

**DAA-Workshop für junge Mathematiker**  
**Tagungsstätte Loccum**  
**19. und 20. August 2011**

# Variable Annuities und ihr Hedging aus Sicht der Versicherungstechnik

D. Kusnezow BELTIOS GmbH

25.07.2011

## Aufbau des Vortrages

- Was sind die Variablen Annuitäten und Hedging
- Motivation
- Typen und Optionen der Variablen Annuitäten
- Existierende Bewertungsmethoden
- Ein Unterschied zwischen den Variablen Annuitäten und Traditionellen Produkten
- Existierende Hedging-Strategien
- Mathematisches Modell und Bewertung von GMIB gegen Einmalbeitrag
- Verschiedene Hedgingstrategien für GMIB
- Diskussion der statischen Hedge-Portfolien
- Fazit

## 1 Was sind die Variablen Annuitäten und Hedging

- Der Begriff „Variable Annuitäten“ (*variable annuities*) übersetzt ins deutsche bedeutet „veränderliche Renten“.
- An insurance contract in which, at the end of the accumulation stage, the insurance company guarantees a minimum payment. The remaining income payments can vary depending on the performance of the managed portfolio. Quelle: <http://www.investopedia.com/terms/v/variableannuity.asp>
- Hedging bezeichnet die Absicherung von Vermögenspositionen gegen Preisrisiken. Grundgedanke des Hedging ist die Erzielung einer risikokompensatorischen Wirkung durch das Eingehen einer entgegengesetzten Risikoposition an den jeweiligen Handelsmärkten, d.h. der Wertverlust der einen Position wird durch den Wertzuwachs der Gegenposition ausgeglichen (= Variation negativ korrelierter Einzelpositionen). Die sich hierdurch ergebende Gesamtposition ist dann bezüglich des Risikos ganz oder teilweise ausgeglichen.  
Quelle: <http://www.wirtschaftslexikon24.net/d/hedging/hedging.htm>

## 2 Motivation

- Fondsgebundene Versicherungen mit einem Garantiebaustein für Todesfall oder Mindestablaufleistung wurden zwischen 1960 und 1970 in Großbritannien populär, kamen von dort nach Australien und Südafrika. In den Vereinigten Staaten wurden die Variablen Annuitäten als staatlich steuerlich gefördertem Vorsorgeprodukt eingeführt.
- Als der Markt gesättigt war, kamen weitere Variationen der Garantien, um den Vertrieb zu beleben, wie zum Beispiel Ratchets und Roll-Up.
- Durch den Verkauf der Produkte mit komplizierten Garantien hat sich die Versicherungsbranche Risiken ausgesetzt, die nur noch schwer diversifizierbar waren.
- Das Geschäft mit Variablen Annuitäten hat diese Risiken weiter in die Finanzmärkte transportiert, was zu einem rasanten Anstieg der Garantiekosten geführt hat.
- Gestiegene Volatilität der Aktienmärkte und fallende Zinsen der Staatsanleihen haben in den Jahren 2008-2009 insgesamt Verluste in Höhe von über 36 Milliarden USD bei den Versicherungsunternehmen, die das Geschäft mit Variablen Annuitäten gezeichnet haben, verursacht.

- Manche Versicherer mussten den Verkauf bestimmter Produkte stoppen und die Prämien neu kalkulieren.

### 3 Variable Annuitäten in Deutschland

- Auf dem deutschen Versicherungsmarkt werden die Variablen Annuitäten seit 2006 verkauft. Heute bieten diese Produkte insbesondere Allianz, AXA, ERGO, R+V und SwissLife über ihre ausländischen Tochtergesellschaften.
- Der Grund für den Vertrieb über ausländische Tochterunternehmen sind die deutschen Rechnungslegungsvorschriften wie §§11 und 65 VAG sowie §341f HGB. Demnach muss ein deutsches Versicherungsunternehmen eine so hohe Deckungsrückstellung für die Gewährleistung der Garantien bilden, dass der Verkauf dieser Produkte unprofitabel wird.
- In Deutschland werden die Variablen Annuitäten in allen Schichten der Altersvorsorge eingesetzt. Der breite Spektrum der angebotenen Garantieleistungen macht sie auch für die Abbildung der Riester- und Basisrente (Rürup-Rente) sowie für die betriebliche Altersversorgung geeignet.
- Es sind mehrere Beiträge dem Thema „Hedging von Optionen und Variablen Annuitäten“ gewidmet, zum Beispiel von A. Pellser, T.F. Coleman et. al, M. Hardy, H. Föllmer, M. Schweizer, A. Mahayni und vielen anderen.

#### 4 Grundtypen der Variablen Annuitäten

Ein Versicherungsvertrag mit variablen Annuitäten kann verschiedene Garantiekomponenten beinhalten.

- Die garantierte Mindestablaufleistung (*the guaranteed minimum maturity benefit* oder *GMMB*) sichert dem Versicherungsnehmer die Auszahlung eines bestimmten Geldbetrages beim Ablauf der Versicherungsdauer. Diese Garantie bietet dem Versicherungsnehmer den Schutz vor der negativen Entwicklung der Investition. Einfache GMMB kann als Beitragsrückgewähr für den Fall des Aktienkursverlustes vorkommen. Die Garantie kann fix oder an die positive Entwicklung der Aktienkurse gekoppelt sein.
- Die garantierte Mindesttodesfallleistung (*the guaranteed minimum death benefit* oder *GMDB*) gewährt dem Versicherungsnehmer die Auszahlung einer bestimmten Summe beim Eintreten des Todes während der Versicherungsdauer. Wiederum kann die Mindesttodesfallleistung die Beitragsrückgewähr darstellen oder sie kann bei einem bestimmten Prozentsatz steigen.
- Mit der garantierten kumulierten Mindestleistung (*the guaranteed minimum accumulation benefit* oder *GMAB*) erhält der Versicherungsnehmer eine Option,



am Ende der regulären Versicherungsdauer den Vertrag zu erneuern. Die neue Garantieleistung wird gemäß der Ablaufeistung des ursprünglichen Vertrages festgelegt.

- Der garantierte Mindestrückkaufwert (*the guaranteed minimum surrender benefit* oder *GMSB*) ähnelt der garantierten Mindestablaufeistung. Nach dem Ablauf einer bestimmten Zeit ist der im Stornofall fällige Auszahlungsbetrag gesichert. Die garantierte Mindeststornoleistung entspricht oft der Summe der eingezahlten Beiträge.
- Die garantierte Mindestrentenleistung (*the guaranteed minimum income benefit* oder *GMIB*) bietet dem Versicherungsnehmer den Schutz gegen schlechte Entwicklung seiner Investition und der Verrentungsfaktoren. Am Ende der Aufschubzeit entscheidet der Versicherungsnehmer zwischen der garantierten Mindestrente oder der Rente, die sich aus der Verrentung des Fondsguthabens mit den dann gültigen Rechnungsgrundlagen ergibt.
- Mit dem garantierten Verrentungsfaktor (*the guaranteed annuity option* oder *GAO*) bekommt das Versicherungsnehmer das Recht, am Ende der Aufschubzeit zwischen dem marktaktuellen und dem garantierten Verrentungsfaktor für die Verrentung eines fixen Kapitals zu wählen.

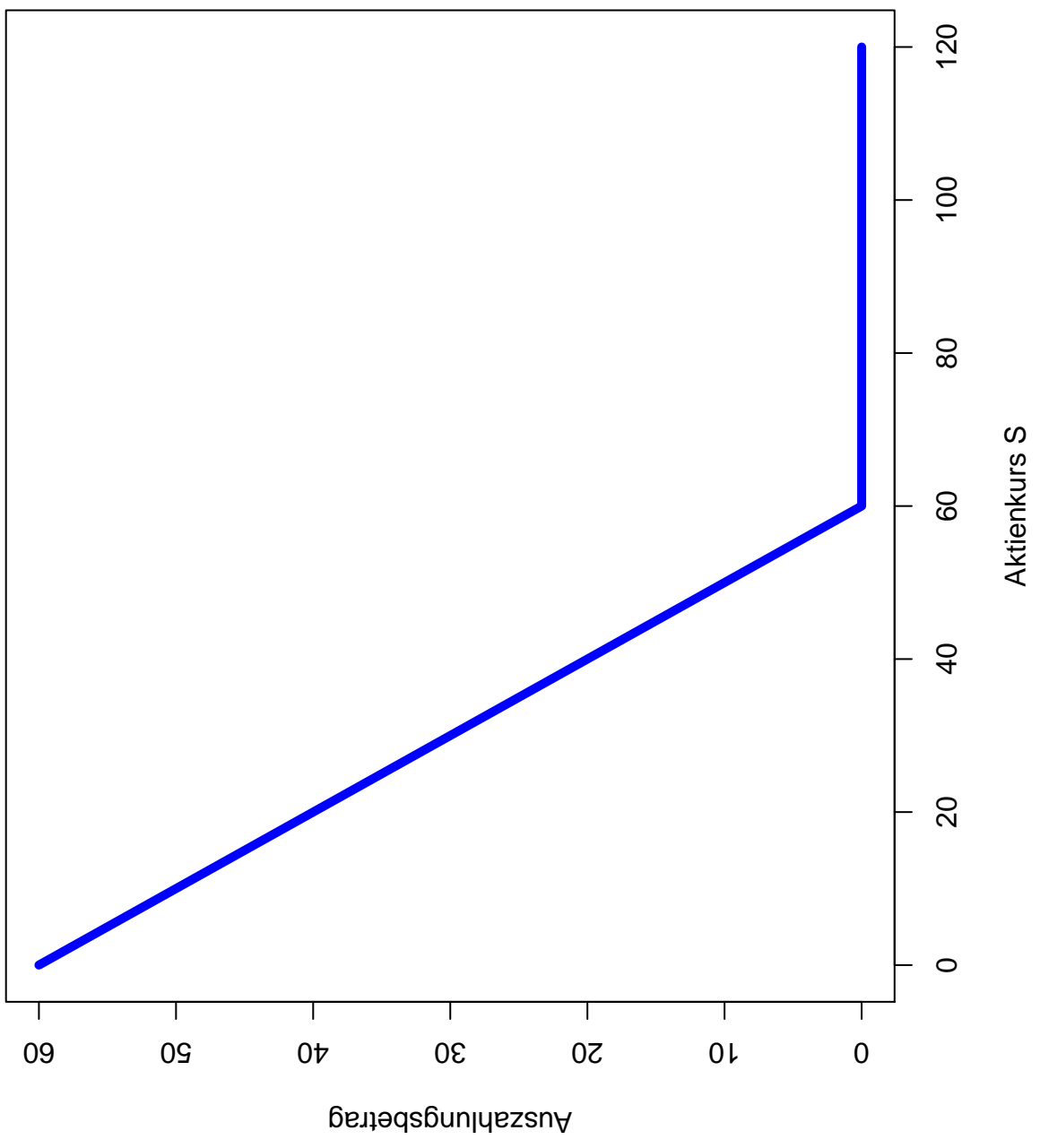
## 5 Optionen in den Variablen Annuitäten

- Die Auszahlungsprofile der GMAB, GMSB und GMDB haben stets folgende Form:

$$[G - S_t]^+ = \max(G - S_t, 0),$$

wobei  $S_t$  die Aktien- bzw. Fondsinvestition des Versicherungsnehmers im Zeitpunkt  $t$  und  $G$  der vom Versicherungsunternehmen beim Eintreten des Versicherungsfalles auszahlende Geldbetrag. Somit ist in diese Typen eine Put-Option auf den Anlagestock eingebettet.

**Auszahlungsprofil einer europäischen Put-Option mit Strike = 60**

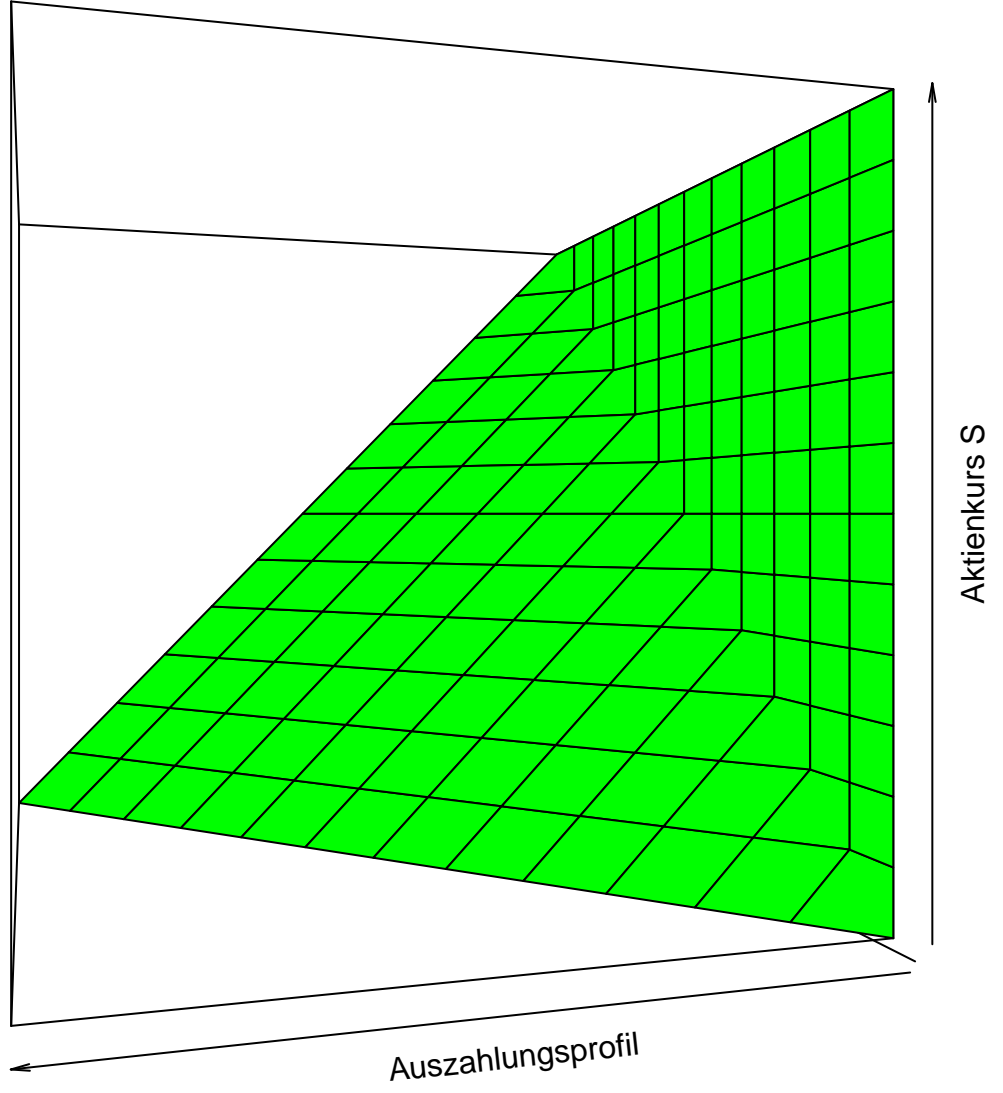


- Bei den GMIB ist das Auszahlungsprofil von der Form

$$[MW(\textit{Garantierente}) - S_T]^+,$$

mit  $MW(\textit{Garantierente})$  als Marktwert der Rentenzahlung mit der garantierten Rentenhöhe und  $S_T$  als Anlagestock im Zeitpunkt  $T$ . Somit ist in GMIB eine Margrabe-Option (Option auf Tausch von zwei risikobehafteten Anlagen) integriert.

**Auszahlungsprofil der Margrabe-Option für den Halter der Aktie S**



- Bei den GAO ist der Auszahlungsprofil von der Form

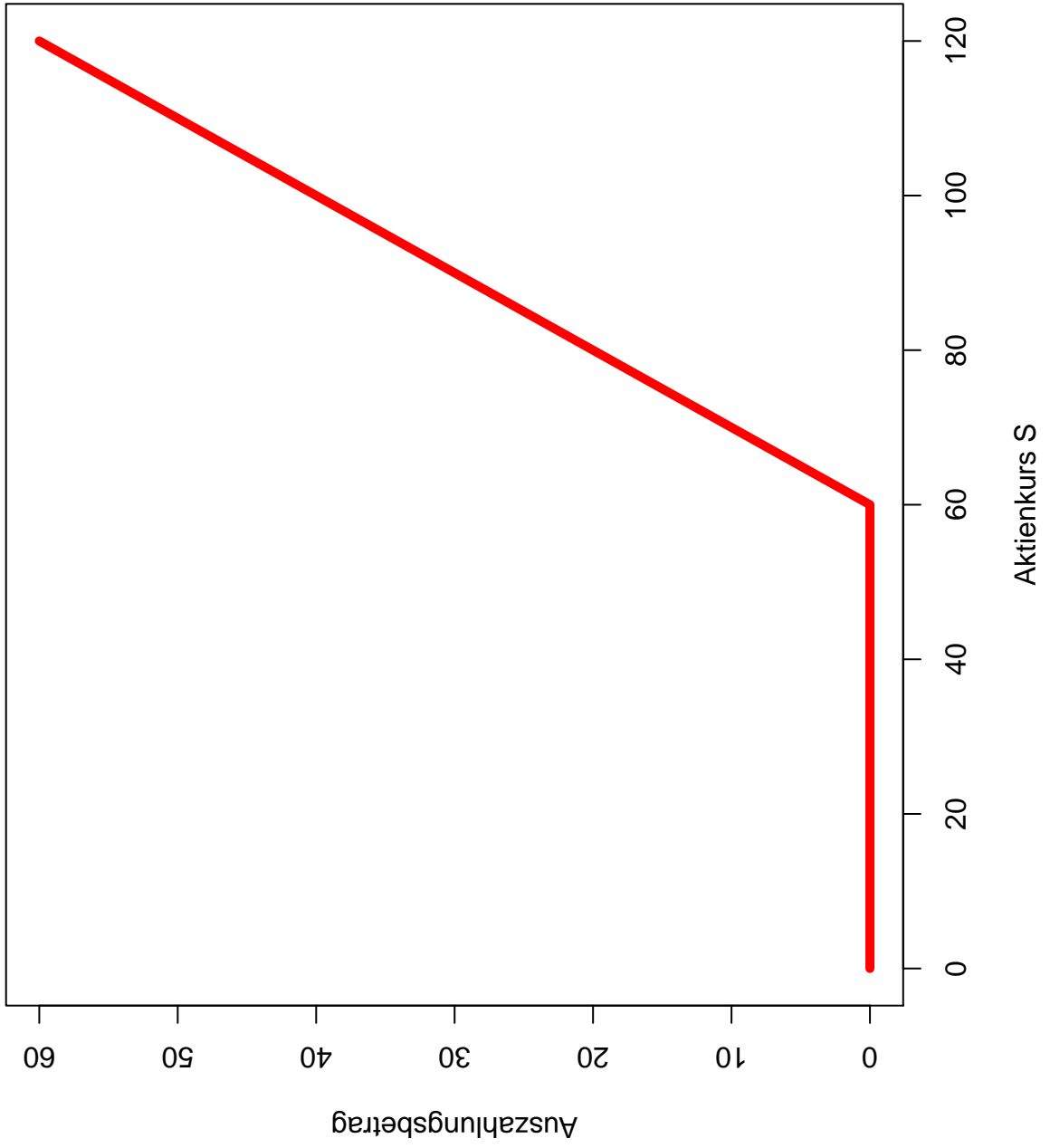
$$[MW(\text{Rente mit Garantiefaktor}) - MW(\text{Rente mit Marktfaktor})]^+,$$

wobei die Rente mit Garantie- bzw. mit Marktfaktor sich aus der Verrentung einer fixen Summe  $VS$  mit dem jeweiligen Verrentungsfaktor ergibt. Dieser Verrentungsfaktor ist durch den zugrundeliegenden Zinsverlauf bestimmt. Aufgrund der Äquivalenz

$$MW(\text{Rente mit Marktfaktor}) = VS$$

stellt GAO eine Call-Option auf die Leibrente mit garantierter Höhe dar.

**Auszahlungsprofil einer europäischen Call-Option mit Strike = 60**



## 6 Ein Unterschied zwischen Variablen Annuitäten und Traditionellen Produkten

- Bei den traditionellen Produkten wird die Kapitalanlage von dem Versicherungsunternehmen gesteuert und für die Gewährleistung der Garantie eine Rückstellung gebildet.
- Bei den Variablen Annuitäten entscheidet der Versicherungsnehmer selbst, wie das Geld angelegt werden soll. Eine Deckungsrückstellung im klassischen Sinne gibt es nicht. Durch die Übernahme der Garantie bei den Variablen Annuitäten setzt sich das Versicherungsunternehmen größeren Finanzrisiken aus.
- Management der Finanzrisiken unterscheidet sich grundsätzlich vom Management der biometrischen Risiken.
- Die Versicherung der biometrischen Risiken fußt auf der Diversifikation: die Risiken der einzelnen Verträge sind stochastisch unabhängig. Demzufolge besteht nach dem Zentralen Grenzwertsatz nur eine geringe Unsicherheit über den tatsächlichen Schadenverlauf. Durch die Verwendung von Rechnungen mit Sicherheitszuschlägen und Reservekalkulation mit einem vorsichtigen Zins wird diese Unsicherheit noch kleiner.
- Bei der Versicherung der Investmentrisiken ist die Diversifikation fast unmög-



lich, weil die Kursschwankungen der Wertpapiere gleichzeitig mehrere Policen betreffen. Hier besteht das nicht-diversifizierbare oder das systematische Risiko. Deterministische Modelle sind hier nicht tauglich, weil es keine akzeptablen vorsichtigen Annahmen über die Rendite der Investitionen gibt. Das haben mehrere Finanzkrisen bestätigt. Für die Steuerung von diesen Risiken werden stochastische Modelle benötigt.

## 7 Einige existierende Bewertungsmethoden

- Risikoneutrale Bewertung im Rahmen des Black-Scholes-Merton-Modells. Der Preis des selbstfinanzierenden Replikationsportfolio im Zeitpunkt  $t < T$  bestimmt sich unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  als

$$P_t = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{Q}}[W]$$

mit  $W$  als Auszahlungsbetrag der Verpflichtung.

- Monte-Carlo-Simulation. Sei  $L$  der Barwert des Auszahlungsbetrages der Verpflichtung  $W$  und  $l_1, \dots, l_N$  die unabhängigen identisch verteiltten Barwerte der Auszahlungsbeträge  $w_i$  aus  $N$  Simulationsszenarien. Dann ist der

$$\bar{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $L$ , d.h.  $E[\bar{l}] = E[L]$ , also kann der Preis der Option bestimmt werden als

$$P_t \approx \bar{l}.$$

- Andere numerische Methoden zur Optionsbewertung wie z.B. Heston-Nandi-Formula, Optionsbewertung mit Fourier-Transformation (Bakshi, Cao, Chen) etc.

## 8 Einige Existierende Risikomanagementansätze

- Aktueller Ansatz nutzt mit dem risikolosen Zins diskontierten Erwartungswert der Garantieverpflichtung. Dieser Wert wird in die Anleihen investiert.
- Dynamisches Hedging nutzt den finanztechnischen Ansatz unter der Ausnutzung des Replikationsportfolio aus Anleihen und Aktien, der dem Wert der Garantieverpflichtung entspricht. Das Replikationsportfolio muss bei den Änderungen der Aktienkurse regelmäßig angepasst werden.
- Ad hoc Ansatz nutzt die Vermutung oder die „aktuarielle Beurteilung“. Vermutlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fondsvermögen nach 10 Jahren unter der garantierten eingezahlten Prämie liegt, sehr gering. Folgen: die Krise der Versicherungen in Großbritannien in den 1990-er Jahren in Verbindung mit GAO-Produkten.
- Statisches Hedging nutzt das Replikationsportfolio aus Swaptions für die Absicherung der Garantie für den Verrentungsfaktor eines festgelegten Kapitals (GAO). Pellser zeigte, dass dieser Ansatz weniger Kapital benötigt, als der aktuarielle Ansatz.
- Lokale Risikominimierung im unvollständigen Markt betrachtet zu den Zeitpunk-

ten  $t_0, \dots, t_M$  die Differenz zwischen den kumulierten Hedge-Fehlern (Gewinn oder Verlust aus der Hedge-Strategie) in zwei aufeinander folgenden Hedging-Zeitpunkten um den Erwartungswert des quadratischen Fehlers zu minimieren:

$$\min E((C_{k+1} - C_k)^2 | \mathcal{F}_k)$$

für alle  $0 \leq k \leq M - 1$ , wobei  $(\mathcal{F}_k)$  eine Filtration auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  über dem Finanzmarkt ist.

- Minimierung der  $L^2$ -Norm bei der selbstfinanzieren Hedge-Strategie betrachtet die Differenz zwischen der Auszahlung  $\Pi_T$  und dem Wert des Hedge-Portfolios  $P_M$  am Ende der Versicherungsdauer:

$$\min E((\Pi_T - P_M)^2)$$

## 9 Motivation für die statisch-dynamische Hedge-Strategie

- Die GMIB-Komponente kann man sich als eine Put-Option auf den Aktienstock mit dem Strike „Leibrente mit garantieren Höhe“ vorstellen.
- Der Strike der Option ist selbst selbst stochastisch. Die Fehlabschätzungen der Volatilitäten und der Korrelation des Anlagestocks und der Rentenpreise haben bedeutende Auswirkungen nicht nur auf den Preis der Option, sondern auch auf die zur Bestimmung des Hedge-Profolios berechneten Griechen, insbesondere das  $\rho$ .
- Die Leibrenten sind die Sequenzen von Nullkuponanleihen mit sehr großen Laufzeiten. Deshalb unterliegt ihr Preis bei bereits geringen Verschiebungen der Zinsstrukturkurve großen Schwankungen.
- Die Idee ist, die zwei der oben genannten Probleme mit Hilfe vom statischen Hedging zu reduzieren und somit das Hedging der GMIB auf dynamisches Hedging einer GMAB-Komponente zurückzuführen.

## 10 Ein mathematisches Modell

- Biometrische und finanzmarkttechnische Ereignisse sind stochastisch unabhängig.
- Es gibt keine Dividendenzahlungen und Managementgebühren.
- Aktienkurse  $S_t$  und Rentenbawerte  $a_{x+t}(t, T)$  sind lognormalverteilt mit Brownschen Bewegungen  $W_t^S, W_t^a$ :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_{S_t} - \delta) \cdot dt + \sigma_S dW_t^S$$
$$\frac{da_{x+t}(t, T)}{a_{x+t}(t, T)} = \mu_{a_t} \cdot dt + \sigma_a dW_t^a.$$

- Die Bondpreise  $B(0, t)$  im Zeitpunkt  $t^* = 0$  sind bekannt.
- $r_t$  hängt nicht von einer Zufallsvariable ab.

$$\int_0^T r_t \cdot dt = -\ln B(0, T)$$

- Damit folgt unter dem risikoneutralen Maß  $\mathbb{Q}$

$$S_T = S_0(B(0, T))^{-1} \exp(-\sigma_S^2 T/2 + \sigma_S W_T^S)$$

und

$$a_{x+T}(T) = a_x(0, T)B(0, T)^{-1} \exp(-\sigma_a^2 T/2 + \sigma_a W_T^a).$$



## 11 Bewertung

Der Wert des GMIB-Komponente eines VA-Kontraktes im Zeitpunkt  $t = 0$  ist gegeben durch

$$C^E(G^a a_x(0, T), S_0, T) = TP_x^T \left( G^a a_x(0, T) \Phi(d_1^a) - S_0 \Phi(d_2^a) \right),$$

wobei

$$d_{1,2}^a = \frac{\ln(G^a a_x(0, T) / S_0) \pm \hat{\sigma}^2 T / 2}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{T}},$$

sowie

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_a^2 - 2\rho_{aS} \sigma_a \sigma_S + \sigma_S^2}$$

und

$$\rho_{aS} = \rho_{W_T^a W_T^S}$$

als die Korrelation der Brwonschen Bewegungen.

## 12 Hedgestrategie mit Rückdeckung

- GMIB-Komponente ist eine Option des Versicherungsnehmers auf Tausch von zwei Assets.
- Getauscht werden die Leibrente und das Fondsvermögen.
- Der Wert dieser Option ist:

$$C^E(G^a a_x(0, T), S_0, T) = {}_T p_x^{\top} a_x(0, T) G^v - {}_T p_x^{\top} a_x(0, T) R^v$$

mit

$$G^v = G^a \Phi(d_1^a)$$

und

$$R^v = \frac{S_0}{a_x(0, T)} \Phi(d_2^a).$$

- Die Hedge-Strategie mit Rückdeckung besteht in dem Kauf einer Leibrente mit variabler Höhe ( $G^v - R^v$ ) mit Kapitalwahlrecht.

- Das Kapitalwahlrecht wird dann ausgeübt, wenn der Kunde sein Fondsvermögen beim Rentenübergang zur Bildung der nichtgarantierten Rente verwendet.
- Die Absicherungskosten sind variabel, weil die Höhe der Rente ( $G^v - R^v$ ) in der Aufschubzeit regelmäßig angepasst werden muss.

### 13 Motivation und Ansatz für die statisch-dynamische Hedgestrategie

- Nachteile der Hedgestrategie mit Rückdeckung liegen in den laufenden Anpassungen der Hedge-Beiträge.
- Die statische Hedgestrategie für die Rentenbezugszeit soll die Schwankungen der Hedge-Kosten reduzieren.
- Wir betrachten eine Zinsstrukturkurve

$$L : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (t, t + \theta) \mapsto L(t, t + \theta)$$

- Fixiere die zum Zeitpunkt  $t^* = 0$  geltende Zinsstrukturkurve  $L^{t^*}(t, t + \theta)$ .
- Der Preis der Rente mit Höhe 1 im Zeitpunkt  $t \geq t^*$  ist demnach gegeben durch

$$a_{x+t}^{t^*}(t, \mathbf{T}) = B^{t^*}(t, \mathbf{T})_{T-t} p_{x+t}^{\overline{T}} \sum_{\theta=0}^{\omega-T} B^{t^*}(\mathbf{T}, \mathbf{T} + \theta) \theta p_{x+T}^{\overline{T}}, \quad t \in [0, \mathbf{T}].$$

- Wie können wir uns von den Schwankungen der Zinsstrukturkurve so schützen, daß der zum Ende der Aufschubzeit erforderliche Geldbetrag  $G^a p_{T-x}^{\overline{T}} a_{x+T}^{t^*}(\mathbf{T})$  für die Auszahlung der Garantierente  $G^a$  ausreicht?

- Der Betrag  $G^a p^R \tau p_x^T a_{x+T}^{t*}(T)$  muss am Ende der Aufschubzeit vorhanden sein, falls der Versicherungsnehmer sich für die Garantierente entscheiden sollte. Aus diesem Betrag werden die laufenden garantierten Rentenzahlungen finanziert und die Kapitalerträge erwirtschaftet.
- Falls die Verzinsung nicht ausreichen sollte, kommt die statische Hedgestrategie zum Zug und füllt die Lücke bei den Kapitalerträgen auf.
- In diesem Fall wirken auf den Wert der GMIB-Option in der Aufschubphase nur noch die Fondsentwicklung, die biometrischen Risiken und die Bondpreise für die Periode  $[t, T]$ ,  $t \geq 0$ .
- Die GMIB-Option wird somit zu der GMMB-Option und die Aufgabe des Hedging in der Aufschubzeit reduziert sich auf die Absicherung einer Put-Option auf den Anlagestock mit dem fixen Strike.

## 14 Statisches Hedging in der Rentenbezugszeit ohne Option auf Fondsrente

- Wie wird das Bewertungsportfolio für die Rentenbezugszeit berechnet?
- Mit welchen Finanzinstrumenten kann ein Replikationsportfolio dazu aufgebaut werden?
- Die versicherungstechnische Rückstellung für eine Rente der Höhe 1 eines  $x + T$ -jährigen Rentners nach  $\theta$  Jahre der Rentenbezugszeit ist  ${}_{\theta}V_{x+T}^a$ . Es gilt folgende fundamentale Beziehung für diese Deckungsrückstellungen

$${}_{\theta}V_{x+T}^a = \begin{cases} a_{x+T}(T), & \text{für } \theta = 0 \\ \frac{({}_{\theta-1}V_{x+T}^a - 1)}{p_{x+\theta-1}^{T(\theta-1, \theta)}}, & \text{für } \theta > 0. \end{cases}$$

- Wir haben in  $t^* = 0$  die Zinskurve  $L^*(t, t + \theta)$  fixiert und damit auch durch das fixieren der Bondpreise den Spektrum der Deckungsrückstellungen
- $$({}_{\theta}V_{x+T}^{t^*, a})_{\theta \geq 0}.$$
- Der Zins, den wir nach  $\theta$  Jaren erwirtschaften müssen, um das fixierte Spektrum

der Deckungsrückstellungen weiter fortschreiben zu können ist

$$K_{\theta}^{t^*} = L^{t^*}(\theta, \theta + 1).$$

- Nach  $\theta$  Jahren der Rentenlaufzeit werden wir in der Lage sein, den dann aktuellen Zinssatz  $L(\theta, \theta + 1)$  zu erwirtschaften.
- Somit besteht das Risiko darin, daß die geplante Verzinsung nicht erwirtschaftet werden kann:

$$L^{t^*}(\theta, \theta + 1) \neq L(\theta, \theta + 1).$$

- Ist  $X^{t^*}$  der Bestand der Versicherungspolice, für die die Zinskurve  $L^{t^*}(t, t + \theta)$  fixiert wurde, dann ist als Hedgeinstrument die Summe der einjährigen Forward-Receiver-Swaps erforderlich:

$$FRS = \left\{ \left( \sum_{x \in X^{t^*}} p_{T+\theta}^R \cdot p_x^T \cdot V_{x+T}^{t^*,a} \cdot G^a \right) (K_{\theta}^{t^*} - L(\theta, \theta + 1)) \mid \theta = 0, \dots, \omega - x - T \right\}.$$

## 15 Betrachtung der Zahlungsströme

- Stimmt der Wert des obigen Hedge-Portfolios einer Police ( $x$ ) zeigt mit dem Wert der Rentenverpflichtung überein?
- Sei  $N_{\theta,x} = p^R \int_{T+\theta}^T p_x^\tau V_{x+\tau}^{t^*,a} G_x^a$  der Nominal des Forward-Swaps des Vertrages  $x$
- Der Zahlungsstrom eines Jahres setzt sich zusammen aus
  1. dem Aufwand für die Auszahlung der Rente  $G_x^a$ ,
  2. dem Zinsertrag  $N_{\theta,x}L(T + \theta, T + \theta + 1)$ ,
  3. dem Ertrag/Aufwand aus Swap-Geschäft in Höhe von

$$N_{\theta,x}(L^{t^*}(T + \theta, T + \theta + 1) - L(T + \theta, T + \theta + 1)),$$

4. dem Aufwand für die Zuführung des Zinses  $N_{\theta,x}L^{t^*}(T + \theta, T + \theta + 1)$  zu der technischen Deckungsrückstellung.
- Damit bekommen wir als den Barwert der Zahlungsströme der Police ( $x$ ) zum



Rentenbeginn folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\theta=0}^{\omega-x-T} {}_{T+\theta}p_x^\tau B(T, T+\theta) \left( G_x^a - N_{\theta,x} L(T+\theta, T+\theta+1) - N_{\theta,x} L^{t^*}(T+\theta, T+\theta+1) \right) \\
 & \quad - L(T+\theta, T+\theta+1) + N_{\theta,x} L^{t^*}(T+\theta, T+\theta+1) \Big) \\
 & = \sum_{\theta=0}^{\omega-x-T} {}_{T+\theta}p_x^\tau B(T, T+\theta) G_x^a,
 \end{aligned}$$

also den Barwert der Rentenverpflichtung gemäß der aktuellen Zinskurve  $L(\cdot, \cdot)$ .

## 16 Statisches Hedging in der Rentenbezugszeit mit Option auf Fondsrente

- Die obige Hedge-Strategie mit  $FRS$  deckt die Option des Versicherungsnehmers ( $x$ ) auf die Wahl zwischen der garantierten Rente  $G_x^a$  und der Fondsrente  $G_x^f$  nicht ab.
- Wählt der Versicherungsnehmer am Ende der Aufschubzeit die Fondsrente  $G_x^f$ , ist der für die Absicherung der garantierten Rente  $G_x^a$  gebildete Hedge-Portfolio nur eingeschränkt nützlich, wenn überhaupt.

- Der Hedge-Portfolio, der bei der Wahl der Fondsrente den Versicherer von der Pflicht der Swap-Zahlungen befreien kann, muss also Optionen auf Swaps beinhalten:

$$RSO = \left\{ \left( \sum_{x \in X^{t^*}} p_{T+\theta}^R p_x^\tau \theta V_{x+T}^{t^*,a} G_x^a \right) (K_\theta^{t^*} - L(\theta, \theta + 1))^+ \mid \theta = 0, \dots, \omega - x - T \right\},$$

oder Summe der einjährigen Receiver-Swaptions mit Laufzeiten  $T + \theta$ .

- Befindet man sich im Rentenbezug, dann werden die Receiver-Swaptions durch Floors oder Floorlets ersetzt.
- Der Wert des Hedge-Portfolios  $RSO$  wird den Barwert der Rentenverpflichtung

übersteigen, weil hier ein echter Aufwand aus dem Absicherungsgeschäft durch die Bedingung  $(K_\theta^{t*} - L(\theta, \theta + 1))^+$  unterbunden wird.

## 17 Anmerkungen zu den statischen Hedge-Portfolien

- Pauschale Verwendung der Swaptions mit Tenor, der länger als ein Jahr dauert, ist aus folgenden Gesichtspunkten problematisch:
  1. Beim Eintreten in ein solches Swaption- oder Forward-Swap-Geschäft kann man nur gleichbleibenden Nominal wählen, der sich an die Bestandsentwicklung nicht anpasst.
  2. Bei einer solchen Swaption muss man sich einmalig zum Ausübungstermin entscheiden, ob man die Option ausüben will, und zwar aufgrund des Kriteriums, dass die Summe der Barwerte der einzelnen Zinszahlungssalden in einem bestimmten Zeitpunkt positiv ist. Hier besteht das Risiko der Fehleinschätzung der zukünftigen Marktentwicklung.
- Aus Sicht der Überschussbeteiligung entsteht beim Eintreten des Forward-Swaps kein Zinsüberschuß, weil der von dem wirtschaftlichen Ergebnis unabhängiger Tausch der Zinszahlungsströme immer zu der angestrebten Fortschreibung der Deckungsrückstellungen führt und lässt damit weder Über- als auch Unterschuß entstehen.
- Das Eintreten in ein Forward-Swap ist nicht mit Kosten verbunden.

- Der Einsatz von Swaptions und Floorlets führt notwendigerweise zum Überschuß in den Jahren, wo die Option auf Zinstausch nicht ausgeübt wird.
- Das Eintreten in eine Swaption erfordert eine Investition.
- Der Markt ist unvollständig: aktuell werden auf dem Markt Forward-Swaps mit Laufzeiten bis zu 10 Jahren mit anschließenden Zinstauschphase bis zu 10 Jahren gehandelt.
- Diese Instrumente eignen sich damit am besten zum statischen Hedging der ersten Jahre der Rentenlaufzeit der GMIB-Kontrakte mit Aufschubzeiten unter 10 Jahren.
- Die Swaps mit den Laufzeiten bis zu 30 Jahren sind zur Absicherung des Zinsänderungsrisikos in der Rentenlaufzeit geeignet.
- Die Laufzeiten der Swaptions liegen in der Regel bei 6 bis 12 Monaten. Es kommen auch Swaptionvereinbarungen mit Laufzeiten bis 3 oder 4 Jahren vor, in Sonderfällen auch noch längerfristige.

## 18 Fazit

Die Anbieter von Variablen Annuitäten werden sich in Zukunft mit folgenden Punkten auseinander setzen:

- Überprüfen der aktuellen Risiken: Überprüfen die Effektivität ihrer Hedge-Programme, Stress-Test der bestehenden Produktportfolien und der Hedge-Programme unter mehreren Kapitalmarktszenarien, Verbesserung der Transparenz der eingegangenen Risiken.
- Entwicklung eines kurzfristigen Plans für die Entschärfung der eingegangenen Risiken: Erweiterung der Hedge-Programme auf Rückversicherung, strukturierte Produkte und dynamisches Hedging, bessere Abschätzung der in die Produkte eingebetteten Optionen im Pricing, Änderungen des Produktdesigns.
- Festsetzung der Strategie für Variable Annuitäten unter den unsicheren Bedingungen: Abgrenzung des Risikoappetits, Beschränkung auf die für den Vertrieb wichtigsten Garantiebausteine und Optionen sowie tieferes Verständnis ihrer Risiken für das bessere Pricing und Hedging, Restrukturierung des Vertriebs und Anpassungen des Verkaufsvolumens.

## 19 Anhang

### Finanzmathematik

$A_t$  der Preis des Assets  $A$  im Zeitpunkt  $t$ .

$\mu_{A_t}$  die kontinuierliche Rendite des Assets  $A$  im Zeitpunkt  $t$ .

$\sigma_A$  die Volatilität des Assets  $A$ .

$r_t$  die kontinuierliche Spotrate.

$B(t, T)$  der Preis eines im Zeitpunkt  $T$  fälligen Bonds zum Nennwert 1 im Zeitpunkt  $t$ .

$L(t, T)$  kontinuierlicher Zinssatz bzw. Spotrate.

### Biometrie

$\omega$  das höchste rechnerische Alter gemäß der gewählten Ausscheideordnung.

${}_t p_x^T$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen bis zum Alter  $x + t$  im Versicherungskollektiv zu verbleiben, d. h. weder zu sterben, noch zu stornieren.

$a_{x+t}(t, T)$  der Barwert einer im Zeitpunkt  $T$  fälligen jährlich zu zahlender Leibrente vom Betrag 1 eines  $x + t$ -jährigen im Zeitpunkt  $t$ .

$a_{x+t}(t, T) = B(t, T) a_{x+T}(T)$ .

### **Entscheidungswahrscheinlichkeiten**

$p^R$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte am Ende der Aufschubzeit nicht die Kapitalauszahlung wählt, sondern sich zwischen der Verrentung des Fondsvermögens und der garantierten Mindestrente entscheiden wird.

### **Vertragswerte**

$G^a$  die garantierte Mindestjahresrente.



# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

BELTIOS GmbH

Johannisstrasse 64

50668 Köln

Dmitrij Kusnezow

[dmitrij.kusnezow@beltios.com](mailto:dmitrij.kusnezow@beltios.com)

Tel.: +49(0)89 45 22 978 27

Fax: +49(0)89 45 22 978 88

Mobil.: +49(0)172 82 800 74