Aussagekraft der Effektivverzinsung und anderer Renditekennzahlen

Prof. Dr. Claudia Cottin, Aktuar DAV

DAA

DEUTSCHE
AKTUAR-AKADEMIE GmbH

DAA-Workshop Loccum, 19. August 2011

Einleitung

Der u.a. aus der Preisangabenverordnung bekannte Begriff "Effektivverzinsung" könnte suggerieren, dass diese Kennzahl die einzig "wahre" zur Bemessung von Renditen (etwa bei festverzinslichen Wertpapieren) oder durchschnittlichen Schuldzinsen bei Krediten ist.

Ziel des Vortrag ist es zu zeigen, dass es sich dabei jedoch nur um eine von verschiedenen möglichen Renditekennzahlen handelt, welche jeweils ihre spezifischen Vor- und Nachteile besitzen.

Neben Renditekennzahlen, die den prozentualen Anlageerfolg messen, sollten außerdem absolute Größen wie "fairer" Kurswert oder Gewinn zur Beurteilung von Investments herangezogen werden. Der Coupon-Effekt bei festverzinslichen Wertpapieren oder der Cost-Average-Effekt bei Sparplänen zeigen, dass prozentuale und absolute Erfolgsgrößen für eine Anlageentscheidung nicht immer in die gleiche Richtung weisen.

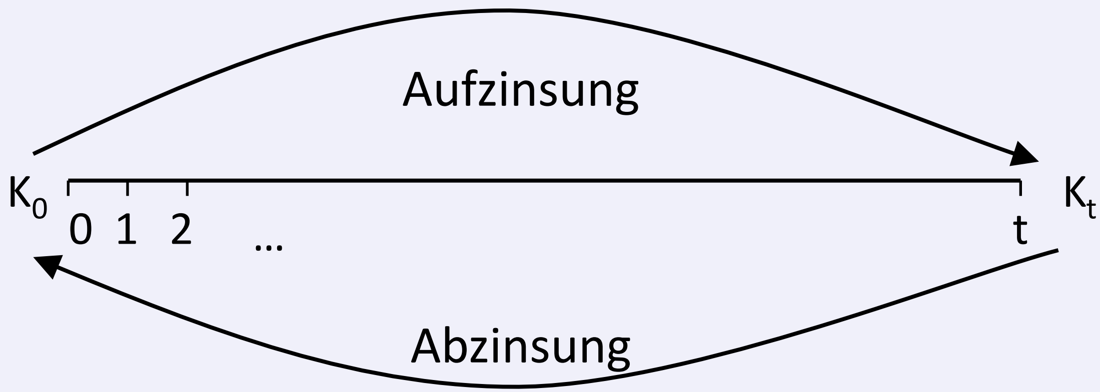
Schließlich muss für eine Investitionsentscheidung natürlich noch das Risiko möglicher Renditen mit in Betracht gezogen werden, wie an einem kleinen Beispiel ausblicksartig demonstriert wird.

Inhaltsübersicht

Was ist überhaupt "Zins"?

Frage 1: Auf welchen Wert sollte eine aktuelle Geldanlage bis zum Zeitpunkt t (bzw. nach t Zeiteinheiten) angestiegen sein?

Frage 2: Welcher Wert ist einer zum zukünftigen Zeitpunkt t fälligen Zahlung heute beizumessen?



Zins und Diskontierung: Begriffserläuterung

Frage 1: Auf welchen Wert sollte eine aktuelle Geldanlage bis zum Zeitpunkt t (bzw. nach t Zeiteinheiten) angestiegen sein?

Frage 2: Welcher Wert ist einer zum zukünftigen Zeitpunkt t fälligen Zahlung heute beizumessen?

Bei der Beantwortung von Frage 1 spricht man von ***Aufzinsung*** des aktuellen Anlagebetrages K_0 und bezeichnet den in zukünftigen Betrag

$$K_t = EW(K_0) = q(t)\cdot K_0 = (1+i(t))\cdot K_0$$

als ***Endwert*** zum Zeitpunkt t [mit prozentualer Verzinsung i(t); *Aufzinsungsfunktion* q(t)].

Bei der Beantwortung von Frage 2 spricht man von ***Abzinsung*** (*Diskontierung*) des zum künftigen Zeitpunkt t fälligen Betrages K_t und bezeichnet den heutigen Wert

$K_0 = BW(K_t) = v(t)\cdot K_t$ [mit *Abzinsungsfunktion* $v(t) = 1/q(t)$]

als ***Barwert*** dieser Zahlung.

Die genaue Gestalt der zeitabhängigen Zinsfunktion ist per se mehr oder weniger beliebig.

Lineare Verzinsung (mit festem Zinssatz)

Die spezielle Aufzinsungsfunktion

$$q(t) = 1 + t \cdot i$$

beschreibt einen Verzinsungsprozess, der üblicherweise als ***einfache*** oder ***lineare Verzinsung*** zum *Zinssatz* i bezeichnet wird. Der Zinssatz $i \geq 0$ ist also die finanzielle „Entschädigung“ für die Kapitalüberlassung pro Geldeinheit während einer Zeitperiode der Länge $t = 1$.

Die Vorgehensweise bei der unterjährlichen linearen Verzinsung bedarf einer näheren Präzisierung und kann zu merkwürdigen Effekten führen (vgl. *Excel-Bsp.*). Trotzdem wird sie in D bis heute noch bei diversen Finanzprodukten angewendet.

Bei der Effektivzinsberechnung gemäß Preisangabenverordnung (PAngV) muss seit dem Jahr 2000 aber unterjährlich die exponentielle Verzinsung zugrunde gelegt werden.

Geometrische Verzinsung (mit festem Zinssatz)

Die spezielle Aufzinsungsfunktion

$$q(t) = (1 + i)^t$$

beschreibt einen Verzinsungsprozess, der als ***geometrische*** oder ***exponentielle Verzinsung*** (*Verzinsung mit Zinseszins*) zum Zinssatz i bezeichnet wird.

Für eine Zeitperiode der Länge 1 stimmen geometrische und lineare Verzinsung überein.

Die geometrische Aufzinsungsfunktion besitzt die Eigenschaft

$$q(t_2) = q(t_1) \cdot q(t_2 - t_1) \quad \text{für} \quad 0 \le t_1 \le t_2 \,,$$

d. h. eine Verzinsung für t_1 Zeiteinheiten mit anschließender Verzinsung für $t_2 - t_1$ Zeiteinheiten entspricht einer Verzinsung für t_2 Zeiteinheiten. Diese "natürliche" Multiplikationsbedingung wird von der linearen Verzinsung zum Zinssatz i nicht erfüllt!

Diskrete unterjährige Verzinsung: Zu den m äquidistanten Zeitpunkten

$$t = 1/m, \dots, (m-1)/m, 1$$

innerhalb einer Zeitperiode der Länge 1 (z.B. Jahr) erfolge nachschüssig eine Zinsgutschrift.

Unterjähriger bzw. ***relativer Zinssatz*** sei p/m (zeitunabhängig);

sog. ***nomineller Zinssatz*** ist p .

Nach den m Teilperioden ist ein zu Beginn des Jahres investiertes Anfangsvermögen K_0 mit Zinseszinsen angewachsen auf:

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m$$

Für die äquivalente ***effektive jährliche Verzinsung*** $r = r_m$ ergibt sich:

$$1 + r = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m \quad \Leftrightarrow \quad r = r_m = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1$$

Grenzübergang im Modell der diskreten unterjährlichen Verzinsung zu einem festen relativen Zinssatz führt auf den ***stetigen Zinssatz (Zinsrate)*** u:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{u}{m}\right)^m = \exp(u) = e^u = 1+r$$

Zusammenhang zwischen effektiver jährlicher Verzinsung r und stetigem Zins u:

$$r = e^u - 1 \quad \text{bzw.} \quad u = \ln(1+r)$$

Bis zum Zeitpunkt T ist ein anfänglich investiertes Kapital K_0 mit Zinseszinsen angewachsen auf:

$$K_T = K_0 \cdot (1+r)^T = K_0 \cdot e^{Tu}$$

Allgemein ist ein zum Zeitpunkt s bestehendes Kapital K_s bei kontinuierlicher Verzinsung zur Zinsrate u bis zum Zeitpunkt T>s (s, T $\in$ IR^+) angewachsen auf:

$$K_T = K_s \cdot e^{(T-s)u}$$

Ersetzt man die konstante Zinsrate u durch eine ***zeitabhängige Zinsrate*** u(t), so gilt:

$$K_T = K_s \cdot \exp\left(\int_s^T u(t)dt \right)$$

Bar- und Endwerte von Zahlungsreihen

Gegeben sei ein fiktives Konto, auf das zu n+1 Zeitpunkten t_k mit $0 = t_0 < t_k < t_{k+1}$ Einzahlungen $E_k \geq 0$ bzw. Auszahlungen $A_k \geq 0$ mit Saldo $Z_k = E_k - A_k$ erfolgen.

Gegeben sei ferner eine Abzinsungsfunktion v(t) mit zugehöriger Aufzinsungsfunktion q(t) = 1/v(t).

Dann bezeichnen wir die Summe der einzelnen Barwerte bzw. Endwerte als **Barwert bzw. Endwert der Zahlungsreihe Z** = $(Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$; d.h.

$$BW(\mathbf{Z}) := \sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot v(t_k)$$

heißt ***Barwert der Zahlungsreihe*** (zum Zeitpunkt $t_0 = 0$);

$$EW(\mathbf{Z}) := \sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot q(t_n - t_k)$$

heißt ***Endwert der Zahlungsreihe*** (bis zum Zeitpunkt t_n).

Bar- und Endwerte: Visualisierung

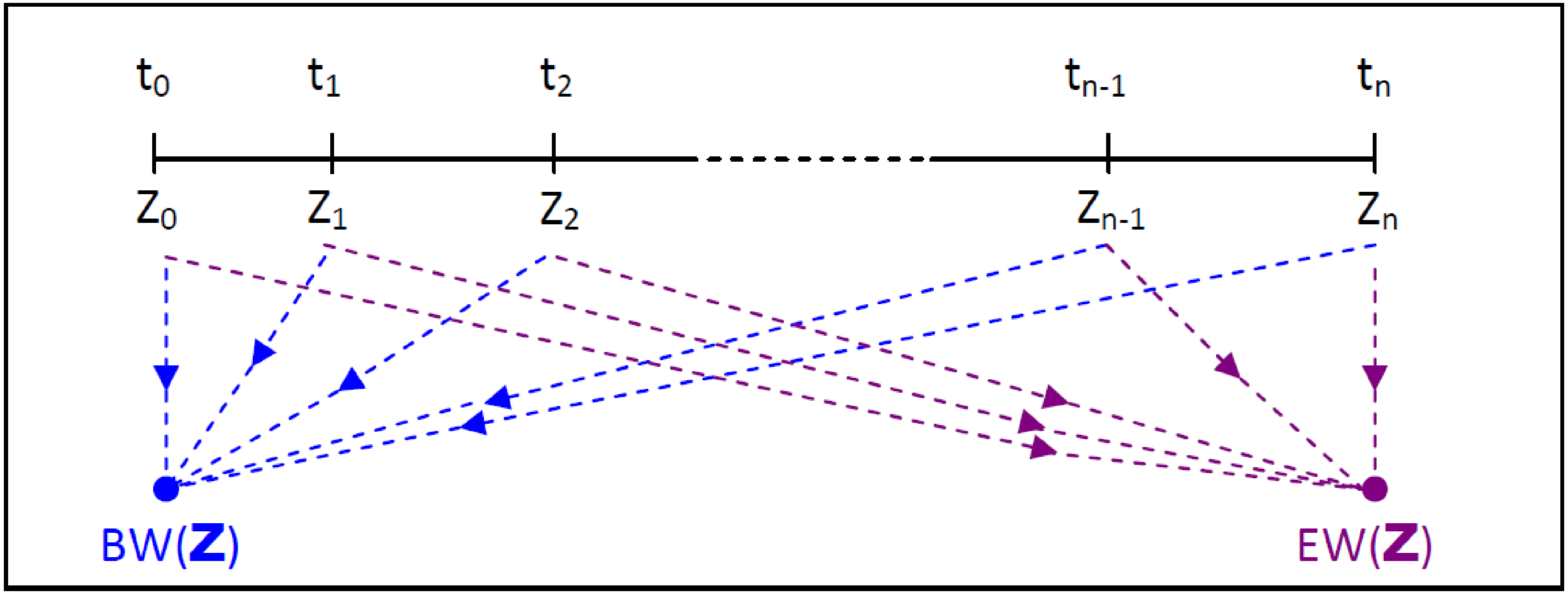


Abbildung: Barwertansatz

Anm.: Bei Finanzprodukten ist üblicherweise $Z_k \geq 0$ für $k > 0$.

Mit $Z_0 = 0$ ist BW(**Z**) der theoretische Preis der Zahlungsreihe $Z_1, \dots Z_n$.

Mit $Z_0 = -P_0$ (P_0 als tatsächliche Anfangsinvestition) kann z.B. aus dem Barwertansatz die (interne) Rendite bestimmt werden (s. später). Der Barwert der Zahlungsreihe einschließlich Anfangsinvestition wird manchmal auch ***Kapitalwert*** genannt.

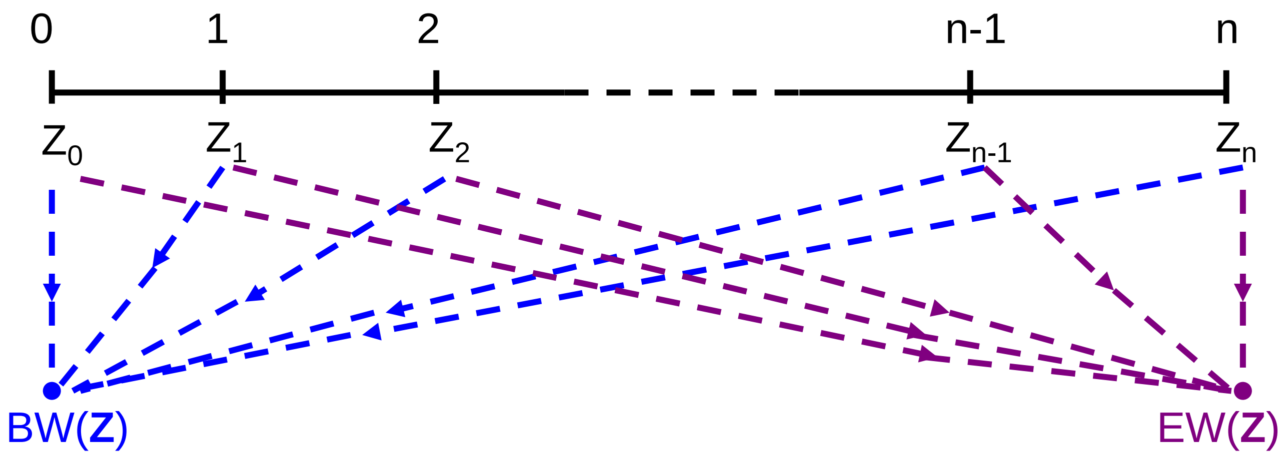
In den meisten Anwendungen setzen wir $t_k = k$ und $v(k) = (1+s_k)^{-k}$ für k = 0, 1, ..., n.

Dies ist nur eine marginale Einschränkung, da die Länge der Einheitszeitperiode beliebig klein gewählt werden kann und einige Zahlungen des Cashflows gleich 0 gesetzt werden können.

s_k heißt k-te *Spot-Rate*. Dies ist der durchschnittliche Zins pro Zeitperiode für eine einzelne Investition über k Zeitperioden.

Für s_k = r konstant (r heißt dann *Diskontierungszins*) setzen wir v(1) = v und 1/v = q, so dass

$$BW(\mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot v^k \qquad ; \qquad EW(\mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot q^{n-k}$$



Beispiel: Theoretischer Kurs eines Bonds (zu Beginn einer Zinsperiode)

Bonds (Zinstitel) verbriefen eine schuldrechtliche Verpflichtung und beinhalten entsprechende Forderungsrechte des Gläubigers (terminlich fixierte Zins- und Tilgungszahlungen).

Verwandte Begriffe: Schuldverschreibungen, Darlehen, Renten, Anleihen, ...

Mathematische Beschreibung durch Zahlungsreihe:

$$(-K_0, Z_1, \ldots, Z_n)$$

mit Kaufkurs K_0 und Zins- und Tilgungszahlungen $Z_1, \ldots, Z_n$ (in $t = 1, \ldots, n$).
(Z_n kann auch der Verkaufspreis bei Veräußerung sein.)

Bei vorgegebener Abzinsungsfunktion und unter Vernachlässigung von Ausfallrisiken lässt sich der theoretisch faire **Kurs K_0** eines Bonds als Barwert der künftigen Kapitalrückflüsse berechnen:

$$K_0 = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot (1 + s_k)^{-k},$$

wobei die sog. *Spot-Rate* s_k der Vergleichszins p.a. für eine Geldanlage von k Jahren Dauer ist. (Formale Begründung über ein No-Arbitrage-Argument; s. später.)

Inhaltsübersicht

Renditekonzeptionen: Problemstellung

Die Rendite ist eine Art **„Durchschnittszins" zur Beurteilung des Anlageerfolges** einer (i.d.R.) mehrperiodigen Investition.

<u>Probleme</u>:

→ Wie werden zwischenzeitliche **Einzahlungen und Entnahmen** beim Investitionsvermögen behandelt?

→ Wie werden zwischenzeitliche **Erträge** (Dividenden, Kupons etc.) auf das Vermögen behandelt? **Reinvestitionsannahmen?**

→ **Ziel der Renditemessung?**

z.B. Erfolgsmessung bezogen auf eingesetztes Kapital (Investorensicht) oder in Form einer nicht kapitalgewichteten Durchschnittsrendite (Sicht des KA-Managers)

Alternative mögliche Vorgaben bei der Ermittlung von (Durchschnitts-)Renditen:

- Einperiodenrenditen r_1, ... r_T
- Gesamtvermögenswert („Kontostand“) K_t in t = 0, 1, ..., T sowie Information über die Höhe nicht anlagebedingter Zuflüsse bzw. Entnahmen.
- Charakteristische Zahlungsreihe einer Investition ($-A_0$, Z_1, ...,Z_T)

  A_0 - anfängliche Investition

  Z_1, ..., Z_T - (positive) Rückflüsse aus der Investition

Alle Werte werden im Folgenden zunächst als deterministisch angesehen (sichere Zahlungen bzw. ex-post-Betrachtung).

Rendite einer einmaligen einperiodigen Investition

Betrachte **endfälliges Investment** (etwa: **Zero-Bond**):

Zum Zeitpunkt 0 erfolge eine Investition der Höhe K_0 und zum Zeitpunkt T die einzige Rückzahlung in Höhe K_T.

(Nur) in diesem Fall ist die Definition unproblematisch.

Die **Gesamtrendite** für den Investitionszeitraum [0;T] ist:

$$r(0,T) = \frac{K_T - K_0}{K_0} \qquad \Rightarrow K_T = K_0 \cdot (1 + r(0,T))$$

Geometrisch annualisierte Rendite einer einmaligen Investition

Zur besseren Vergleichbarkeit ist man an der zur Gesamtrendite äquivalenten Einperiodenrendite - üblicherweise bezogen auf ein Jahr: **annualisierte Rendite** - interessiert.

Unter Zugrundelegung einer konstanten geometrischen Verzinsung ergibt sich die annualisierte Rendite als ***geometrische Durchschnittsrendite*** r_G aus der Beziehung:

$$(1+r_G)^T = 1 + r(0,T) \quad \Leftrightarrow \quad r_G = \sqrt[T]{1+r(0,T)} - 1$$

Geom. Durchschnittsrenditebei bekannten Einperiodenrenditen

Auf analoge Weise ergibt sich die annualisierte Rendite bei bekannten Einperiodenrenditen r_t der t-ten Periode (t = 1,..., T).

Das Anfangsvermögen K_0 wächst bis zum Zeitpunkt T auf den Wert K_T an. Es gilt dann also:

$$K_T = K_0(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_T) = K_0\prod_{t=1}^{T}(1+r_t) \quad .$$

Unter Zugrundelegung einer konstanten geometrischen Verzinsung ergibt sich die annualisierte Rendite als *geometrische Durchschnittsrendite* r_G aus der Beziehung:

$$r_G = \sqrt[T]{(1+r_1)\cdots(1+r_T)} - 1 = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)} - 1 \quad .$$

Geom. Durchschnittsrendite bei bekannter Vermögensentwicklung

Die geometrische Durchschnittsrendite kann auch bei Kenntnis des Vermögenswerts K_t zu den Periodenenden sowie der nicht anlagebedingten Kapitalzu- und –abflüsse Z_t , d.h. der Einzahlungen ($Z_t \geq 0$) bzw. Entnahmen ($Z_t < 0$), bestimmt werden.

Dazu berechnet man zunächst die **zuflussbereinigten Periodenrenditen** r_t aus dem Ansatz:

$$K_t = (r_t + 1) \cdot (K_{t-1} + Z_{t-1}) \ .$$

Für die geometrische Durchschnittsrendite ergibt sich wiederum

$$r_G = \sqrt[T]{(1+r_1)\cdots(1+r_T)} - 1 = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)} - 1 \quad .$$

Arithmetisch annualisierte Rendite

Weniger sinnvoll ist i.d.R. eine arithmetische Annualisierung der Gesamtrendite gemäß Ansatz

$$r_A \cdot T = r(0,T) \quad \Leftrightarrow \quad r_A = \frac{1}{T}\frac{K_T - K_0}{K_0}$$

bzw. bei vorgegebener Zahlungsreihe ($-A_0$, Z_1, ...,Z_T) gemäß

$$r_A = \frac{1}{T}\frac{\sum_{t=1}^{T} Z_t - A_0}{A_0} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{Z_t - \frac{A_0}{T}}{A_0}$$

Für T > 1 wird die Möglichkeit der Wiederanlage der Rückflüsse ignoriert bzw. ein Wiederanlagezins in Höhe von Null angesetzt. Zinseszinseffekte werden somit nicht berücksichtigt.
$\rightarrow$ Die so bestimmte Rendite fällt *systematisch zu hoch* aus.

Bei bekannten Einperiodenrenditen r_t ist die ***arithmetische Durchschnittsrendite*** r_A definiert als arithmetisches Mittel der Periodenzinssätze:

$$r_A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

Allgemein gilt stets $\mathbf{r_A \geq r_G}$;

das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $r_1 = \ldots = r_T$.

Bei Ansatz der nichtkontinuierlichen Periodenzinssätze r_t weist die arithmetische Durchschnittsrendite also wiederum einen systematisch zu hohen Wert auf.

Sinnvoll ist sie allerdings für stetige Zinsraten.

Stetige Durchschnittsrenditen

Gegeben seien die stetigen Einperiodenrenditen:

$$u_t = \ln(1+r_t) = \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) = \ln(K_t) - \ln(K_{t-1})$$

Die **äquivalente konstante einperiodige Zinsrate** u_A wird auch als ***kontinuierliche oder stetige Durchschnittsrendite*** bezeichnet.

Es gilt:

$$u_A = \ln(1+r_G) = \frac{1}{T}\ln\left(\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(1+r_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}u_t$$

Die kontinuierliche Durchschnittsrendite entspricht also dem **arithmetischen Mittel der einperiodigen Zinsraten**.

Die Einfachheit der Berechnung ist wichtiges Argument für die Verwendung zeitstetiger Renditen, bes. in stochastischen Modellen.

Beispiel:

Entwicklung Aktienkurs: $K_0 = 100$; $K_1 = 200$; $K_2 = 100$

$r_1 = (200 - 100) / 100 = 100\%$;

$r_2 = (100 - 200) / 200 = -50\%$

$r_A = (100\% - 50\%) / 2 = 25\%$

$r_G = (2 \cdot 0{,}5)^{0{,}5} - 1 = 0\%$

Weitere Beispiele in Excel

Allgemein ist die **Differenz r_A - r_G** umso größer bzw. der **Quotient** $0 \leq$ **$(1+r_G)/(1+r_A)$** ≤ 1 um so kleiner, je stärker die Einzelrenditen voneinander abweichen.

Derartige Kennzahlen können also als eine Art **Risikomaß** angesehen werden (z.B. bei der ex-post-Betrachtung von Kapitalanlagen).

Inhaltsübersicht

- Was ist überhaupt Zins ?
- Lineare und exponentielle Verzinsung / Diskontierung
- Diskontierung: Barwert / Kapitalwert von Zahlungsreihen
- Was ist Rendite ?
- Vergleich: geometrische vs. arithmetische Durchschnittsrendite
- Interne Rendite (= Effektivverzinsung): Definition und Interpretation
- Vergleich: Interne Rendite vs. geometrische Durchschnittsrendite
- Vergleich: Interne Rendite vs. Kapitalwerte / Coupon-Effekt
- Beispiel: Effektivverzinsung bei Kombikrediten
- Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt
- Interpretation von Renditeverteilungen (Beispiel)

Die ***interne Rendite*** r_I (oder: ***Effektivzins***) einer Investition ist die Nullstelle der Kapitalwertfunktion (oder auch: der Endwertfunktion) als Funktion des konstanten Zinssatzes r.
Bei vorgegebener Zahlungsreihe $\{-A_0, Z_1, \ldots, Z_T\}$ mit einer Anfangsinvestition A_0 gefolgt von positiven Rückflüssen lautet die Definitionsgleichung also:

$$-A_0 + \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r_I)^{-t} = 0 \Leftrightarrow A_0 (1+r_I)^T = \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r_I)^{T-t}$$

- Die Gleichung besitzt eine eindeutige (allerdings i.d.R. nur numerisch bestimmbare) Lösung $r_I > -1$.
- Verallgemeinerung auf allgemeine Zahlungsreihen mit mehreren Vorzeichenwechseln („Nichtnormalinvestitionen“) i.d.R. nicht sinnvoll (keine oder mehrere Lösungen). *(Excel-Beispiele dazu)*

Interpretation der internen Rendite im Kontoführungsmodell

Beispiel: Eine Anfangsinvestition von 70.000 GE mit Rückflüssen von 13.947 GE p.a. über 10 Jahre weist eine interne Rendite von 15% auf. Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren?

Interne Rendite r:		15,00%	A_0 = K_0 =	70000
ZINS(10,-13947,70000)			Z_1, ..., Z_10 =	13947
Ende Jahr t	**Kontostand vor Zins + Tilgung K_(t-1)**	**Zinszahlung I_t = r * K_(t-1)**	**Entnahme / Tilgung Z_t = 13947**	**Kontostand nach Zins + Tilgung K_t = K_(t-1) + I_t - Z_t**
				K_0 = 70000
1	70000,00	10499,15	13947,00	66552,15
2	66552,15	9982,02	13947,00	62587,17
3	62587,17	9387,32	13947,00	58027,48
4	58027,48	8703,42	13947,00	52783,90
5	52783,90	7916,95	13947,00	46753,85
6	46753,85	7012,51	13947,00	39819,36
7	39819,36	5972,42	13947,00	31844,78
8	31844,78	4776,33	13947,00	22674,11
9	22674,11	3400,84	13947,00	12127,95
10	12127,95	1819,05	13947,00	0,00

Bei Aufnahme von **Fremdkapital** entstehen Schulden in Höhe der Anfangsinvestition A_0; die Einnahmeüberschüsse Z_t aus dem Projekt dienen zur Rückzahlung der Schuld.
Wird das Konto zum internen Zins geführt, beträgt der Kontostand am Ende der Projektlaufzeit Null.

Steht stattdessen **Eigenkapital** in Höhe von A_0 zur Verfügung und wird die Investition nicht durchgeführt, könnte einem zum internen Zins r geführten Vergleichskonto jährlich der Betrag Z_t entnommen werden, wenn zum Ende der Laufzeit des Vergleichsprojekts der Kontostand ebenfalls Null betragen soll.

Kontoführungsmodell zur Def. der internen Rendite allgemein

Zeitpunkt t	Kontostand K_t in t	Zinsgutschrift I_{t+1} in t+1	Entnahme / Rückzahlung in t+1
0	A_0	$r_I \cdot A_0$	Z_1
1	$(1+r_I)\cdot A_0 - Z_1$	$r_I \cdot [(1+r_I)\cdot A_0 - Z_1]$	Z_2
2	$(1+r_I)\cdot[(1+r_I)\cdot A_0 - Z_1] - Z_2$	$r_I \cdot [(1+r_I)\cdot[(1+r_I)\cdot A_0 - Z_1] - Z_2]$	Z_3
...			
m	$(1+r_I)^m \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{m} Z_k \cdot (1+r_I)^{m-k}$	$r_I \cdot [(1+r_I)^m \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{m} Z_k \cdot (1+r_I)^{m-k}]$	Z_{m+1}
...			
n-1	$(1+r_I)^{n-1} \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cdot (1+r_I)^{n-1-k}$	$r_I \cdot [(1+r_I)^{n-1} \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cdot (1+r_I)^{n-1-k}]$	Z_n
n	$(1+r_I)^n \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot (1+r_I)^{n-k} = 0$		

Interpretation der internen Rendite

Das Kontoführungsmodell zeigt, dass die interne Rendite <u>**nur dann**</u> als „tatsächliche" **annualisierte Rendite der (Anfangs-)Investition** interpretiert werden kann, wenn die Rückflüsse stets zu diesem internen Zins reinvestiert werden können (etwa bei ständiger Wiederholung der Investition zu identischen Bedingungen); man spricht auch von der ***Wiederanlageprämisse***.

Andernfalls ist die interne Rendite lediglich eine **Durchschnittszins auf das „in der Investition gebundene" Kapital** (d.h. auf einen von der genauen Zahlungsreihe abhängigen und von Zeitperiode zu Zeitperiode abnehmenden Betrag); genauer:

$$KS = \sum_{t=0}^{n} K_t = \sum_{t=0}^{n} \left[(1+r_I)^t \cdot A_0 - \sum_{k=1}^{t} Z_k \cdot (1+r_I)^{t-k} \right] = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k - A_0}{r_I} = \frac{ZÜ}{r_I}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_I = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k - A_0}{\sum_{t=0}^{n} K_t} = \frac{ZÜ}{KS} = \frac{\frac{1}{n} ZÜ}{\frac{1}{n} KS}.$$

Achtung: Keine explizite Gleichung für r_I !

Inhaltsübersicht

- Was ist überhaupt Zins ?
- Lineare und exponentielle Verzinsung / Diskontierung
- Diskontierung: Barwert / Kapitalwert von Zahlungsreihen
- Was ist Rendite ?
- Vergleich: geometrische vs. arithmetische Durchschnittsrendite
- Interne Rendite (= Effektivverzinsung): Definition und Interpretation
- **Vergleich: Interne Rendite vs. geometrische Durchschnittsrendite**
- Vergleich: Interne Rendite vs. Kapitalwerte / Coupon-Effekt
- Beispiel: Effektivverzinsung bei Kombikrediten
- Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt
- Interpretation von Renditeverteilungen (Beispiel)

Wertentwicklung eines Investmentfonds	
Anfangsvermögen in *t* = 0	1.000.000 EUR
Wertzuwachs bis *t* = 1	400.000 EUR
Einzahlung des Investors in *t* = 1	1.000.000 EUR
Vermögen in *t* = 1 (nach Einzahlung)	2.400.000 EUR
Wertverlust bis *t* = 2	- 600.000 EUR
Endvermögen	1.800.000 EUR

Wie ist die Investition aus Sicht des Fondsmanagers und des Investors zu beurteilen?
Welche Renditekennzahl ist jeweils geeignet?

Erfolgsmessung bei einem Investmentfonds: Messziele

Die Angemessenheit einer Renditekennzahl ist abhängig von den mit der Renditebestimmung verbundenen Zielen.

1. Ziel: Messung der reinen Managementleistung

Es sollen nur die durch den Fonds-Manager beeinflussbaren Dispositionen berücksichtigt werden.

2. Ziel: Messung der Gesamtperformance

Beurteilung des Gesamterfolges der Anlage aus Sicht des Investors.

Erfolgsmessung: Sicht des Fondsmanagers

Zur Beurteilung der **Managementleistung** ist die Höhe der Kapitalzuflüsse irrelevant.

Ermittle zunächst die Periodenrenditen und dann die Durchschnittsrendite als geometrisches Mittel.

Rendite Periode 1:

$$\frac{1.400.000}{1.000.000} - 1 = +40{,}0\%$$

Rendite Periode 2:

$$\frac{1.800.000}{2.400.000} - 1 = -25\%$$

Geometrische Durchschnittsrendite:

$$r_G = \sqrt{\frac{1.400.000}{1.000.000} \cdot \frac{1.800.000}{2.400.000}} - 1 \approx 2{,}47\%$$

Der prozentuale Wertzuwachs der ersten Teilperiode wiegt somit schwerer als der Wertverlust in der zweiten Teilperiode.

Erfolgsmessung: Sicht des Investors

Aus Sicht des Investors ist der **Erfolg auf das in der Investition gebundene Kapital** entscheidend.

Daher ist die Verwendung der internen Rendite als Kennzahl angemessen. Sie berechnet sich gemäß:

$$1.000.000 \cdot (1 + r_I)^2 + 1.000.000 \cdot (1 + r_I) = 1.800.000$$

Einzig ökonomisch sinnvolle Lösung:

$$r_I = -6{,}82\% \,.$$

Interpretation:

- Gebundenes Kapital in t=0: 1.000.000
- Verzinsung bis t=1: 1.000.000·(0.931782) = 931.782
- Gebundenes Kapital in t=2: 1.931.782
- Verzinsung bis t=2: 1.931.782 (0.931782) = 1.800.000

Anm.: 1-0.068218 = 0.931782

Weitere Zahlenbeispiele

Inhaltsübersicht

Absolute und relative Erfolgsmessung

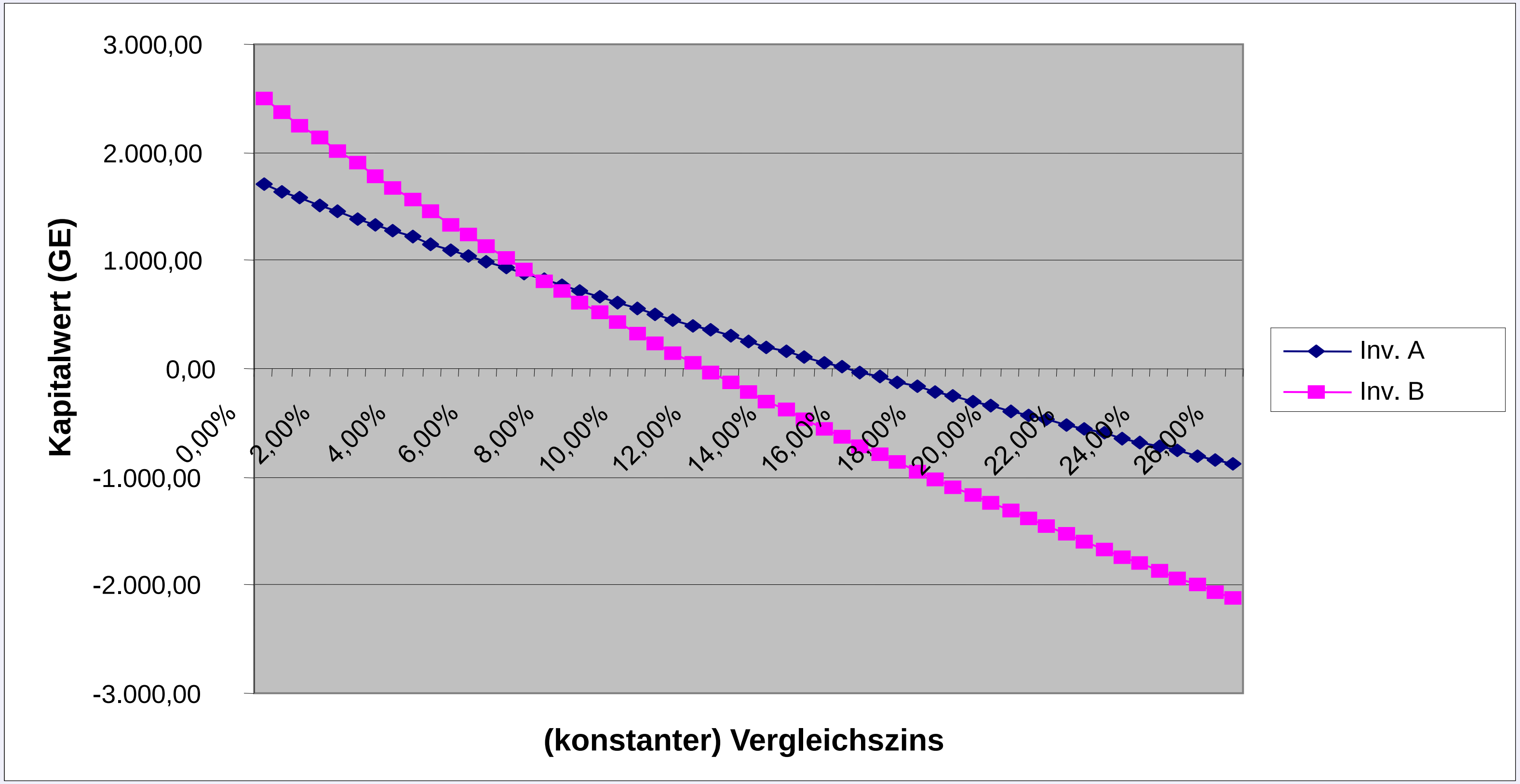
Der **Barwert bzw. Kapitalwert** eines Investments (bzw. der zugehörigen Zahlungsreihe) ist ein **„absolutes“ Erfolgsmaß (in GE)** zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit bzw. zur Identifizierung des besten Investments.

Alternative: **Interne Rendite** der Zahlungsreihe als **„relatives“ Erfolgsmaß (Performance in %)**.

Orientierung an der internen Rendite (= Effektivverzinsung) kann zu einer anderen Entscheidung führen als Orientierung am Kapitalwert.

Vergleich von interner Rendite und Kapitalwert als Investitionskriterium

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Kapitalwertkriterium und das Kriterium der internen Rendite zu unterschiedlichen Anlageentscheidungen führen können:
Zahlungsreihe A: (-10.000, 10.700, 1.000); Zahlungsreihe B: (-10.000, 0, 12.500)



Phänomen der sich schneidenden Kapitalwertkurven;
vgl. auch mit dem Coupon-Effekt bei Bonds.

Kurs und Effektivverzinsung von Bonds (zu Beginn einer Zinsperiode)

Ein Bond sei beschrieben durch die Zahlungsreihe

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$$

der Zins- und Tilgungszahlungen.

Bei vorgegebener Abzinsungsfunktion und unter Vernachlässigung von Ausfallrisiken lässt sich der theoretische **Kurs K_0** eines Bonds als Barwert der künftigen Kapitalrückflüsse berechnen:

$$K_0 = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot \left(1 + s_k\right)^{-k}$$

wobei s_k der Vergleichszins p.a. für eine Geldanlage von k Jahren Dauer ist (sog. *Spot-Rate*; vgl. später).

Umgekehrt ergibt sich bei bekanntem Kurs die ***effektive*** oder ***interne Rendite*** $\mathbf{r_I}$ (weitere Bez.: *Effektivzins; Yield-to-Maturity YTM*) des Bonds aus der Bestimmungsgleichung

$$K_0 = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot \left(1 + r_I\right)^{-k}$$

Beispiel: Kurs eines Standard-Bonds

Wir betrachten einen Standard-Bond mit Nennwert N und Nominalzins j zu Beginn eines Zinsjahres und nehmen zusätzlich vereinfachend an, dass der Marktzins i, also auch der Diskontierungsfaktor $v = 1/(1+i)$, während der Restlaufzeit $n \in \mathbb{N}$ konstant sei.

Dann ergibt sich für den aktuellen Kurs die Beziehung

$$K_0 = \sum_{k=1}^{n} j \cdot N \cdot v^k + N \cdot v^n = j \cdot N \cdot \frac{1 - v^n}{i} + N \cdot v^n$$

Für die **interne Rendite** eines Standard-Bonds gibt es (außer z.B. für n=2) keine geschlossenen Formeln, da hier - wie bereits allgemein angesprochen - die Nullstelle eines Polynoms zu bestimmen ist.

Zahlenbeispiel: Kurs eines Standard-Bonds

Kurs eines Standard-Bonds mit 5 Jahren Restlaufzeit, Nennwert € 100, Coupon von 10% und konstantem Diskontierungszins von 8% p.a.

$$PV = \frac{€10}{1+r} + \frac{€10}{(1+r)^2} + \frac{€10}{(1+r)^3} + \frac{€10}{(1+r)^4} + \frac{€10}{(1+r)^5} + \frac{€100}{(1+r)^5}$$

$$= \frac{€10}{1.08} + \frac{€10}{1.08^2} + \frac{€10}{1.08^3} + \frac{€10}{1.08^4} + \frac{€10}{1.08^5} + \frac{€100}{1.08^5}$$

$$= €9.26 + €8.57 + €7.94 + €7.35 + €6.81 + €68.56$$

$$= €107.98$$

Spot-Rates als Effektivverzinsung von Zero-Bonds

Die Effektivverzinsung eines Zero-Bonds (mit k Jahren Restlaufzeit) wird auch als (k-te) ***Spot-Rate*** bezeichnet. Theoretisch ergibt sich die *Spot-Rate* s_k für Zero-Bonds mit k Jahren Restlaufzeit also aus der Beziehung

$$K_0 \cdot (1 + s_k)^k = N \,,$$

wobei K_0 der Kurs und N der Nennwert ist.

Die Spot-Rates sind von besonderer Bedeutung, weil sie als Schätzung für "realitätsnahe" laufzeitabhängige Auf- bzw. Abzinsungsfunktionen

$$q(k) = (1 + s_k)^k \;\; ; \;\; v(k) = 1/(1 + s_k)^k \,.$$

für Barwertberechnungen etc. dienen können.

Grund, warum man zur Schätzung nicht einfach die internen Renditen anderer Bonds, wie etwa von Standard-Bonds, einsetzen sollte, ist der sog. Coupon-Effekt (vgl. später).

Die Funktion v(k) wird im gegebenen Zusammenhang auch als ***Diskontstrukturkurve*** bezeichnet; diese gibt also den Preis von Zero-Bonds mit Nennwert 1 in Abhängigkeit von der Laufzeit k an.

Aus den Spot-Rates s_k lassen sich die sog. *impliziten* ***Forward-Rates*** f_k ableiten. Das sind diejenigen Zinssätze, die im Folgejahr k für eine einjährige Geldanlage als marktüblich erwartet werden. Der Zusatz "implizit" soll andeuten, dass sich die Forward-Rates zwingend aus den Spot-Rates ableiten, d.h. ihre Nennung beinhaltet keine eigenständige Prognose.

Der Zusammenhang zur sukzessiven Bestimmung der Forward-Rates aus den Spot-Rates lautet:

$$(1+s_k)^k = \prod_{\nu=1}^{k}(1+f_\nu) \quad ;$$

d.h.: $1+s_1 = 1+f_1$, $(1+s_2)^2 = (1+f_1)\cdot(1+f_2)$, $(1+s_3)^3 = (1+f_1)\cdot(1+f_2)\cdot(1+f_3)$ usw.

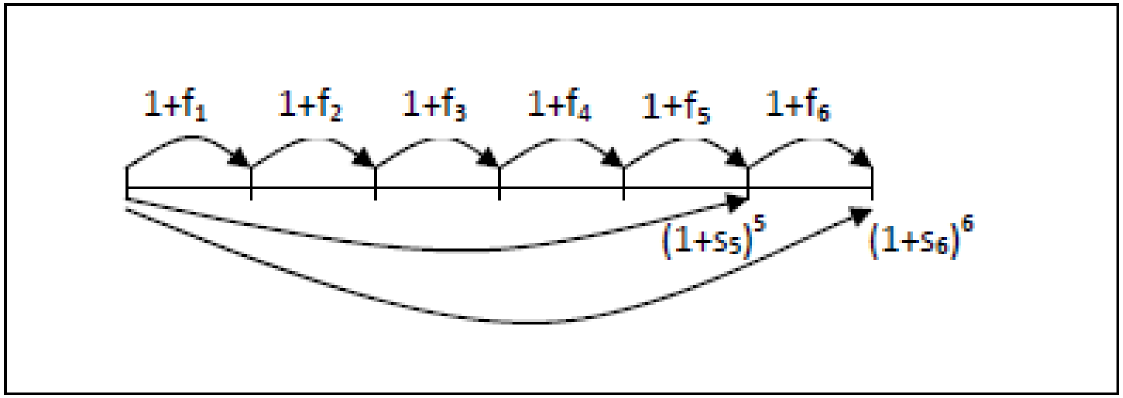


Abbildung: Zusammenhang von Spot-Rates und Forward-Rates

Begründung des zwingenden Zusammenhangs von Spot-Rates und Forward-Rates mittels Arbitrage-Argument (Beispiel)

Gegeben seien etwa die Spot-Rates s_1=11,11%, s_2=10,43%.
Außerdem werde in t=0 der Einperioden-Zins für eine Geldanlage/Kreditaufnahme in einem Jahr auf f_2'= 10% festgesetzt.

Aus beiden Spot-Rates berechnet sich die Forward-Rate zu:

$$f_2=1{,}1043^2/1{,}1111-1=9{,}75\%.$$

Dies ist niedriger als die (Pseudo-)„Forward-Rate" f_2'= 10% .

Ein Anleger könnte folgendermaßen einen Arbitrage-Gewinn erzielen:

- Kreditaufnahme von 1.000 für 2 Jahre zu 10,43%.
- Mittelanlage von 1.000 für 2 Jahre zu 11,11% im ersten und 10% im zweiten Jahr.
- Endkapital: 1.000*1,1111*1,1=1.222,21.
  Dies übersteigt den Tilgungsbetrag von 1.000*$1{,}1043^2$=1.219,48 um 2,73.

Bewertung eines Cashflows bei gegebenen Spot- oder Forward-Rates

Aus den Vorüberlegungen folgt, dass sich der theoretisch "faire" Preis P_0 eines Cashflows $(Z_1, Z_2, \dots, Z_T)$ von (risikofreien) nicht-negativen Zahlungen Z_t folgendermaßen mittels der Spot- oder Forward-Rates berechnen lässt:

$$P_0(s_1, \dots, s_T) = \sum_{t=1}^{T} Z_t (1 + s_t)^{-t}$$

$$P_0(f_1, \dots, f_T) = \sum_{t=1}^{T} Z_t \left[\prod_{i=1}^{t} (1 + f_i) \right]^{-1}$$

Formal können auch diese beiden Bewertungsformeln durch ein Arbitrage-Argument begründet werden (nachfolgend wieder nur an einem Beispiel), weil die einzelnen Zahlungen Z_t als Nennwert eines Zero-Bonds mit Laufzeit t aufgefasst werden können.

Arbitrage-Argument zur Begründung des theoretischen Preises (Beispiel)

Gegeben seien wieder die Spot-Rates s_1=11,11%, s_2=10,43%.

Daraus ergibt sich z.B. für einen zweijährigen Standard-Bond mit N = 100 und Z = 10 der theoretische Preis:

$$K_0 = 10/1{,}1111 + 110/(1{,}1043)^2 = 99{,}202583$$

Wäre der Preis z.B. niedriger, bspw. K_0 = 98, könnte der Anleger folgendermaßen einen Arbitrage-Gewinn erzielen:

- Kauf des Bonds zum Preis 98; Finanzierung des Kaufs durch Emission eines einjährigen Zero-Bonds mit N = 10 zum Preis 10/1,1111 = 9,00009 und eines zweijährigen Zero-Bonds mit N = 110 zum Preis $110/(1{,}1043)^2$ = 90,202493 (bzw. entspr. Kreditaufnahme).
- Die Rückflüsse des Standard-Bonds ermöglichen genau die Rückzahlung der Zero-Bonds (Kredittilgung). Die Differenz aus Emissionserlös und Kaufpreis in Höhe von 1,202583 kann angelegt werden; es verbleibt ein risikoloser Arbitrage-Gewinn.

Der Coupon-Effekt (I)

Die interne Rendite eines Bonds hängt von der Coupon-Höhe ab; zwei fair bewertete Bonds können eine unterschiedliche Effektivverzinsung aufweisen (unter sonst gleichen Bedingungen).

Daher sind auch die Renditen von Standard-Bonds zur Ermittlung angemessener Diskontierungssätze nur eingeschränkt geeignet.

Beispiel 1:

Betrachte Bonds B_1 und B_2 mit jeweils 3 Jahren Restlaufzeit, Nennwert von jeweils 100, sowie Nominalzins von 6% bzw. 12%.

Vergleichszins für Geldanlagen von ein-, zwei- bzw. dreijähriger Anlagedauer sei 8%, 9% bzw. 10% (*Spot-Rates*).

Theoretische Wertpapierkurse gemäß Barwertansatz:

$$K_1 = 6/1{,}08 + 6/(1{,}09)^2 + 106/(1{,}10)^3 = 90{,}2450 \;;$$

$$K_2 = 12/1{,}08 + 12/(1{,}09)^2 + 112/(1{,}10)^3 = 105{,}3585 \;.$$

Effektivzinssätze: $r_1 = 9{,}92\%$ bzw. $r_2 = 9{,}85\%$. (Veranschaulichung in Excel)

Der Coupon-Effekt (II)

Mittels des Coupon-Effekts lässt sich auch erläutern, dass wegen der Wiederanlageproblematik die interne Rendite einer Investition für das Treffen einer Anlageentscheidung nur von beschränkter Aussagekraft ist.

Beispiel 2:

Betrachte Bonds B_1 und B_2 mit jeweils 2 Jahren Restlaufzeit, Nennwert von jeweils 100, sowie Nominalzins von 5% bzw. 30%. Die Forward-Rates seien $f_1 = 15\%$ und $f_2 = 1\%$.

Beobachtete Kurse von Bond 1 bzw. Bond 2:

$$P_0^{(1)} = 94{,}75 \quad ; \quad P_0^{(2)} = 139{,}00$$

Resultierende Effektivverzinsungen:

$$r_1 = 7{,}94\% \quad ; \quad r_2 = 8{,}10\%$$

Man rechnet jedoch leicht nach, dass der Bond 2 auf Basis der gegebenen Zinsstruktur zu teuer ist (fairer Preis ist 138,01), während Bond 1 fair bewertet ist.

Es sollte also für eine Investition Bond 1 bevorzugt werden, auch wenn dieser gegenüber Bond 2 die geringere interne Rendite aufweist. *(Veranschaulichung in Excel)*

Der Coupon-Effekt (III)

Das nachfolgende Beispiel demonstriert noch genauer die Abhängigkeit der interne Rendite eines Standard-Bonds von der aktuellen Zinsstrukturkurve.

Beispiel 3: Interne Rendite eines 3-jährigen Standard-Bond mit Coupon C und fairem Kurs A_0 auf der Basis der Spot-Rates $s_1 = 2{,}00\%$; $s_2 = 2{,}50\%$; $s_3 = 4{,}30\%$ (entspricht Forward-Rates $f_1 = 2{,}00\%$; $f_2 = 3{,}00\%$; $f_3 = 8{,}00\%$).

C	0	2	4	6	8	10	12
$-A_0$	-88,13	-93,76	-99,39	-105,01	-110,64	-116,27	-121,90
Z_1	0	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00
Z_2	0	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00
Z_3	100	102,00	104,00	106,00	108,00	110,00	112,00
r_I	4,30%	4,26%	4,22%	4,19%	4,15%	4,12%	4,10%

Alle Bonds sind fair bewertet, also sollte die Höhe von r_I für sich genommen irrelevant für die Anlageentscheidung sein. Das Phänomen der unterschiedlichen Rendite entsteht, da die Definition der internen Rendite als solche gerade <u>nicht</u> von der Wiederanlageprämisse ausgeht. Nur bei Betrachtung der implizit "prognostizierten" Wiederanlagekonditionen erkennt man jedoch, warum dies so ist. In dem Beispiel können die Rückflüsse zu "attraktiven" Konditionen wiederangelegt werden.

Der Coupon-Effekt (IV)

<u>Fortsetzung Beispiel 3:</u> Im vorangegangenen Beispiel wird nun die Anfangsinvestition auf A_0 = 100 normiert (bei sonst gleichen Rahmenbedingungen). Es ergibt sich folgende Zahlungsreihe:

C	0	2	4	6	8	10	12
$-A_0$	-100,00	-100,00	-100,00	-100,00	-100,00	-100,00	-100,00
Z_1	0,00	2,13	4,02	5,71	7,23	8,60	9,84
Z_2	0,00	2,13	4,02	5,71	7,23	8,60	9,84
Z_3	113,46	108,79	104,64	100,94	97,61	94,61	91,88
r_I	4,30%	4,26%	4,22%	4,19%	4,15%	4,12%	4,10%
ZÜ	13,46	13,05	12,69	12,37	12,07	11,81	11,57
KS	313,09	306,47	300,60	295,36	290,64	286,38	282,52
ZÜf	13,46	13,46	13,46	13,46	13,46	13,46	13,46
$ZÜf/A_0$	4,30%	4,30%	4,30%	4,30%	4,30%	4,30%	4,30%

In Zeile ZÜf sind nicht nur die reinen Zahlungsüberschüsse erfasst, sondern die Coupon-Ausschüttungen wurden zusätzlich noch bis zum Laufzeitende mit den Forward-Rates angelegt, d.h.

$$ZÜf = Z_1 \cdot (1+f_2) \cdot (1+f_3) + Z_2 \cdot (1+f_3) + Z_3 - A_0 \,.$$

Dieser Betrag ist für alle Couponhöhen gleich und entspricht der Spot-Rate s_3.

Modifizierter Effektivzins (I)

Die Problematik der Wiederanlageprämisse, die der internen Rendite zugrunde liegt, bildet den Ausgangspunkt zur Definition einer Renditekonzeption, die von manchen Autoren auch als *modifizierter Effektivzins* bezeichnet wird. Dabei wird eine tatsächlich realisierbare "Opportunitätsrendite" r_0 zur Berechnung herangezogen (oder allgemeiner auch realistische periodenabhängige Wiederanlagezinsen wie Forward-Rates, s. vorangegangenes Beispiel).

<u>Vorgehensweise</u>:

1. Spezifiziere den Wiederanlagezinssatz r_0
2. Bestimme den zugehörigen Endwert der Rückflüsse
3. Bestimme den Zinssatz r_R, unter dem der Investitionsbetrag auf diesen Endwert wächst.

Formale Definition:

$$A_0 \cdot (1+r_R)^T = \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r_0)^{T-t} = (1+r_0)^T \sum_{t=1}^{T} Z_t (1+r_0)^{-t}$$

- Es existiert stets eine eindeutige, mathematisch einfach ermittelbare Lösung.
- Aufgrund der ausdrücklichen Angabe der Opportunitätsrendite werden zusätzliche, nicht nur von der Zahlungsreihe selbst abhängige, Informationen benötigt (daher **als komplette Alternative zur internen Rendite kaum geeignet**).

Inhaltsübersicht

- Was ist überhaupt Zins ?
- Lineare und exponentielle Verzinsung / Diskontierung
- Diskontierung: Barwert / Kapitalwert von Zahlungsreihen
- Was ist Rendite ?
- Vergleich: geometrische vs. arithmetische Durchschnittsrendite
- Interne Rendite (= Effektivverzinsung): Definition und Interpretation
- Vergleich: Interne Rendite vs. geometrische Durchschnittsrendite
- Vergleich: Interne Rendite vs. Kapitalwerte / Coupon-Effekt
- Beispiel: Effektivverzinsung bei Kombikrediten
- Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt
- Interpretation von Renditeverteilungen (Beispiel)

Beispiel: Effektivverzinsung bei Kombikrediten

Auch bei üblichen Kreditformen ist die Angabe eines "Effektivzinses" oft weniger informativ als der Begriff suggeriert.

Beispiel: Bausparvertrag mit Vorausdarlehen (vgl. *Excel-Beispiele*)

(s. auch http://www.fbmn.h-da.de/~pfeifer/konstantdarlehen.xls)

Man erkennt an den konkreten Beispielen u.a.:

- In vielen Situationen ist der Effektivzins des Kombinationsprodukts höher als das Maximum aus Zins des Vorausdarlehens und Zins des Bauspardarlehens (erklärbar durch den üblicherweise niedrigen Guthabenzins auf das Bausparguthaben)
- Sondertilgungen während der Bauspardarlehensphase erhöhen den gesamten Effektivzins oft noch! (Erklärbar gemäß Def. der internen Rendite als Durchschnittszins; aber kein Argument gegen Sondertilgungen)

Inhaltsübersicht

Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt

Kauft man (z.B.) monatlich jeweils für einen festen Betrag Fondsanteile zum Kurs p_k, ist der **durchschnittliche Einstiegskurs** das **harmonische Mittel**:

$$M_{harm} = \frac{n}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}}$$

Kauft man demgegenüber jeweils die gleiche Anzahl Fondsanteile, ist der **durchschnittliche Einstiegskurs** das **arithmetische Mittel**:

$$M_{arith} = \frac{1}{n}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$$

Wegen $\mathbf{M_{harm} \leq M_{arith}}$ liefert die erste Strategie immer die höhere Rendite auf den eingesetzten Gesamtbetrag (unter Vernachlässigung von Zinseffekten). Dieses auch als **Cost-Average-Effekt** bezeichnete Phänomen wird in der Werbung oft als Argument für die erste Strategie benutzt.

Zahlenbeispiele.

Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt (II)

Der **absolute Erfolg** kann aber bei der arithmetischen Strategie durchaus höher sein als bei der harmonischen Strategie; deshalb ist eine pauschale Bevorzugung der harmonischen Strategie zu hinterfragen.

Beispiel: Erster Kauf eines Fondsanteils zum aktuellen Kurs p_1 = 100; weiterer Kauf in t = 2; Verkauf des gesamten Investments in t = 3.

Tatsächliche Kursentwicklung sei (100, 200, 500) (im Vorhinein nicht bekannt!).

Harmonische Strategie: Kaufe jeweils für 1000 GE.

Investitionsbetrag: 2*1000 = 2000; Verkaufserlös: (10+5)*500 = 7500;

Rendite: 7500/2000 -1 ≈ 275 %; Gewinn: 5.500 GE.

Arithmetische Strategie: Kaufe jeweils 10 Anteile.

Investitionsbetrag: 10*100 + 10*200 = 3000; Verkaufserlös: 20*500 = 10000;

Rendite: 10000/3000 -1 ≈ 233 %; Gewinn: 7.000 GE.

Systematischere Rendite-Risiko-Analysen können etwa auf Basis bestimmter Annahmen über den stochastischen Wertentwicklungsprozess erfolgen.

Inhaltsübersicht

- Was ist überhaupt Zins ?
- Lineare und exponentielle Verzinsung / Diskontierung
- Diskontierung: Barwert / Kapitalwert von Zahlungsreihen
- Was ist Rendite ?
- Vergleich: geometrische vs. arithmetische Durchschnittsrendite
- Interne Rendite (= Effektivverzinsung): Definition und Interpretation
- Beispiel: Effektivverzinsung bei Kombikrediten
- Vergleich: Interne Rendite vs. geometrische Durchschnittsrendite
- Vergleich: Interne Rendite vs. Kapitalwerte / Coupon-Effekt
- Renditemaximierung und Cost-Average-Effekt
- **Interpretation von Renditeverteilungen (Beispiel)**

Unsichere Renditen (Beispiel)

Ein **Standard-Verteilungsmodell bei Wertentwicklungsprozessen unter Unsicherheit** ist die **Log-Normalverteilung**.

Z.B. **Modellierung der Kurszuwächse 1 + X** am Aktienmarkt innerhalb eines Jahres:

$$1+X = e^R \quad \Leftrightarrow \quad R = \log(1+X) \quad \text{mit} \;\; R \sim N(r,\sigma)$$

X ist also die ***Periodenrendite bzw. (Kurs-)Wertzuwachs in %*** *bei Anfangskurs 1 = 100 %*;
R ist die ***log-Rendite*** (***stetige Rendite***).

Anm.: Annahme einer Normalverteilung unmittelbar für die Rendite X ist u.a. wegen der Symmetrie der NV problematisch; tatsächlich können Kursverluste von höchstens -100% auftreten, aber Kursgewinne von mehr als 100%.

Welche "mittlere" Rendite ist unter solch einer Verteilungsannahme zu erwarten?

Beispiel: DAX-Performance

Aus den DAX30-Daten der Jahre 1987-2006 schätzt man z.B. (ohne bes. Zusatzüberlegungen) folgende Werte für die **log-Rendite $R \sim N(r;\sigma)$**:

Erwartungswert $r = 7{,}64\%$, Standardabweichung $\sigma = 26{,}68\%$ p.a.

Damit berechnet sich für die **Periodenrendite $X = e^R - 1$**:

Erwartungswert $E(X) = e^{r+½\sigma^2} - 1 = 11{,}85\%$; Stabw(X) = 30,38% .

Ferner gilt für den Median M (d.h. $P(X \geq M) = P(X \leq M) = 50\%$) und das Maximum der Dichtefunktion D_{max}:

$M(X) = e^r - 1 = 7{,}94\%$; $D_{max} = e^{r-\sigma^2} - 1 = 0{,}52\%$.

Man beachte u.a:

Die Erwartungswertbildung lässt sich bei der Umrechnung von Log-Renditen in Periodenrenditen nicht mit der Exponentialfunktion vertauschen.

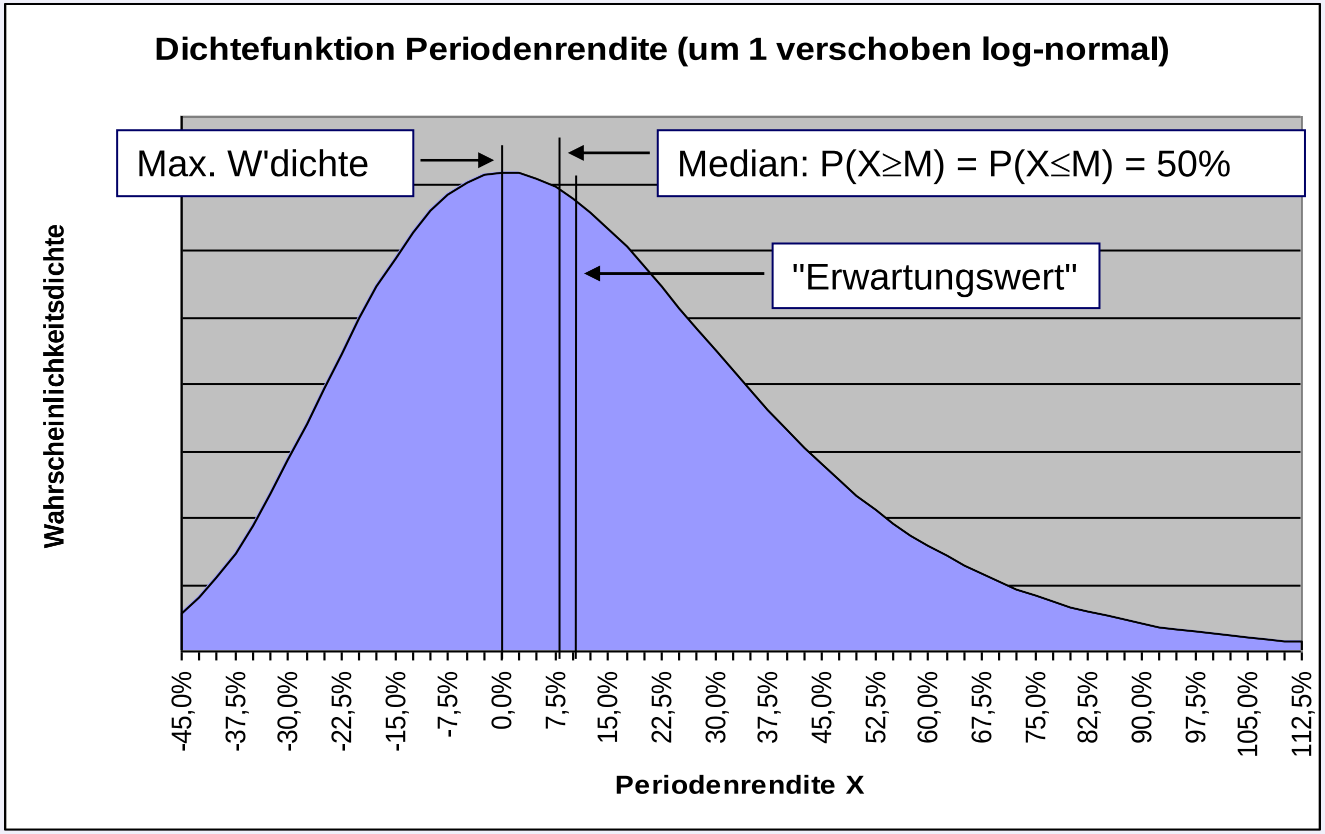
Wahrscheinlichkeitsverteilung DAX-Performance

Visualisierung der Periodenrendite X im geg. Beispiel (s. *Excel-Tabelle*):

$R = \log(1+X) \sim N(r;\sigma)$ mit $r = 7{,}64\%$ und $\sigma = 26{,}68\%$.

$E(X) = e^{r-½\sigma^2} - 1 = 11{,}85\%$; $Stabw(X) = 30{,}38\%$.

$Median(X) = e^r - 1 = 7{,}94\%$; $Dichte_{max} = e^{r-\sigma^2} - 1 = 0{,}52\%$.



Renditeerwartungen unter Lognormalverteilung

Für den Erwartungswert der Periodenrendite X gilt:

$$E(X) = e^{r+\frac{\sigma^2}{2}} - 1 > e^r - 1 = \exp(E(R)) - 1 = \text{Median}(X).$$

Für das eingegangene Risiko gibt es **"erwartungsgemäß" eine vom Risikoparameter σ abhängige Risikoprämie**.

Aber:

- **Je höher das Risiko, desto unwahrscheinlicher ist es, dass der Erwartungswert erreicht oder übertroffen wird.** Jedenfalls ist die Wahrscheinlichkeit immer < 50%!
  Der "Erwartungswert" ist etwas ähnliches wie das wahrscheinlichkeitsgewichtete arithm. Mittel aller möglichen (hier unendliche vielen) Werte.
- **Mit Wahrscheinlichkeit von 50% wird nicht mehr als die „risikolose" Verzinsung erzielt** ($\sigma = 0$; Median $M(X) = e^r - 1$).
- Für das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte gilt

  $$\text{Dichte}_{max}(X) < M(X);$$

  d.h. **bei vorgegebenen Bandbreiten (Intervalllängen) sind sogar Renditen unterhalb vom Median „am wahrscheinlichsten"**.

Simulationen hierzu vgl. Excel-Tabelle.

Benutzte Literatur

- P. Albrecht, R. Mauer: Investment- und Risikomanagement (3. Auflage, 2008), Schäffer Poeschel.
- C. Cottin: Über die Aussagekraft der internen Rendite. Der Aktuar 4/2010, 150-157.
- C. Cottin, S. Döhler: Risikoanalyse, Vieweg+Teubner, 2009.
- H. Laux: Vom Sinn und Unsinn der Wiederanlageprämisse. Der Aktuar 2/2010, 66-70.
- A. Pfeifer: Effektiver Zinssatz bei Kombinationsprodukten mit Bausparvertrag und Vorausdarlehen. In: Die Kunst des Modellierens, Vieweg+Teubner, 2008.
- Preisangabenverordnung in der Fassung der Bekanntmachung vom 18. Oktober 2002 (BGBl. I S. 4197), die zuletzt durch Artikel 4 des Gesetzes vom 24. Juli 2010 (BGBl. I S. 977) geändert worden ist; vgl. etwa http://www.gesetze-im-internet.de/pangv/.
- H. Schierenbeck: Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre (16. Auflage, 2003), Oldenbourg.
- P. Steiner, H. Uhlir: Wertpapieranalyse (4. Auflage, 2001), Physica.
- J. Tietze: Einführung in die Finanzmathematik (8. Auflage, 2006), Vieweg.