbildung nicht bekannt) die jeweilige PML-Bandmitte gewählt und somit die Annahme getroffen, dass die PMLs der einzelnen Risiken innerhalb eines Bandes einer Gleichverteilung folgen.

3. Exposurequotierung in der Sachversicherung

Stetige Darstellung der Exposurekurven nach Bernegger

Ursprünglich sind Exposurekurven als diskrete Kurven gegeben, und die Zwischenwerte werden interpoliert. Stefan Bernegger gelang es, eine einparametrische, stetige Funktionenschar zu finden, die sich mit den bekannten Exposurekurven erstaunlich gut deckt. Die Funktion ist definiert durch

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} x, & g = 1 \vee b = 0 \\ \frac{\ln(1+(g-1)x)}{\ln(g)}, & b = 1\ ,\ g > 1 \\ \frac{1-b^x}{1-b}, & bg = 1\ ,\ g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b+(1-gb)b^x}{1-b}\right)}{\ln(gb)}, & b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ bg \neq 1\ ,\ g > 1. \end{cases}$$

3. Exposurequotierung in der Sachversicherung

Die beiden Parameter b und g lassen sich durch den Parameter c eindeutig beschreiben:

$$b_c = b(c) = e^{3{,}1-0{,}15(1+c)c} \quad g_c = g(c) = e^{(0{,}78+0{,}12c)c}.$$

Bei der Implementierung kann man sich auf den letzten Ast der Funktion beschränken, da alle plausiblen Eingabewerte des Parameters c für Exposurekurven in diesem Fall abgedeckt werden.

Die vier Kurven, die durch die Parameter $c \in \{1.5, 2, 3, 4\}$ definiert sind, entsprechen nach Bernegger näherungsweise den Swiss Re Kurven 1-4. Diese Werte sind zwar einfach zu merken, noch besser im Sinne der kleinsten Abweichungsquadrate werden die vier Kurven allerdings durch die Parameter $c \in \{1.64, 1.94, 2.88, 3.88\}$ beschrieben.

3. Exposurequotierung in der Haftpflichtversicherung

Die Haftpflichtversicherung (**Liability, Casualty**) gehört im Gegensatz zur Sachversicherung der Longtail-Branche an. Die Schadenaufwände werden, anders als in der Shorttail-Branche, nicht direkt nach Eintritt des Schadens bekannt.

Eine Möglichkeit, dennoch eine risikogerechte Prämie für einen XL in der allgemeinen Haftpflicht zu ermitteln, zeigen Mack und Fackler 2003. Ihre Überlegungen basieren auf einem Ansatz von Prof.Dr. Paul Riebesell, einem Pionier der deutschen Versicherungswirtschaft. Bereits 1936 formulierte er die von ihm intuitiv aufgestellte Theorie der Zuschlagsquotierung mit einem konstanten Zuschlagsfaktor.

3. Exposurequotierung in der Haftpflichtversicherung

Ausgehend von einem Basispolicenlimit v_0, zugehöriger Basisprämie $b(v_0) = b_0$ und Zuschlagsfaktor z für eine Verdopplung der Deckungssumme ergibt sich für alle Policenlimits $v > 0$ die berühmte **Formel von Riebesell**:

$$b(v) = b_0(1+z)^{log_2(\frac{v}{v_0})} = b_0(\frac{v}{v_0})^{log_2(1+z)}.$$

Wäre Riebesells Prämienfunktion b als Kollektives Modell darstellbar,

müsste für alle Policenlimits v die Gleichung

$$b(v) = E(N) \cdot E(\min(X, v))$$

erfüllt sein, und für den Schadenentlastungskoeffizienten des Risikos i gelte dann:

$$r_i(p) = \frac{E(\min(X, p))}{E(\min(X, v_i))} = \frac{b(p)}{b(v_i)} = (\frac{p}{v_i})^{log_2(1+z)}.$$

3. Exposurequotierung in der Haftpflichtversicherung

Die Darstellung von Riebesells Prämienfunktion als Kollektives Model führt jedoch zu Widersprüchen. Dennoch wurde die Formel aus Mangel an Alternativen über Jahrzehnte angewendet.

Die Schadenentlastungskurven, die sich durch Riebesells Prämienfunktion b ergeben, können wie die im vorherigen Kapitel vorgestellten Exposurekurven interpretiert werden. Sie besitzen die gleichen Eigenschaften, und die Prämienberechnung erfolgt anschliessend analog.

Mack und Fackler fanden 2003 einen Weg, die Prämienfunktion b im Kollektiven Modell darzustellen, so dass Riebesells System daher als einfache theoretische fundierte Möglichkeit der Haftpflicht-Exposurequotierung angesehen werden kann.

4. XL-Frequency / XL-Severity - Collective Model

Definition of the **Collective Model** in respect of an XL:

Let N be a discrete random variable modelling the XL-loss frequency of given XL in a one-year period and $X_1, X_2, ..., X_n$ continuous random variables modelling the single XL-loss severities of given XL in an one-year period, i.i.d and independent from N.

Then we get for the random variable $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$E(S) = E(N) \cdot E(X_i).$$

$E(S)$ is equivalent to the calculated risk premium for the XL.

4. Severity Modeling, Pareto distribution

Useful Properties:

Fat tail distribution properties (mean-excess function $f(P) = E(X - P \mid X > P)$ is linear and increases strictly).

Risk characteristics defined by one real parameter α. Maximum Likelihood estimation for the parameter α always possible in case of given loss history.

Easy to interpret and communicate.

Graphical assessment: $P(X > x) = (x_0/x)^{\alpha}$.

Benchmark exists per LoB and / or markets (experienced values for α), e.g.

a) Property personal lines: $\alpha = 1.5 - 1.9$ (depending on sum insured).
b) MTPL line of business: $\alpha = 2.0 - 2.5$ (depending on markets).

4. Severity Modeling, more sophisticated distributions

Generalized Beta distribution, e.g. applied in the RMS-Model

Many distributions are special cases of the GB distribution.

Generic: Covers a large family of distribution functions.

Complex: 1+4 parameters, which are not easy to interpret.

$$P(X \leq x) = B(\alpha, \beta, \frac{(x - x_0)^\rho}{(x - x_0)^\rho + \omega}).$$

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\gamma u^{\beta-1}(1 - u)^{\alpha-1} du.$$

4. Frequency Modeling, Poisson or Negative Binomial?

How volatile is the claims frequency?

Poisson: Easy to parameterise and addtive iro convolution $P(a) + P(b) = P(a + b)$. But variance equal to the mean - hold only in fire insurance on a property book (maybe...).

Neg. Binomial: Generalisation of Poisson, longer tail and greater variance. When modelling working-XL mono-line liability using NB with variance of around three times the mean wouldn't be unusual.

If $\frac{Var(X)}{E(X)} \leq 1$: Poisson distribution P(λ).

If $\frac{Var(X)}{E(X)} > 1$: Neg. Binomial = Poisson distribution P(λ) with

$$\lambda \simeq \Gamma(\alpha = \frac{E(X)}{\beta}; \beta = \frac{Var(X)}{E(X)} - 1).$$

Variance and Expected Loss frequency need to be a volume-weighted estimation.

4. Monte Carlo Simulation

Generalized Quantil-function:

$$F^{-1}(u) := inf\{x \in R \mid F(x) \geq u\}, \quad u \in [0,1].$$

Simulation-Theorem: Let U be an $U(0,1)$-distributed random variable and $F : R \to R$ a distribution function of a random variable X. Then $Y := F^{-1}(U)$ is a real random variable with distribution function F.

Pareto example:

$$F(x) = u = 1 - (\frac{x_{min}}{x})^{\alpha}$$

$$x = F^{-1}(u) = \frac{x_{min}}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

5. Conclusion

Find the balance between model complexity and realism

Main advantages of simple mathematical models: Focus on trends detection and calibration; economic interpretation (and control of assumptions); communication.

Mixing simple models ensures accuracy and ease of interpretation.

Long tail business would need

Sophisticated mathematical approach for individual IBNR and IBNER.
Taking into account superimposed inflation for personal injury.
Risk premium calculation on present value basis (investment gains).

Actuarial and underwriting judgements are complementary to mathematical approaches.

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

Albert Einstein