

Dynamische Portfolio-Optimierung mit partieller Information und beschränktem Ausfallrisiko

Ralf Wunderlich

Brandenburgische Technische Universität Cottbus

gemeinsam mit Jörn Sass (TU Kaiserslautern)
 Abdelali Gabih (Uni Marrakesch, Marokko)
 Rüdiger Frey (Uni Leipzig)

DAA-Workshop für junge Mathematikerinnen und Mathematiker
Loccum, 19.-20. August 2011

Aufgabenstellung

Finanzmarkt

mit riskanten und risikolosen Wertpapieren
zeitstetig, kontinuierliches Handeln

Aufgabenstellung

- Finanzmarkt** mit riskanten und risikolosen Wertpapieren
zeitstetig, kontinuierliches Handeln
- Startkapital** $x_0 > 0$
- Anlagezeitraum** $[0, T]$
- Ziel** maximaler mittlerer Nutzen des Endvermögens
Beschränkung des Ausfallrisikos

Aufgabenstellung

Finanzmarkt	mit riskanten und risikolosen Wertpapieren zeitstetig, kontinuierliches Handeln
Startkapital	$x_0 > 0$
Anlagezeitraum	$[0, T]$
Ziel	maximaler mittlerer Nutzen des Endvermögens Beschränkung des Ausfallrisikos
Aufgabe	Bestimmung einer optimalen Anlagestrategie

Aufgabenstellung

- Finanzmarkt** mit riskanten und risikolosen Wertpapieren
zeitstetig, kontinuierliches Handeln
- Startkapital** $x_0 > 0$
- Anlagezeitraum** $[0, T]$
- Ziel** maximaler mittlerer Nutzen des Endvermögens
Beschränkung des Ausfallrisikos
- Aufgabe** Bestimmung einer **optimalen Anlagestrategie**
Wie viele Anteile
von **welchem** Wertpapier
sind **wann** zu halten **?**

Klassisches Black-Scholes Modell

Bond

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \quad \implies \text{Bondpreis } B_t = e^{rt}$$

r risikoloser stetiger Zinssatz

Klassisches Black-Scholes Modell

Bond

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \quad \implies \text{Bondpreis } B_t = e^{rt}$$

r risikoloser stetiger Zinssatz

Aktie

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = 1$$

Aktienpreis $S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0, T]$

W_t Wiener-Prozess,

μ mittlere Aktienrendite, Drift; σ Volatilität

Klassisches Black-Scholes Modell

Bond $dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \implies$ Bondpreis $B_t = e^{rt}$
 r risikoloser stetiger Zinssatz

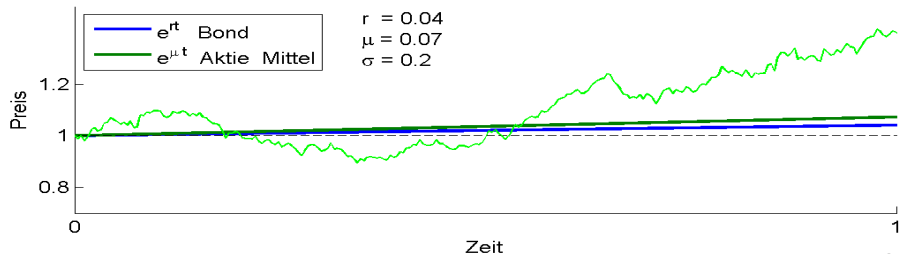
Aktie Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = 1$$

$$\text{Aktienpreis } S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0, T]$$

W_t Wiener-Prozess,

μ mittlere Aktienrendite, Drift; σ Volatilität



Klassisches Black-Scholes Modell

Bond $dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \implies$ Bondpreis $B_t = e^{rt}$
 r risikoloser stetiger Zinssatz

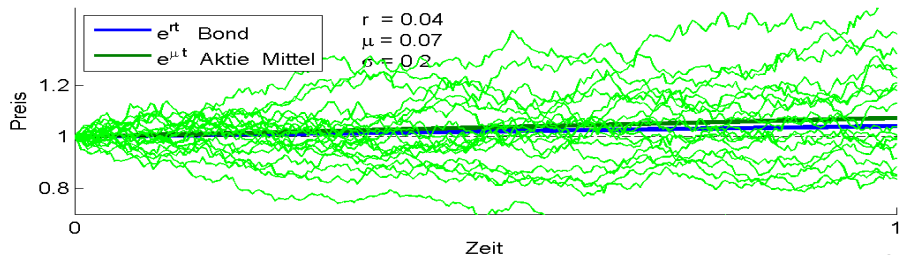
Aktie Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = 1$$

$$\text{Aktienpreis } S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0, T]$$

W_t Wiener-Prozess,

μ mittlere Aktienrendite, Drift; σ Volatilität



Klassisches Black-Scholes Modell

Bond

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \quad \implies \text{Bondpreis } B_t = e^{rt}$$

r risikoloser stetiger Zinssatz

Aktie

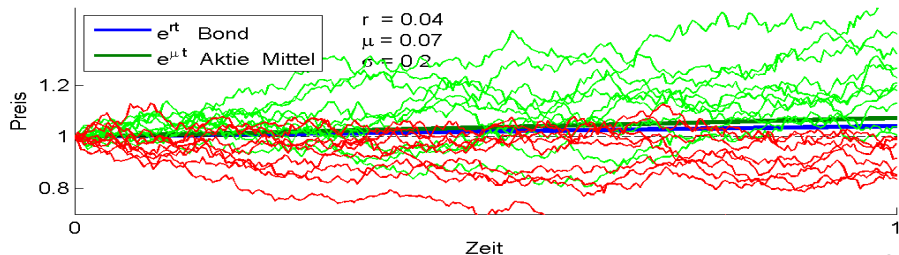
Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = 1$$

$$\text{Aktienpreis } S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0, T]$$

W_t Wiener-Prozess,

μ mittlere Aktienrendite, Drift; σ Volatilität



Klassisches Black-Scholes Modell

Bond $dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \implies$ Bondpreis $B_t = e^{rt}$
 r risikoloser stetiger Zinssatz

Aktie Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$
 $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = 1$
Aktienpreis $S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0, T]$
 W_t Wiener-Prozess,
 μ mittlere Aktienrendite, Drift; σ Volatilität

Annahme μ und σ sind konstant und bekannt

allgemeiner $n \geq 1$ Aktien mit korrelierten Preisprozessen S_t^1, \dots, S_t^n
 $dS_t = \text{Diag}(S_t) (\mu dt + \sigma dW_t)$

Portfolio

Anfangskapital

$$X_0 = x_0 > 0$$

Vermögen zur Zeit t

$$X_t = \underbrace{\pi_t^0}_{\text{Bond}} + \underbrace{\pi_t^1}_{\text{Aktie 1}} + \dots + \underbrace{\pi_t^n}_{\text{Aktie n}}$$

$$\pi_t^k = \text{Anzahl Aktien} \times \text{Preis } S_t^k, \quad k = 1, \dots, n$$

Strategie

$$\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^n)^\top$$

Portfolio

Anfangskapital $X_0 = x_0 > 0$

Vermögen zur Zeit t $X_t = \underbrace{\pi_t^0}_{\text{Bond}} + \underbrace{\pi_t^1}_{\text{Aktie 1}} + \dots + \underbrace{\pi_t^n}_{\text{Aktie n}}$

$\pi_t^k = \text{Anzahl Aktien} \times \text{Preis } S_t^k, k = 1, \dots, n$

Strategie

$$\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^n)^\top$$

Selbstfinanzierungsbedingung und Annahme $r = 0 \Rightarrow$

Vermögensgleichung

X_t^π genügt **linearer stochastischer DGL** mit Anfangswert x_0

$$dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t)$$

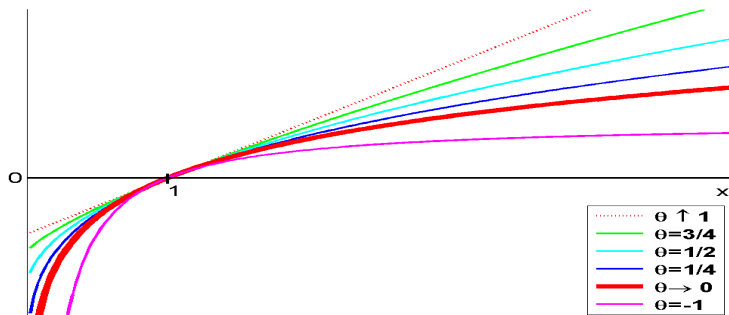
$$X_0^\pi = x_0$$

Nutzenfunktion

$U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ streng monoton wachsend, konkav

$U(x)$ bewertet „Nutzen“ des Endvermögens X_T

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^\theta}{\theta} & \text{for } \theta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\} \quad \text{power utility} \\ \log x & \text{for } \theta = 0 \quad \text{log-utility} \end{cases}$$



Klassische Optimierungsaufgabe

Vermögensgleichung $dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0^\pi = x_0$

Strategie $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$

Klassische Optimierungsaufgabe

Vermögensgleichung $dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0^\pi = x_0$

Strategie $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$

Zulässige Strategien $\mathcal{A}(x_0) = \{(\pi_t) : \text{Integrabilitätsbedingungen, } X_t^\pi \geq 0, \forall t \in [0, T]\}$

Klassische Optimierungsaufgabe

Vermögensgleichung $dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0^\pi = x_0$

Strategie $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$

Zulässige Strategien $\mathcal{A}(x_0) = \{(\pi_t) : \text{Integrabilitätsbedingungen, } X_t^\pi \geq 0, \forall t \in [0, T]\}$

Optimierungsaufgabe

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E [U(X_T^\pi)]$$

Klassische Optimierungsaufgabe

Vermögensgleichung $dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0^\pi = x_0$

Strategie $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$

Zulässige Strategien $\mathcal{A}(x_0) = \{(\pi_t) : \text{Integrabilitätsbedingungen, } X_t^\pi \geq 0, \forall t \in [0, T]\}$

Optimierungsaufgabe

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)]$$

Lösung optimaler Wertanteil $\frac{1}{X_t^*} \pi_t^* = \frac{1}{1 - \theta} (\sigma \sigma^\top)^{-1} \mu = \text{const}$

Merton (1969, 1973)

Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1997

Probleme der Merton-Strategie

- Merton-Strategien besitzen oft ein hohes **Ausfallrisiko**

Hohe Wahrscheinlichkeiten für kleine Endvermögen, z.B.

$$X_T^* < x_0 \quad \text{Anfangskapital}$$

$$X_T^* < x_0 e^{rT} \quad \text{Endwert einer risikolosen Anlage}$$

Probleme der Merton-Strategie

- Merton-Strategien besitzen oft ein hohes **Ausfallrisiko**

Hohe Wahrscheinlichkeiten für kleine Endvermögen, z.B.

$$X_T^* < x_0 \quad \text{Anfangskapital}$$

$$X_T^* < x_0 e^{rT} \quad \text{Endwert einer risikolosen Anlage}$$

⇒ **Optimierung unter beschränktem Ausfallrisiko**

mit A. Gabih (Marrakesch)

Probleme der Merton-Strategie

- Merton-Strategien besitzen oft ein hohes **Ausfallrisiko**

Hohe Wahrscheinlichkeiten für kleine Endvermögen, z.B.

$$X_T^* < x_0 \quad \text{Anfangskapital}$$

$$X_T^* < x_0 e^{rT} \quad \text{Endwert einer risikolosen Anlage}$$

⇒ **Optimierung unter beschränktem Ausfallrisiko**

mit A. Gabih (Marrakesch)

- Drift μ **ist sehr schwierig zu schätzen**

benötigen Beobachtungen über lange Zeiträume

Probleme der Merton-Strategie

- Merton-Strategien besitzen oft ein hohes **Ausfallrisiko**

Hohe Wahrscheinlichkeiten für kleine Endvermögen, z.B.

$$X_T^* < x_0 \quad \text{Anfangskapital}$$

$$X_T^* < x_0 e^{rT} \quad \text{Endwert einer risikolosen Anlage}$$

⇒ **Optimierung unter beschränktem Ausfallrisiko**

mit A. Gabih (Marrakesch)

- Drift μ **ist sehr schwierig zu schätzen**

benötigen Beobachtungen über lange Zeiträume

ist nicht konstant

abhängig vom Zustand der Ökonomie

Probleme der Merton-Strategie

- Merton-Strategien besitzen oft ein hohes **Ausfallrisiko**

Hohe Wahrscheinlichkeiten für kleine Endvermögen, z.B.

$$X_T^* < x_0 \quad \text{Anfangskapital}$$

$$X_T^* < x_0 e^{rT} \quad \text{Endwert einer risikolosen Anlage}$$

⇒ **Optimierung unter beschränktem Ausfallrisiko**

mit A. Gabih (Marrakesch)

- Drift μ **ist sehr schwierig zu schätzen**

benötigen Beobachtungen über lange Zeiträume

ist nicht konstant

abhängig vom Zustand der Ökonomie

⇒ **Modell mit zufälliger, nicht beobachtbarer Drift μ**

mit J. Sass (Kaiserslautern), R. Frey (Leipzig)

Ausfallrisiko

Vergleichen Endvermögen X_T mit Ausfallschranke (Benchmark) q

z.B. $q \sim x_0$ Anfangskapital

Ausfall falls $X_T < q$

Ausfallrisiko

Vergleichen Endvermögen X_T mit Ausfallschranke (Benchmark) q

z.B. $q \sim x_0$ Anfangskapital

Ausfall falls $X_T < q$

Verlust $(X_T - q)^- = \begin{cases} q - X_T & \text{falls } X_T < q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ausfallrisiko

Vergleichen Endvermögen X_T mit Ausfallschranke (Benchmark) q

z.B. $q \sim x_0$ Anfangskapital

Ausfall falls $X_T < q$

Verlust $(X_T - q)^- = \begin{cases} q - X_T & \text{falls } X_T < q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Risikomaß $\rho = E_Q[(X_T - q)^-]$ mit $Q \sim P$ Expected Loss

Ausfallrisiko

Vergleichen Endvermögen X_T mit Ausfallschranke (Benchmark) q

z.B. $q \sim x_0$ Anfangskapital

Ausfall falls $X_T < q$

Verlust $(X_T - q)^- = \begin{cases} q - X_T & \text{falls } X_T < q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Risikomaß $\rho = E_Q[(X_T - q)^-]$ mit $Q \sim P$ Expected Loss

Spezialfälle

- $Q = P$ **Future** Expected Loss (FEL)

$$\rho = E[(X_T - q)^-]$$

Ausfallrisiko

Vergleichen Endvermögen X_T mit Ausfallschranke (Benchmark) q

z.B. $q \sim x_0$ Anfangskapital

Ausfall falls $X_T < q$

Verlust $(X_T - q)^- = \begin{cases} q - X_T & \text{falls } X_T < q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

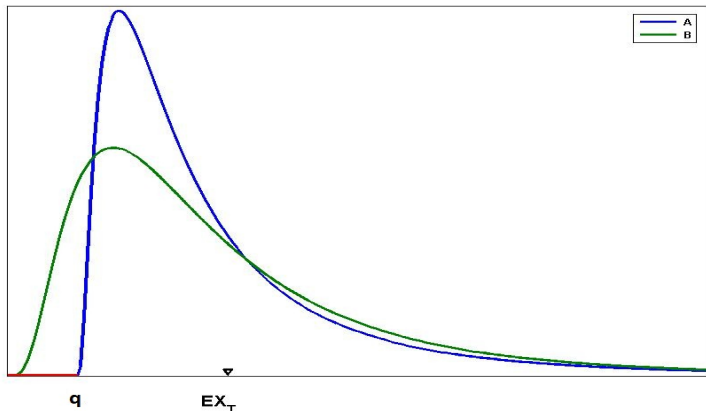
Risikomaß $\rho = E_Q [(X_T - q)^-]$ mit $Q \sim P$ Expected Loss

Spezialfälle

- $Q = P$ **Future** Expected Loss (FEL)
 $\rho = E [(X_T - q)^-]$
- $Q = \tilde{P}$ (Martingalmaß) **Present** Expected Loss (PEL)
 $\rho = \tilde{E} [(X_T - q)^-]$ Optionspreis

Ausfallrisiko

Varianz ist kein geeignetes Maß für das Ausfallrisiko



X_T^A und X_T^B besitzen gleichen Erwartungswert und gleiche Varianz

aber $P(X_T^A < q) = 0$ während $P(X_T^B < q) = \alpha > 0$

Weitere Risikomaße

Expected Utility Loss

$$\rho = E [(U(X_T) - U(q))^-]$$

Ausfallwahrsch. / Value at Risk (VaR)

$$\rho = P(X_T < q)$$

Conditional Value at Risk (CVaR)

Expected Shortfall

Kohärente / konvexe Risikomaße, ...

Ausfallrisiko

Weitere Risikomaße

Expected Utility Loss

$$\rho = E[(U(X_T) - U(q))^-]$$

Ausfallwahrsch. / Value at Risk (VaR)

$$\rho = P(X_T < q)$$

Conditional Value at Risk (CVaR)

Expected Shortfall

Kohärente / konvexe Risikomaße, ...

Stochastische Benchmark

z.B. $q \sim X_T^{\bar{\pi}}$ Index, Referenz-Portfolio

$q \sim S_T$ Aktienpreis, $n = 1$

Optimierungsaufgabe

Vermögensgleichung $dX_t^\pi = \pi_t^\top (\mu dt + \sigma dW_t), \quad X_0^\pi = x_0$

Strategie $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$

Zulässige Strategien $\mathcal{A}(x_0) = \{(\pi_t) : \text{Integrabilitätsbedingungen, } X_t^\pi \geq 0, \forall t \in [0, T]\}$

Optimierungsaufgabe

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)]$$

$$\text{Risiko-NB } E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$

Martingalmethode I

Wahrsch.-Raum (Ω, \mathcal{F}, P)

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ Informationsstruktur

Stoch. Prozess $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ heißt Martingal, falls

(Z_t) ist (\mathcal{F}_t) -adaptiert, $E|Z_t| < \infty$ und

$$\boxed{E[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Martingalmethode I

Wahrsch.-Raum (Ω, \mathcal{F}, P)

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ Informationsstruktur

Stoch. Prozess $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ heißt Martingal, falls

(Z_t) ist (\mathcal{F}_t) -adaptiert, $E|Z_t| < \infty$ und

$$E[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Eigenschaften Mittelwert $EZ_t = EZ_0 = \text{const}$

$E[Z_t - Z_s | \mathcal{F}_s] = 0$ Martingale sind driftlos

$$dZ_t = \mathbf{0} dt + \sigma_t dW_t$$

Martingalmethode I

Wahrsch.-Raum (Ω, \mathcal{F}, P)

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ Informationsstruktur

Stoch. Prozess $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ heißt Martingal, falls

(Z_t) ist (\mathcal{F}_t) -adaptiert, $E|Z_t| < \infty$ und

$$E[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Eigenschaften Mittelwert $EZ_t = EZ_0 = \text{const}$

$E[Z_t - Z_s | \mathcal{F}_s] = 0$ Martingale sind driftlos

$$dZ_t = \mathbf{0} dt + \sigma_t dW_t$$

Wiener-Prozess W_t und $e^{W_t - t/2}$ sind Martingale

Aktienpreis S_t , Vermögen X_t im Allg. nicht

Martingalmethode I

Wahrsch.-Raum (Ω, \mathcal{F}, P)

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ Informationsstruktur

Stoch. Prozess $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ heißt Martingal, falls

(Z_t) ist (\mathcal{F}_t) -adaptiert, $E|Z_t| < \infty$ und

$$E[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Eigenschaften Mittelwert $EZ_t = EZ_0 = \text{const}$

$E[Z_t - Z_s | \mathcal{F}_s] = 0$ Martingale sind driftlos

$$dZ_t = \mathbf{0} dt + \sigma_t dW_t$$

Wiener-Prozess W_t und $e^{W_t - t/2}$ sind Martingale

Aktienpreis S_t , Vermögen X_t im Allg. nicht

Supermartingal $E[Z_t | \mathcal{F}_s] \leq Z_s$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$

Martingalmethode II

Martingaldichte

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \kappa_u^\top dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\kappa_u\|^2 du \right)$$

$$dZ_t = -\kappa_t^\top Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1$$

$$\kappa_t = \sigma^{-1} \mu_t \quad \text{Marktpreis des Risikos}$$

Martingalmethode II

Martingaldichte

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \kappa_u^\top dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\kappa_u\|^2 du \right)$$

$$dZ_t = -\kappa_t^\top Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1$$

$$\kappa_t = \sigma^{-1} \mu_t \quad \text{Marktpreis des Risikos}$$

Annahmen an $(\mu_t) \Rightarrow (Z_t)$ ist (\mathcal{F}, P) -Martingal

Martingalmethode II

Martingaldichte

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \kappa_u^\top dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\kappa_u\|^2 du \right)$$
$$dZ_t = -\kappa_t^\top Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1$$

$$\kappa_t = \sigma^{-1} \mu_t \quad \text{Marktpreis des Risikos}$$

Annahmen an $(\mu_t) \Rightarrow (Z_t)$ ist (\mathcal{F}, P) -Martingal

Martingalmaß

$$\tilde{P}(A) = E[Z_T 1_A] \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_T, \quad \tilde{P} \sim P$$

Martingalmethode II

Martingaldichte

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \kappa_u^\top dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\kappa_u\|^2 du \right)$$
$$dZ_t = -\kappa_t^\top Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1$$

$$\kappa_t = \sigma^{-1} \mu_t \quad \text{Marktpreis des Risikos}$$

Annahmen an $(\mu_t) \Rightarrow (Z_t)$ ist (\mathcal{F}, P) -Martingal

Martingalmaß

$$\tilde{P}(A) = E[Z_T 1_A] \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_T, \quad \tilde{P} \sim P$$

Annahmen an $(\pi_t) \Rightarrow (X_t^\pi)$ ist (\mathcal{F}, \tilde{P}) -Supermartingal

$$\implies \tilde{E}[X_T^\pi] \leq \tilde{E}[X_0^\pi] = x_0 \quad (\text{Budget-Beschränkung})$$

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \kappa_u du \quad \text{ist Wiener-Prozess bzgl. } \tilde{P}$$

Martingalmethode II

Martingaldichte

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \kappa_u^\top dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\kappa_u\|^2 du \right)$$
$$dZ_t = -\kappa_t^\top Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1$$

$$\kappa_t = \sigma^{-1} \mu_t \quad \text{Marktpreis des Risikos}$$

Annahmen an $(\mu_t) \Rightarrow (Z_t)$ ist (\mathcal{F}, P) -Martingal

Martingalmaß

$$\tilde{P}(A) = E[Z_T 1_A] \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_T, \quad \tilde{P} \sim P$$

Annahmen an $(\pi_t) \Rightarrow (X_t^\pi)$ ist (\mathcal{F}, \tilde{P}) -Supermartingal

$$\implies \tilde{E}[X_T^\pi] \leq \tilde{E}[X_0^\pi] = x_0 \quad (\text{Budget-Beschränkung})$$

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \kappa_u du \quad \text{ist Wiener-Prozess bzgl. } \tilde{P}$$

Martingaldarstellungssatz \Rightarrow **Vollständigkeit des Marktes**

Es sei $\xi \geq 0$ eine \mathcal{F}_T -messbare ZG mit $\tilde{E}[\xi] = x_0$.

Dann existiert eine Strategie $(\pi_t) \in \mathcal{A}(x_0)$ mit $\xi = X_T^\pi$

Dekomposition der Optimierungsaufgabe

- **Dynamisches Problem**

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$

Dekomposition der Optimierungsaufgabe

- **Dynamisches Problem**

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$

- **Statisches Problem**

$$\max_{\xi \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)], \quad E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$$

mit $\mathcal{B}(x_0) := \{ \xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \underbrace{\tilde{E}[\xi] \leq x_0}_{\text{Budget-Beschränkung}} \}$

aus Startkapital in $(0, x_0]$ erzeugbare Endvermögen

Dekomposition der Optimierungsaufgabe

- **Dynamisches Problem**

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$

- **Statisches Problem**

$$\max_{\xi \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)], \quad E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$$

mit $\mathcal{B}(x_0) := \{\xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \underbrace{\tilde{E}[\xi] \leq x_0}_{\text{Budget-Beschränkung}}\}$

aus Startkapital in $(0, x_0]$ erzeugbare Endvermögen

→ **optimales Endvermögen** $\xi^* = f(Z_T)$

Dekomposition der Optimierungsaufgabe

- **Dynamisches Problem**

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$

- **Statisches Problem**

$$\max_{\xi \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)], \quad E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$$

mit $\mathcal{B}(x_0) := \{\xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \underbrace{\tilde{E}[\xi] \leq x_0}_{\text{Budget-Beschränkung}}\}$

aus Startkapital in $(0, x_0]$ erzeugbare Endvermögen

→ **optimales Endvermögen** $\xi^* = f(Z_T)$

- **Darstellungsproblem**

Finde eine Strategie $\pi \in \mathcal{A}(x_0)$ mit $\xi^* = X_T^\pi$

→ **optimale Strategie** π^*

Statisches Problem

$$\begin{array}{l} \max_{\xi \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)] \\ \text{Risiko-NB} \quad \mathbf{E_Q} [(\xi - q)^-] \leq \varepsilon \end{array}$$

$$\mathcal{B}(x_0) := \{\xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \tilde{E}[\xi] \leq x_0\}$$

Statisches Problem

$$\begin{aligned} & \max_{\xi \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)] \\ \text{Risiko-NB} \quad & E_Q [(\xi - q)^-] \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(x_0) := \{\xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \tilde{E}[\xi] \leq x_0\}$$

Wählen Schranke ε so, dass Risiko-NB

- bindet $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = E_Q [(X_T^M - q)^-]$

Risiko des Merton Portfolios (keine Risiko-NB)

Statisches Problem

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \mathcal{B}(x_0)} E[U(\xi)] \\ \text{Risiko-NB} \quad & E_Q [(\xi - q)^-] \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(x_0) := \{\xi \geq 0 : \xi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-messbar, } \tilde{E}[\xi] \leq x_0\}$$

Wählen Schranke ε so, dass Risiko-NB

- bindet $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = E_Q [(X_T^M - q)^-]$
Risiko des Merton Portfolios (keine Risiko-NB)
- erfüllbar ist $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min} = \begin{cases} 0 & \text{für } q \leq x_0 \text{ (Portfolio Insurer)} \\ \dots > 0 & \text{für } q > x_0 \end{cases}$
siehe Gabih, Sass, Wunderlich (2009)

Optimales Endvermögen

Theorem ($Q = \tilde{P}$, Gabih, Sass, Wunderlich (2009), Basak, Shapiro (2001))

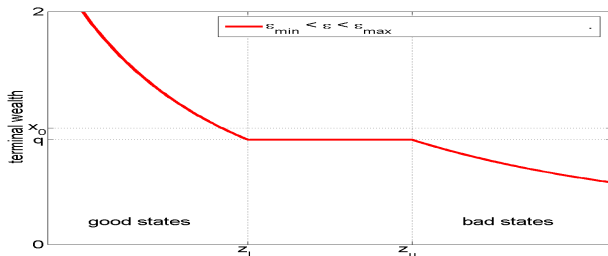
Für $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ ist das optimale Endvermögen $\xi^* = f(Z_T; y_1^*, y_2^*)$

$$\text{mit } f(z; y_1, y_2) = \begin{cases} I(y_1 z) & \text{für } z \in (0, z_l] \\ q & \text{für } z \in (z_l, z_u] \\ I((y_1 - y_2)z) & \text{für } z \in (z_u, \infty) \end{cases}$$

I Umkehrfunktion von U' , $z_l = \frac{U'(q)}{y_1}$ und $z_u = \frac{U'(q)}{y_1 - y_2}$.

Die reellen Zahlen $y_1^*, y_2^* > 0$ sind eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\tilde{E}[f(Z_T; y_1, y_2)] = x_0 \quad \text{and} \quad E_Q[(f(Z_T; y_1, y_2) - q)^-] = \varepsilon.$$



Optimales Endvermögen

Theorem ($Q = \tilde{P}$, Gabih, Sass, Wunderlich (2009), Basak, Shapiro (2001))

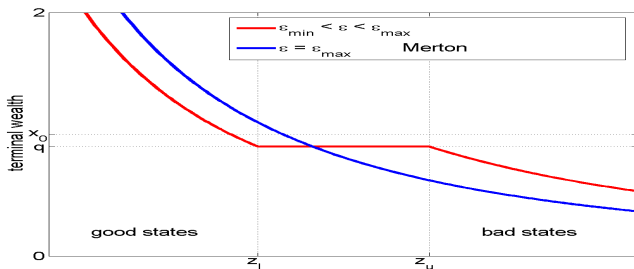
Für $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ ist das optimale Endvermögen $\xi^* = f(Z_T; y_1^*, y_2^*)$

$$\text{mit } f(z; y_1, y_2) = \begin{cases} I(y_1 z) & \text{für } z \in (0, z_l] \\ q & \text{für } z \in (z_l, z_u) \\ I((y_1 - y_2)z) & \text{für } z \in (z_u, \infty) \end{cases}$$

I Umkehrfunktion von U' , $z_l = \frac{U'(q)}{y_1}$ und $z_u = \frac{U'(q)}{y_1 - y_2}$.

Die reellen Zahlen $y_1^*, y_2^* > 0$ sind eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\tilde{E}[f(Z_T; y_1, y_2)] = x_0 \quad \text{and} \quad E_Q[(f(Z_T; y_1, y_2) - q)^-] = \varepsilon.$$



Optimales Endvermögen

Theorem ($Q = \tilde{P}$, Gabih, Sass, Wunderlich (2009), Basak, Shapiro (2001))

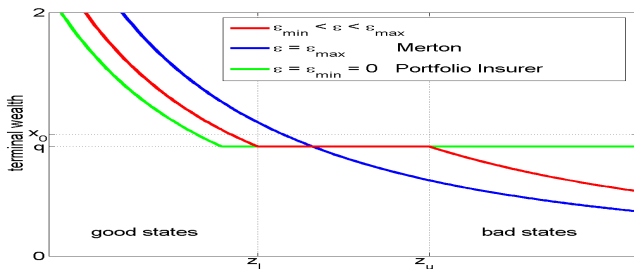
Für $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ ist das optimale Endvermögen $\xi^* = f(Z_T; y_1^*, y_2^*)$

$$\text{mit } f(z; y_1, y_2) = \begin{cases} I(y_1 z) & \text{für } z \in (0, z_l] \\ q & \text{für } z \in (z_l, z_u) \\ I((y_1 - y_2)z) & \text{für } z \in (z_u, \infty) \end{cases}$$

I Umkehrfunktion von U' , $z_l = \frac{U'(q)}{y_1}$ und $z_u = \frac{U'(q)}{y_1 - y_2}$.

Die reellen Zahlen $y_1^*, y_2^* > 0$ sind eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\tilde{E}[f(Z_T; y_1, y_2)] = x_0 \quad \text{and} \quad E_Q[(f(Z_T; y_1, y_2) - q)^-] = \varepsilon.$$



Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$
- Bilden Lagrange Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren $y_1, y_2 > 0$

$$L(\xi, y_1, y_2) = E[U(\xi)] - y_1 (E[Z_T \xi] - x_0) - y_2 (E[Z_T(\xi - q)^-] - \varepsilon)$$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$
- Bilden Lagrange Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren $y_1, y_2 > 0$

$$\begin{aligned}L(\xi, y_1, y_2) &= E[U(\xi)] - y_1 (E[Z_T \xi] - x_0) - y_2 (E[Z_T(\xi - q)^-] - \varepsilon) \\ &= E[\underbrace{U(\xi) - y_1 Z_T \xi - y_2 Z_T(\xi - q)^-}_{= g(\xi)}] + y_1 x_0 + y_2 \varepsilon\end{aligned}$$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$
- Bilden Lagrange Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren $y_1, y_2 > 0$

$$\begin{aligned}L(\xi, y_1, y_2) &= E[U(\xi)] - y_1 (E[Z_T \xi] - x_0) - y_2 (E[Z_T(\xi - q)^-] - \varepsilon) \\ &= E[\underbrace{U(\xi) - y_1 Z_T \xi - y_2 Z_T(\xi - q)^-}_{= g(\xi)}] + y_1 x_0 + y_2 \varepsilon\end{aligned}$$

- Punktweise Maximierung der streng konkaven Funktion $g(x)$ mit Knick bei $x = q$

$$g(x) = U(x) - y_1 z x - y_2 z (x - q)^- \implies x^* = f(z; y_1, y_2)$$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$
- Bilden Lagrange Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren $y_1, y_2 > 0$

$$\begin{aligned}L(\xi, y_1, y_2) &= E[U(\xi)] - y_1 (E[Z_T \xi] - x_0) - y_2 (E[Z_T(\xi - q)^-] - \varepsilon) \\ &= E[\underbrace{U(\xi) - y_1 Z_T \xi - y_2 Z_T(\xi - q)^-}_{= g(\xi)}] + y_1 x_0 + y_2 \varepsilon\end{aligned}$$

- Punktweise Maximierung der streng konkaven Funktion $g(x)$ mit Knick bei $x = q$

$$g(x) = U(x) - y_1 z x - y_2 z(x - q)^- \implies x^* = f(z; y_1, y_2)$$

- Kandidat für optimales Endvermögen ist $\xi^* = f(Z_T; y_1, y_2)$

Beweisidee (PEL $Q = \tilde{P}$)

Maximiere $E[U(\xi)]$ unter den NB $\tilde{E}[\xi] \leq x_0$ und $E_Q[(\xi - q)^-] \leq \varepsilon$

- Es gilt $\tilde{E}[\xi] = E[Z_T \xi]$ und $E_Q[(\xi - q)^-] = E[Z_T(\xi - q)^-]$
- Bilden Lagrange Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren $y_1, y_2 > 0$

$$\begin{aligned}L(\xi, y_1, y_2) &= E[U(\xi)] - y_1(E[Z_T \xi] - x_0) - y_2(E[Z_T(\xi - q)^-] - \varepsilon) \\ &= E[\underbrace{U(\xi) - y_1 Z_T \xi - y_2 Z_T(\xi - q)^-}_{= g(\xi)}] + y_1 x_0 + y_2 \varepsilon\end{aligned}$$

- Punktweise Maximierung der streng konkaven Funktion $g(x)$ mit Knick bei $x = q$

$$g(x) = U(x) - y_1 z x - y_2 z(x - q)^- \implies x^* = f(z; y_1, y_2)$$

- Kandidat für optimales Endvermögen ist $\xi^* = f(Z_T; y_1, y_2)$
- ξ^* genügt der Budget- und Risiko-NB mit Gleichheit
 $\implies y_1^*, y_2^*$ sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{E}[\xi^*] &= E[Z_T f(Z_T; y_1, y_2)] = x_0 \quad \text{und} \\ E_Q[(\xi^* - q)^-] &= E[Z_T (f(Z_T; y_1, y_2) - q)^-] = \varepsilon\end{aligned}$$

Optimale Strategie

Clark Formel

Es sei $D_t\xi$ die Malliavin Ableitung der \mathcal{F}_T -messbaren ZG $\xi \in D_{1,1}$, dann gilt

$$\xi = \tilde{E}[\xi] + \int_0^T \tilde{E}[(D_t\xi)^\tau | \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t$$

Optimale Strategie

Clark Formel

Es sei $D_t \xi$ die Malliavin Ableitung der \mathcal{F}_T -messbaren ZG $\xi \in D_{1,1}$, dann gilt

$$\xi = \tilde{E}[\xi] + \int_0^T \tilde{E}[(D_t \xi)^\tau | \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t$$

setzen $\xi = f(Z_T) = f(Z_T; y_1^*, y_2^*)$ (optimales Endvermögen)

zeigen Kettenregel für Malliavin Ableitung $D_t f(Z_T) = f'(Z_T) D_t Z_T$

Optimale Strategie

Clark Formel

Es sei $D_t \xi$ die Malliavin Ableitung der \mathcal{F}_T -messbaren ZG $\xi \in D_{1,1}$, dann gilt

$$\xi = \tilde{E}[\xi] + \int_0^T \tilde{E}[(D_t \xi)^\tau | \mathcal{F}_t] d\tilde{W}_t$$

setzen $\xi = f(Z_T) = f(Z_T; y_1^*, y_2^*)$ (optimales Endvermögen)

zeigen Kettenregel für Malliavin Ableitung $D_t f(Z_T) = f'(Z_T) D_t Z_T$

Koeffizientenvergleich mit Vermögensgleichung

$$\xi = x_0 + \int_0^T (\pi_t^*)^\tau \sigma d\tilde{W}_t$$

Theorem (optimale Strategie)

$$\pi_t^* = \sigma^{-\tau} \tilde{E}[f'(Z_T) D_t Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Optimale Strategie: klassisches Black-Scholes Modell

$\mu_t \equiv \mu$ konstant \implies (Z_t) geometrische BB und Z_T ist lognormal

Explizite Formeln optimale Strategie $\pi_t^* = g(t, Z_t)$

Optimale Strategie: klassisches Black-Scholes Modell

$\mu_t \equiv \mu$ konstant $\implies (Z_t)$ geometrische BB und Z_T ist lognormal

Explizite Formeln optimale Strategie $\pi_t^* = g(t, Z_t)$

Basak, Shapiro, Tepla (2001, 2002) VaR, Present Expected Loss
deterministische und stoch. Benchmark

Gabih, Grecksch, Wunderlich (2005, 2006) Future Expected Loss
Expected Utility Loss
deterministische and stoch. Benchmark

Gandy (2005) Present und Future Expected Loss
VaR, CVaR
deterministische Benchmark

Probleme der Merton-Strategie

✓ Hohes Ausfallrisiko

⇒ Optimierung unter beschränktem Ausfallrisiko

- Drift μ ist sehr schwierig zu schätzen
ist nicht konstant

⇒ **Modell mit zufälliger, nicht beobachtbarer Drift μ**

Modelle mit partieller Information über die Drift I

Drift μ_t ist abhängig von Zeit und von weiterer "Rauschquelle"
ist nicht \mathcal{F}^S -adaptiert (nicht beobachtbar)
mit $\mathcal{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{F}$ von (S_t) generierte Filtration

Modelle mit partieller Information über die Drift I

Drift μ_t ist abhängig von Zeit und von weiterer "Rauschquelle"
ist nicht \mathcal{F}^S -adaptiert (nicht beobachtbar)
mit $\mathcal{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{F}$ von (S_t) generierte Filtration

Investor kann nur Aktienpreise S_t beobachten,
jedoch nicht Drift μ_t und Wiener-Prozess W_t

\implies Modell mit **partieller Information**

Modelle mit partieller Information über die Drift I

Drift μ_t ist abhängig von Zeit und von weiterer "Rauschquelle"
ist nicht \mathcal{F}^S -adaptiert (nicht beobachtbar)
mit $\mathcal{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{F}$ von (S_t) generierte Filtration

Investor kann nur Aktienpreise S_t beobachten,
jedoch nicht Drift μ_t und Wiener-Prozess W_t

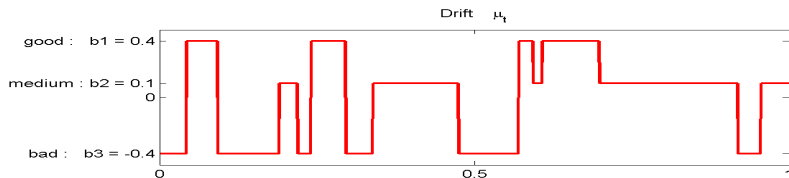
\implies Modell mit **partieller Information**

Problem "Lernen" der Drift aus beobachteten Aktienpreisen
Schätzung bzw. **Filter** für μ_t

Modelle mit partieller Information über die Drift II

Hidden Markov Model (HMM)

Sass, Hausmann (2004), Rieder, Bäuerle (2005), Nagai, Rungaldier (2005)



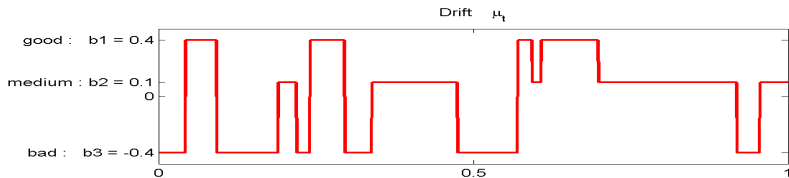
Drift μ_t ist zeitstetige homogene Markov-Kette
unabhängig von W_t

Intensitätsmatrix steuert Sprünge zwischen den Zuständen

Modelle mit partieller Information über die Drift II

Hidden Markov Model (HMM)

Sass, Haussmann (2004), Rieder, Bäuerle (2005), Nagai, Runggaldier (2005)



Drift μ_t ist zeitstetige homogene Markov-Kette
unabhängig von W_t

Intensitätsmatrix steuert Sprünge zwischen den Zuständen

Lineares Gaußsches Model

Lakner (1998), Nagai, Peng (2002), Brendle (2006)

μ_t ist ein mean-reversion Prozess

$d\mu_t = \alpha(\bar{\mu} - \mu_t)dt + \beta dW_t^1$, mit W_t^1 Wiener-Prozess (un)abhängig von W_t

HMM-Filter

Drift μ_t verdeckter Zustand, Signal
Returns $dR_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma dW_t$ verrauschte Beobachtungen

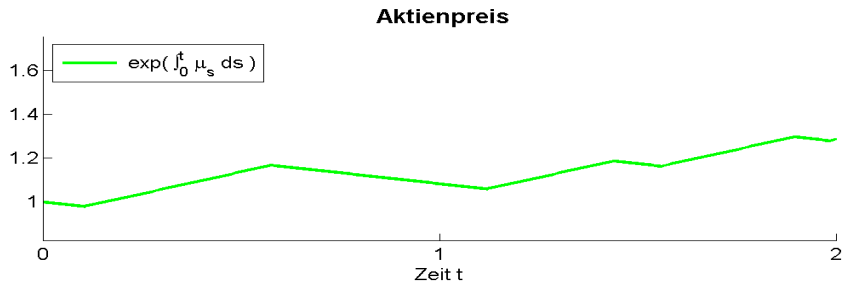
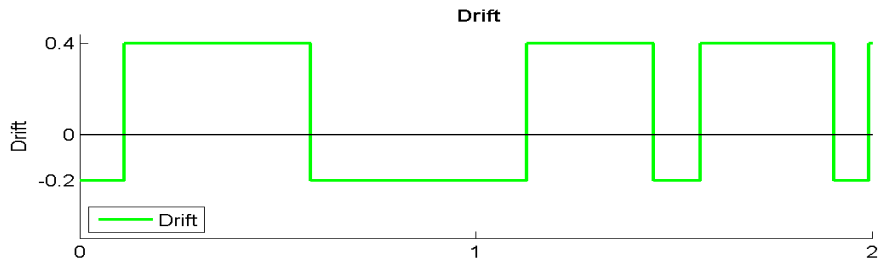
Gegeben Beobachtungen der Preise S_u (Returns R_u) für $u \in [0, t]$

Gesucht Filter für Drift μ_t : $\hat{\mu}_t = E [\mu_t | \mathcal{F}_t^S]$

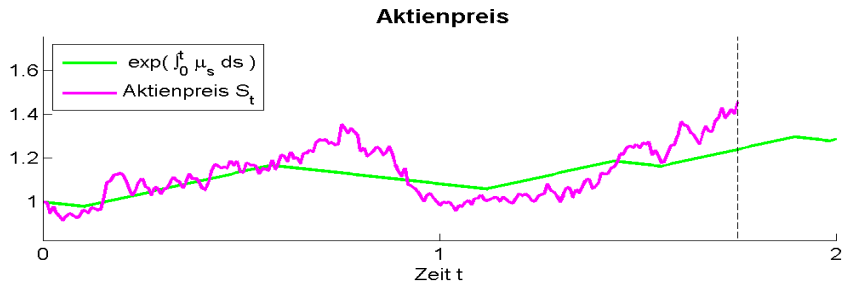
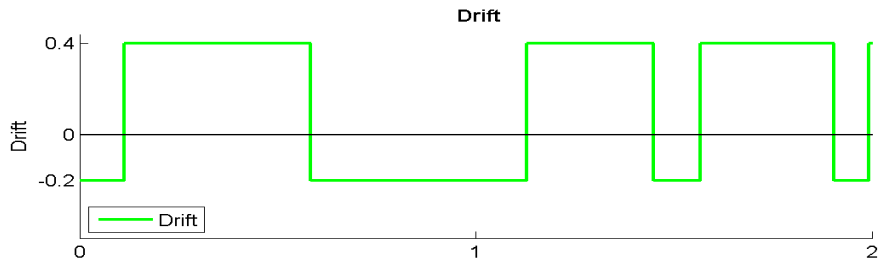
und Martingaldichte Z_t : $\hat{Z}_t = E [Z_t | \mathcal{F}_t^S]$

Lösung Liptser, Shiryaev (1974), Wonham (1965), Elliot (1993)

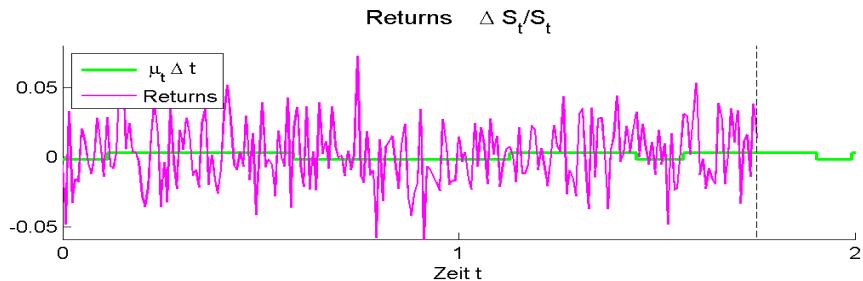
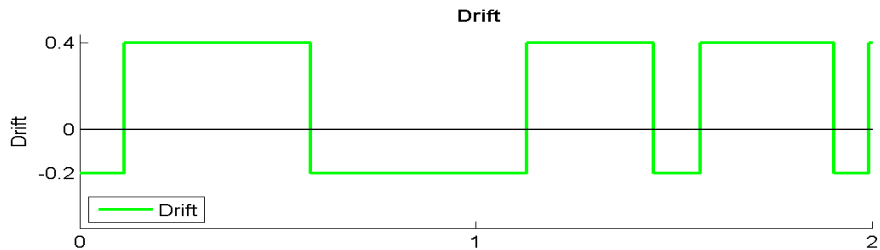
HMM-Filter: Beispiel



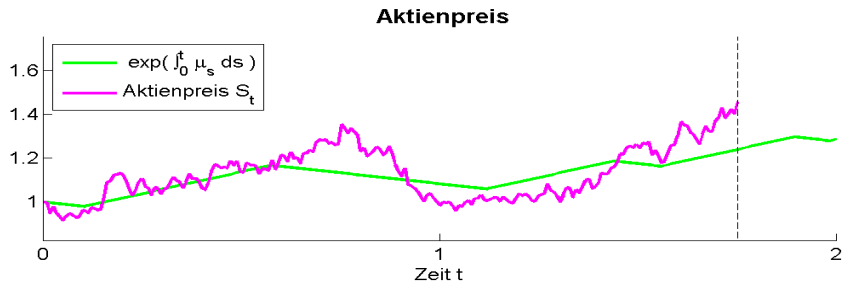
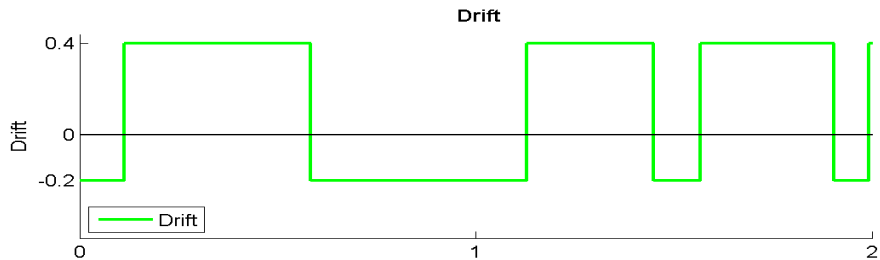
HMM-Filter: Beispiel



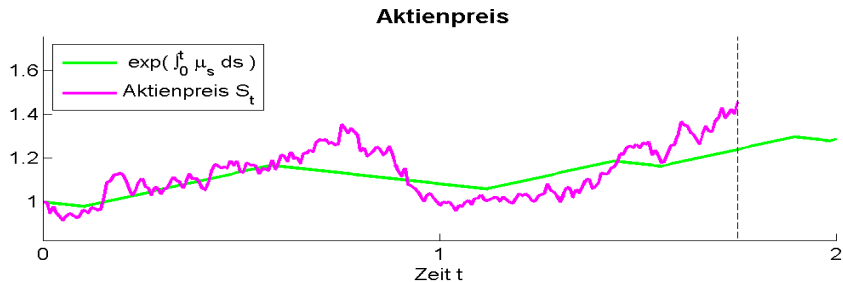
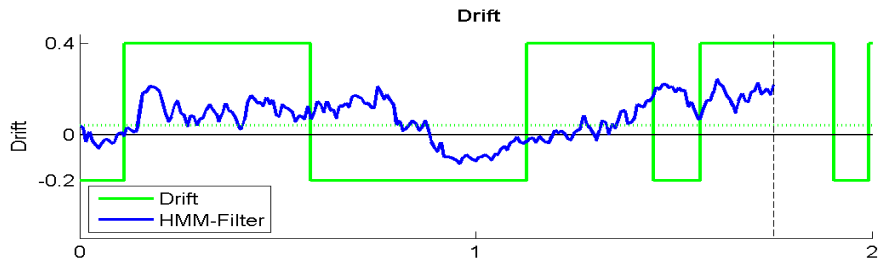
HMM-Filter: Beispiel



HMM-Filter: Beispiel



HMM-Filter: Beispiel



Optimierung unter partieller Information

Transformation zu einem Modell mit voller Information

$$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Filter}} (\Omega, \mathcal{F}^S, P|_{\mathcal{F}_T^S}; \hat{\mathbf{Z}})$$

Optimales Endvermögen $X_T^* = f(\hat{\mathbf{Z}}_T; y_1^*, y_2^*)$

Optimale Strategie $\pi_t^* = \sigma^{-\tau} \tilde{E} \left[f'(\hat{\mathbf{Z}}_T) D_t \hat{\mathbf{Z}}_T \mid \mathcal{F}_t^S \right] \quad (*)$

Optimierung unter partieller Information

Transformation zu einem Modell mit voller Information

$$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Filter}} (\Omega, \mathcal{F}^S, P|_{\mathcal{F}_T^S}; \widehat{\mathbf{Z}})$$

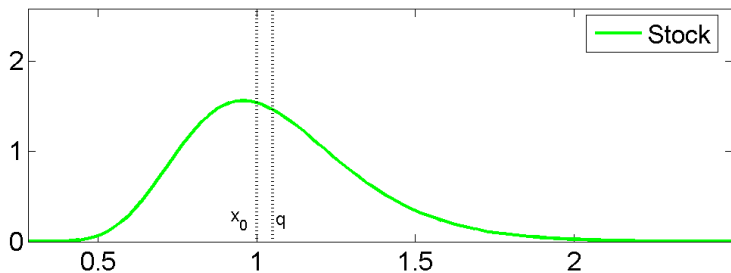
$$\text{Optimales Endvermögen} \quad X_T^* = f(\widehat{\mathbf{Z}}_T; y_1^*, y_2^*)$$

$$\text{Optimale Strategie} \quad \pi_t^* = \sigma^{-\tau} \tilde{E} \left[f'(\widehat{\mathbf{Z}}_T) D_t \widehat{\mathbf{Z}}_T \mid \mathcal{F}_t^S \right] \quad (*)$$

Berechnung der optimalen Strategie erfordert

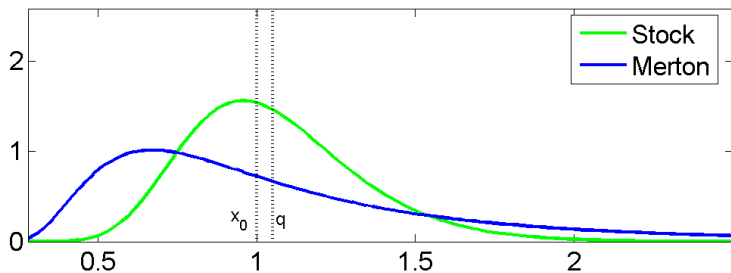
- Numerische Lösung stoch. Differentialgleichungen für $D_t \widehat{\mathbf{Z}}_T$ unter Anwendung robuster Filtertechniken
- Approximation der bedingten Erwartung in (*) durch Monte-Carlo Simulation
- siehe Sass, Wunderlich (2010)

Beispiel: Verteilung des Endvermögens



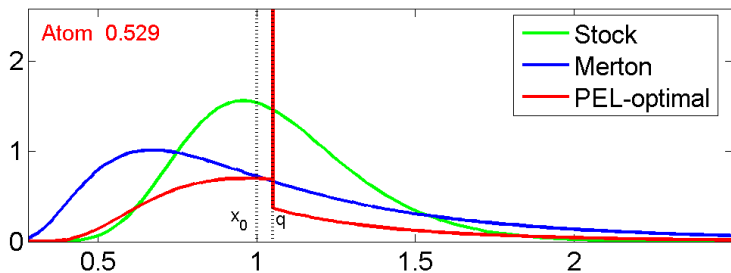
	Erwarteter Nutzen	Risiko
Aktie	0.040	0.129

Beispiel: Verteilung des Endvermögens



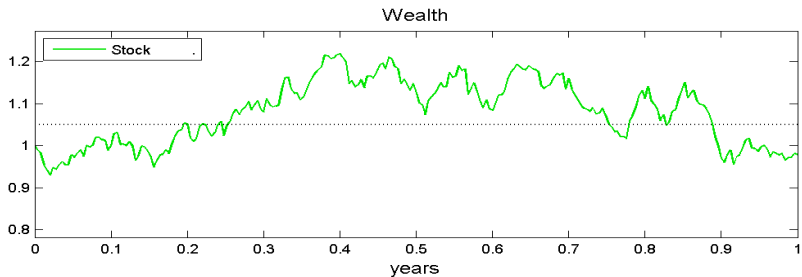
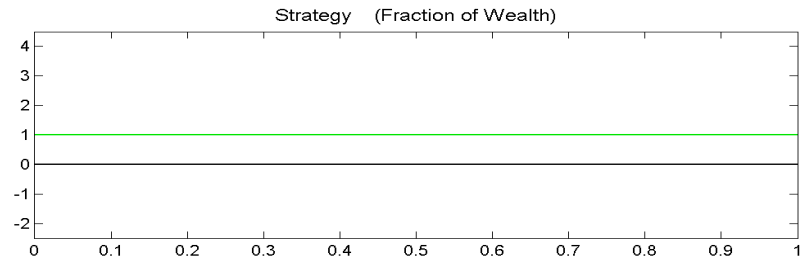
	Erwarteter Nutzen	Risiko
Aktie	0.040	0.129
Merton	0.076	$0.248 = \varepsilon_{max}$

Beispiel: Verteilung des Endvermögens

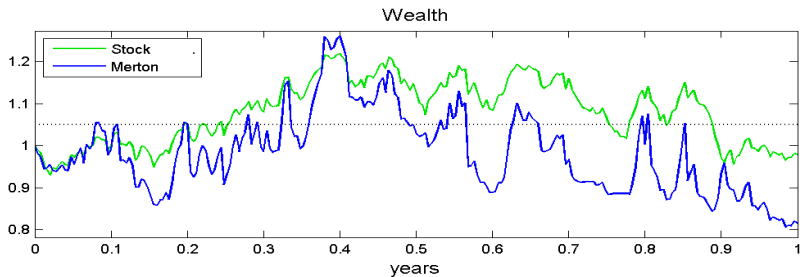
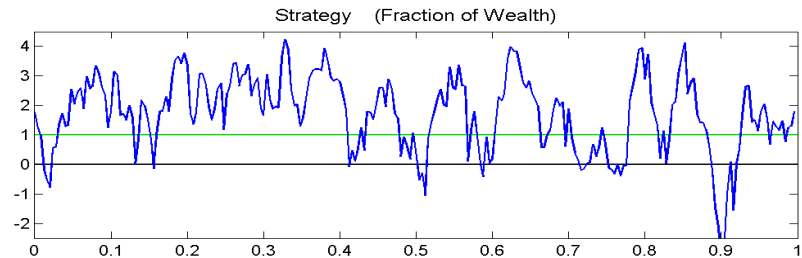


	Erwarteter Nutzen	Risiko
Aktie	0.040	0.129
Merton	0.076	$0.248 = \varepsilon_{max}$
Risiko-NB	0.049	$0.100 = \varepsilon$

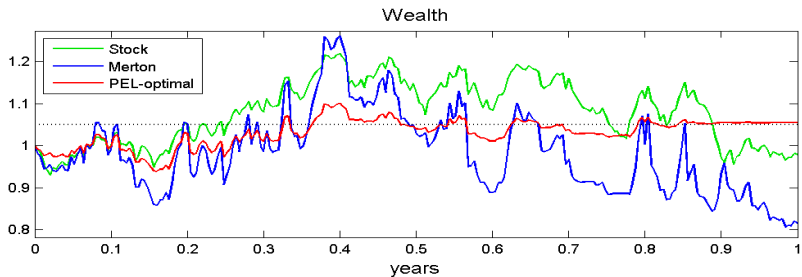
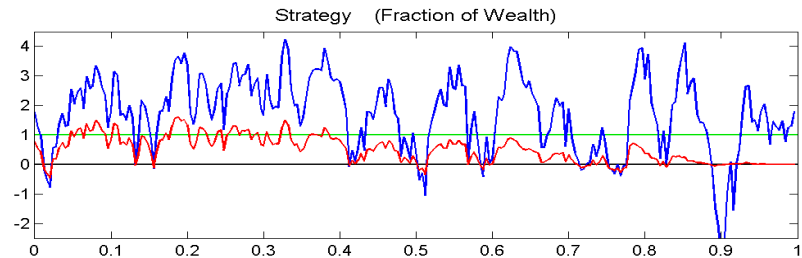
Beispiel: Optimale Strategie



Beispiel: Optimale Strategie



Beispiel: Optimale Strategie



Tracking Error

Anstelle des **theoretischen optimalen Vermögens**

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t (\pi_s^*)^\top dR_s$$

ergibt sich bei Zeit-Diskretisierung das **tatsächliche Vermögen**

$${}^A X_t^* = x_0 + \sum_{0 \leq s_j < t} ({}^A \pi_{s_j}^*)^\top \Delta R_{s_j}$$

dabei ist ${}^A \pi_{s_j}^*$ die Monte-Carlo-Approximation von $\pi_{s_j}^*$

Tracking Error

Anstelle des **theoretischen optimalen Vermögens**

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t (\pi_s^*)^\top dR_s$$

ergibt sich bei Zeit-Diskretisierung das **tatsächliche Vermögen**

$${}^A X_t^* = x_0 + \sum_{0 \leq s_j < t} ({}^A \pi_{s_j}^*)^\top \Delta R_{s_j}$$

dabei ist ${}^A \pi_{s_j}^*$ die Monte-Carlo-Approximation von $\pi_{s_j}^*$

Falls ${}^A X_t^* \neq X_t^*$, dann ist die Strategie π^* nicht mehr optimal

Tracking Error

Anstelle des **theoretischen optimalen Vermögens**

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t (\pi_s^*)^\top dR_s$$

ergibt sich bei Zeit-Diskretisierung das **tatsächliche Vermögen**

$${}^A X_t^* = x_0 + \sum_{0 \leq s_j < t} ({}^A \pi_{s_j}^*)^\top \Delta R_{s_j}$$

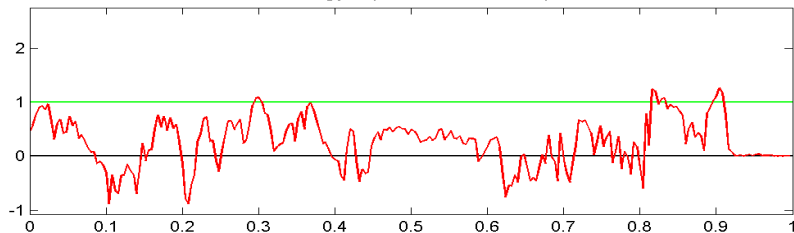
dabei ist ${}^A \pi_{s_j}^*$ die Monte-Carlo-Approximation von $\pi_{s_j}^*$

Falls ${}^A X_t^* \neq X_t^*$, dann ist die Strategie π^* nicht mehr optimal

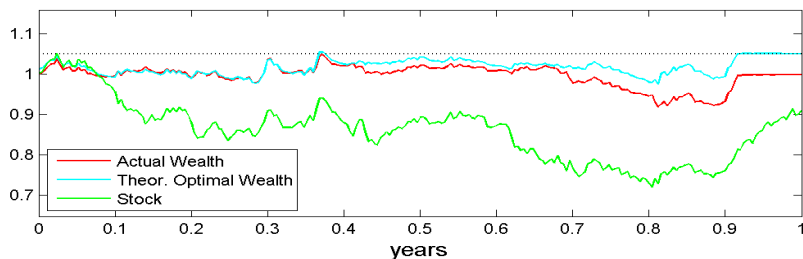
- Aufgaben**
1. Erkennung von Tracking Errors $|X_t^* - {}^A X_t^*| > \delta X_t^*$
 2. Korrektur (Update) der Strategie π_t^*

Tracking Error - Numerisches Beispiel

Strategy (Fraction of Wealth)



Wealth



Erkennung von Tracking Errors

Für das theoretische optimale Vermögen gilt

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t (\pi_s^*)^\top dR_s$$

Aus der Martingaleigenschaft folgt

$$X_t^* = \tilde{E} \left[X_T^* | \mathcal{F}_t^S \right] = \tilde{E} \left[f(\hat{Z}_T; y_1^*, y_2^*) | \mathcal{E}_t \right]$$

Erkennung von Tracking Errors

Für das theoretische optimale Vermögen gilt

$$X_t^* = x_0 + \int_0^t (\pi_s^*)^\top dR_s$$

Aus der Martingaleigenschaft folgt

$$X_t^* = \tilde{E} \left[X_T^* | \mathcal{F}_t^S \right] = \tilde{E} \left[f(\hat{Z}_T; y_1^*, y_2^*) | \mathcal{E}_t \right]$$

X_t^* ist **ohne** Kenntnis der optimalen Strategie näherungsweise berechenbar durch Monte-Carlo-Approximation:

$$X_t^* \approx {}^N X_t^*$$

Update der optimalen Strategie

Falls ein Tracking Error auftritt: $|^N X_t^* - ^A X_t^*| > \delta ^N X_t^*$,
berachten wir ein neues Optimierungsproblem mit

Update der optimalen Strategie

Falls ein Tracking Error auftritt: $|^N X_t^* - ^A X_t^*| > \delta ^N X_t^*$,

berachten wir ein neues Optimierungsproblem mit

Anlagehorizont $T - t$

Angangskapital $^A X_t^*$ (tatsächliches Vermögen)

Update der optimalen Strategie

Falls ein Tracking Error auftritt: $|^N X_t^* - ^A X_t^*| > \delta ^N X_t^*$,

berachten wir ein neues Optimierungsproblem mit

Anlagehorizont $T - t$

Angangskapital $^A X_t^*$ (tatsächliches Vermögen)

Risikoschranke Expected Loss von X_T^* gegeben \mathcal{F}_t^S

$$\varepsilon_t^* = E_Q [(X_T^* - q)^- | \mathcal{F}_t^S] \approx ^N \varepsilon_t^*$$

Update der optimalen Strategie

Falls ein Tracking Error auftritt: $|^N X_t^* - ^A X_t^*| > \delta ^N X_t^*$,

berachten wir ein neues Optimierungsproblem mit

Anlagehorizont $T - t$

Angangskapital $^A X_t^*$ (tatsächliches Vermögen)

Risikoschranke Expected Loss von X_T^* gegeben \mathcal{F}_t^S

$$\varepsilon_t^* = E_Q [(X_T^* - q)^- | \mathcal{F}_t^S] \approx N_{\varepsilon_t^*}$$

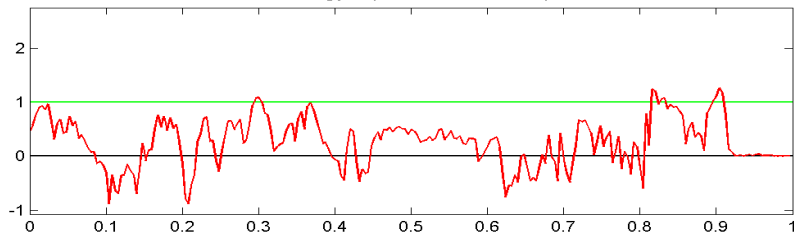
Berechnen neue Lagrange Multiplikatoren y_1^t, y_2^t durch Lösen von

$$\begin{aligned} \tilde{E} [f(\hat{Z}_T; y_1, y_2) | \mathcal{F}_t^S] &= ^A X_t^* \\ E_Q [(f(\hat{Z}_T; y_1, y_2) - q)^- | \mathcal{F}_t^S] &= N_{\varepsilon_t^*}. \end{aligned}$$

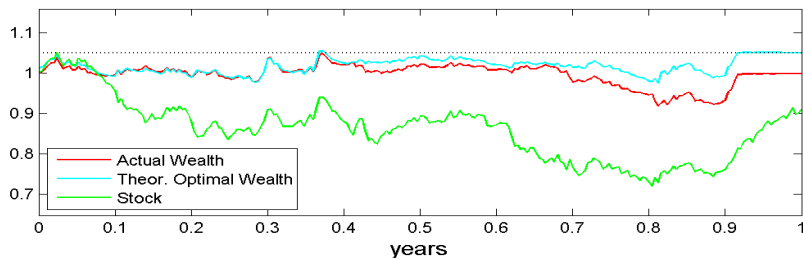
Berechnen korrigierte Strategie mit $y_1^t, y_2^t \dots$

Tracking Error - Numerisches Beispiel

Strategy (Fraction of Wealth)

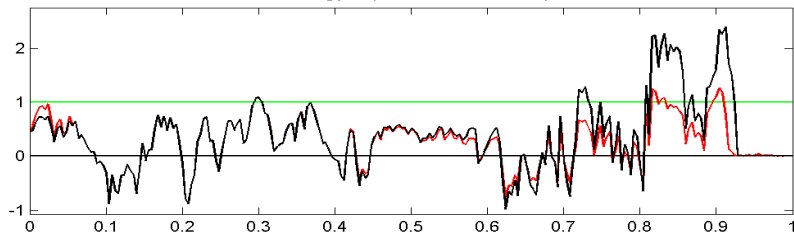


Wealth

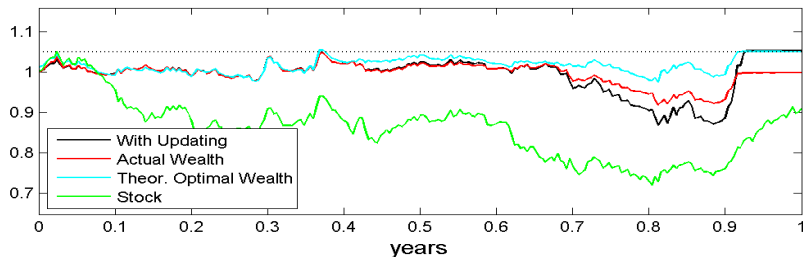


Tracking Error - Numerisches Beispiel

Strategy (Fraction of Wealth)



Wealth



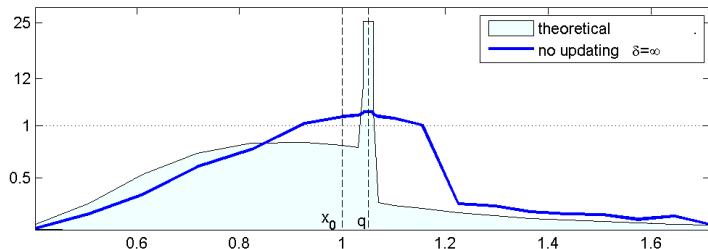
Verteilung des Endvermögens

Generieren 2000 Pfade von μ und W
und die zugehörigen Aktienpreise S

Vergleichen empirische Verteilungsdichten des Endvermögens

ohne Update $\delta = \infty$

mit Update für Schranke $\delta = 0.001$



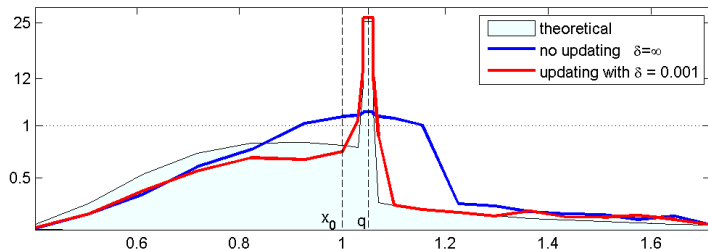
Verteilung des Endvermögens

Generieren 2000 Pfade von μ und W
und die zugehörigen Aktienpreise S

Vergleichen empirische Verteilungsdichten des Endvermögens

ohne Update $\delta = \infty$

mit Update für Schranke $\delta = 0.001$



Zusammenfassung

- Dynamische Portfoliooptimierung unter Risikobeschränkung

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(X_0)} E[U(X_T^\pi)], \quad E_Q[(X_T^\pi - q)^-] \leq \varepsilon$$







- Partielle Information über die Drift (Hidden Markov Model)

X_T^* als Funktion des Filters \hat{Z}_T für die Martingaldichte Z_T

π_t^* in Abhängigkeit von der Malliavin Ableitung $D_t \hat{Z}_T$

- Optimale Strategien berechenbar mit Hilfe von Monte-Carlo Simulationen

Literatur

-  Basak, S. and Shapiro, A. (2001): Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. *The Review of Financial Studies*, 2(14), 371-405, 2001.
-  Gabih, A., Grecksch, W. and Wunderlich, R. (2005): *Dynamic portfolio optimization with bounded shortfall risks*. *Stochastic Analysis and Applications* 23, 579–594.
-  Gabih, A., Sass, J. and Wunderlich, R. (2009): Utility maximization under bounded expected loss. *Stochastic Models* , 3(25), 2009, 375 - 407.
-  Lakner, P. (1998): Optimal trading strategy for an investor: the case of partial information. *Stochastic Processes and their Applications* 76, 77–97.
-  Sass, J. and Haussmann, U.G (2004): Optimizing the terminal wealth under partial information: The drift process as a continuous time Markov chain. *Finance and Stochastics* 8, 553–577.
-  Sass, J. and Wunderlich, R. (2010): Optimal Portfolio Policies Under Bounded Expected Loss and Partial Information. *Mathematical Methods of Operations Research*, 72, 25–61