Klausur Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik 16. Oktober 1999 und 14. Oktober 2000, Bad Neuenahr

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

In den Jahren 1999 und 2000 waren für die Klausur im Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik, die in beiden Jahren im Oktober in Bad Neuenahr geschrieben wurde, jeweils zu jedem der Gebiete Stochastische Grundlagen, Prämienkalkulation, Risikoteilung, Reservierung und Solvabilität Aufgaben gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn in 1999 eine der Aufgaben 1–6 und in 2000 eine der Aufgaben 1–7 nicht bearbeitet wurde. Als Hilfsmittel zugelassen waren die klassische Formelsammlung sowie ein Taschenrechner. Für die Klausur 1999 war folgender Hinweis gegeben worden: „Diese Klausur ist auf eine Gesamtdauer von 3 Stunden ausgelegt. Die angegebenen Punktzahlen pro Teilaufgabe geben einen Hinweis auf die Schwierigkeit und die voraussichtliche Lösungsdauer. Also sollten Sie bei Teil 1 der Aufgabe zur Solvabilität nur kurz nachdenken (Ist das überhaupt eine Dichte?)." Die Klausuren wurden beide als bestanden gewertet, wenn 72 der 180 möglichen Punkte erreicht wurden.

1. Klausur des Jahres 1999

1.1 Aufgabe 1. (Grundlagen)

1. Sei $0 < p < 1$ und Q eine Schadenhöhenverteilung mit $Q\{1, 2, 3, ...\} = 1$. Die Summenverteilung
$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} Q^{*k}$$
ist dann dasselbe wie $((1-p)\delta_0 + pQ)^{*n}$. (8 Punkte)
2. Wie kann man mit dem Panjer-Algorithmus für obiges Q mit $Q\{1\} < 1$ die Faltung Q^{*n} berechnen? (14 Punkte)
3. Welche Approximationen erlauben die Berechnung der Gesamtschadenverteilung im individuellen Modell auf beliebige Genauigkeit? Warum wird das individuelle Modell dennoch in der Praxis kaum benutzt? (8 Punkte)

Lösung:

1. Dies kann man mit erzeugenden Funktionen nachrechnen. Ist $m_Q(z)$ die erzeugende Funktion von Q, dann gilt für die erzeugende Funktion $m_P(z)$ von P gemäß der Fundamentalformel
$$m_P(z) = (1 - p + p m_Q(z))^n,$$
weil $(1 - p + pz)^n$ die erzeugende Funktion der Binomialverteilung mit Parametern n und p ist. Somit ist $m_P(z)$ die erzeugende Funktion der n–fachen Faltung von $(1-p)\delta_0 + pQ$.
2. Die Verteilung Q_1 sei definiert durch
$$Q_1\{k\} = Q\{k+1\}/(1 - Q\{1\}), k = 1, 2, \dots .$$

Wenn Q die Verteilung von X war, dann ist die Verteilung $(1-p)\delta_0 + pQ_1$ mit $p = 1 - Q\{1\} > 0$ die Verteilung von $X - 1$. Wegen

$$Q^{*n}\{k\} = P\{k-n\}$$

lässt sich Q^{*n} daher mit der aus Teil 1 bekannten Verteilung

$$P = ((1-p)\delta_0 + pQ_1)^{*n}$$

berechnen. Hierbei ist die Panjer-Rekursion einsetzbar, weil die Binomialverteilung zur Panjer-Klasse gehört.

3. Die Kornya-Approximation beliebiger Ordnung. Das individuelle Modell wird in der Praxis wenig benutzt, weil zur Modifizierung der vertragsspezifischen Schadenverteilungen oft zu wenig Daten vorhanden sind und somit unlösbare statistische Probleme vorliegen.

1.2 Aufgabe 2. (Prämienkalkulation 1)

1. In einem verallgemeinerten linearen Modell mit Haupteffekten (ohne gemischte Effekte) mit der Linkfunktion $g(\mu) = 1/\mu$ wird der Schadenbedarf μ mit – u.a. – dem Alter des Versicherungsnehmers als erklärender Variable modelliert. Für die beiden Altersklassen A "20-22 Jahre" und B "24-30 Jahre" sind die beiden Komponenten des geschätzten Regressionsvektors $\beta_A = 0,003$ und $\beta_B = 0,005$. In einer Zelle mit Versicherungsnehmern der Altersklasse A ist der Schadenbedarf $\mu = 100$. Wie groß ist er in der entsprechenden Zelle der Altersklasse B? Entsprechend heißt hier: alle Merkmale stimmen überein bis auf das Merkmal Alter. (12 Punkte)
2. In einem verallgemeinerten linearen Modell mit der Linkfunktion $g(\mu) = \mu$ werden die Merkmale Geschlecht (M/F) und Kilometerleistung (v(iel) bzw. w(enig)) für die Modellierung in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung benutzt. Die Parameter für die Haupteffekte β_F und β_w sind beide negativ. Welches Vorzeichen hat der Parameter β_{Fw} des gemischten Effektes? Begründen Sie Ihre Antwort. (18 Punkte)

Lösung:

1. Ist c die Summe der linearen Prädiktoren ohne Berücksichtigung der Altersklassen, so gilt für den Schadenbedarf μ
$$\mu = \frac{1}{c + \beta_A} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \frac{1}{c + \beta_B}.$$
Aus $\mu = 100$ für $\beta_A = 0,003$ ergibt sich $c = 0,007$. Also ist der Schadenbedarf für Altersklasse B
$$\mu = \frac{1}{0,007 + 0,005} = 83,33.$$

2. Das negative Vorzeichen bei β_F und β_w bedeutet bei der Linkfunktion $g(\mu) = \mu$, dass die Ausprägungen zu Tarifgruppen mit einem niedrigen Schadenbedarf gehören, also für F ein niedrigerer Schadenbedarf als für M und für w ein niedrigerer Schadenbedarf als für v besteht. Der Parameter β_{Fw} kann – je nach Begründung – beide Vorzeichen haben. Besteht eine positive Korrelation zwischen F und w, d.h.: sind mehr Frauen Wenigfahrer und mehr Wenigfahrer Frauen, dann wird β_{Fw} positiv sein, um den sonst vorhandenen

Doppelrabattierungsfehler aufzuheben. Besteht keine positive Korrelation, so wird β_{Fw} möglicherweise negativ sein: wenig fahrende Frauen verursachen ja vielleicht noch weniger Schäden als viel fahrende Frauen.

1.3 Aufgabe 3. (Solvabilität)

1. Ist die Funktion $2e^{-x} - 3e^{-3x}, x > 0$, die Dichte einer Phasentypverteilung? (5 Punkte)
2. Welche Verteilung hat als Phasentypverteilung die Darstellung mit $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

   (10 Punkte)
3. Welche Summenverteilung

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p)Q^{*n}$$

   wird als Phasentypverteilung mit den Parametern $\pi = (1, 0)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

   dargestellt? Berechnen Sie p und Q! (10 Punkte)
4. Wie kann man die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell berechnen für Schadenhöhenverteilungen, die phasentyp sind? (5 Punkte)

Lösung:

1. Die angegebene Funktion ist keine Dichte: sie ist stetig und negativ im Punkte $x = 0$.
2. Beim Start im Zustand 1 hat die Wartezeit eine Gamma(3,1)-Verteilung – als Faltung dreier Exponentialverteilungen mit Parameter 1; beim Start im Zustand 2 ist es eine Gamma(2,1)-Verteilung, und beim Start ist die Wartezeit Exp(1)-verteilt. Die dargestellte Verteilung ist also

$$\frac{1}{3}\Gamma(3,1) + \frac{1}{3}\Gamma(2,1) + \frac{1}{3}\mathrm{Exp}(1).$$

3. Die Darstellung π, B einer Summenverteilung mit einer um 1 verschobenen geometrischen Schadenzahlverteilung mit Parameter p und einer Phasentypverteilung mit Parametern π_0, B_0 als Schadenhöhenverteilung ergibt sich mit den Formeln

$$\pi = \pi_0,$$
$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + p b_{i0}^{(0)} \pi_j^{(0)}.$$

   Somit ist $\pi_0 = \pi = (0, 1)$, und wegen $b_{10}^{(0)} = -1 + 1 = 0$ ist

$$b_{1j}^{(0)} = b_{1j}, j = 1, 2.$$

   Ferner muss wegen $\pi_2^{(0)} = 0$ gelten

$$b_{22}^{(0)} = b_{22} = -1.$$

Schließlich erhält man als Bestimmungsgleichung für p und $b_{21}^{(0)}$

$$b_{21} = b_{21}^{(0)} + p.$$

Dies ist nicht eindeutig lösbar. Die naheliegende Lösung, die zu einer einfachen Verteilung Q führt, ist $p = 1/2$ und $b_{21}^{(0)} = 0$. In diesem Fall hat Q die Darstellung $\pi = (1, 0)$ und

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Q ist also eine Gamma(2,1)-Verteilung.

4. Ist die Schadenhöhenverteilung eine Phasentyp-Verteilung, so kann man die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell explizit berechnen: Ist

$$p = \lambda\mu/c = \psi(0)$$

und π, B die Darstellung der Phasentypverteilung, so gilt für $s \geq 0$

$$\psi(s) = p(\pi^*)^T \exp(B^* s)e.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen:

λ	Schadenintensität
c	Prämie
μ	mittlere Schadenhöhe
e	Vektor aus Einsen
s	Startkapital
$\psi(s)$	Ruinwahrscheinlichkeit
π^*	$= \frac{1}{\mu}(-B^T)^{-1}\pi$
B^*_{ij}	$= B_{ij} + \pi^*_j p B_{i0}$.

1.4 Aufgabe zur Tarifkalkulation II

a) Beim Clusterverfahren von Ward wird das Distanzmaß

$$d_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2 v_i v_k/(v_i + v_k)$$

verwendet. Erklären Sie, wozu man Clusterverfahren einsetzt, was i, k, v_i, v_k, $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_k$ bedeuten, und wie das Verfahren von Ward abläuft. (10)

b) Welchen Sinn hat die zusätzliche Berücksichtigung von v_i, v_k gegenüber der Euklidischen Distanz $e_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2$? (8)

c) Unter einer anderen Modellannahme erhält man das Distanzmaß

$$c_{ik} = d_{ik}/(\hat{\sigma}_i{}^2 + \hat{\sigma}_k{}^2),$$

wobei $\hat{\sigma}_i^2$ bzw. $\hat{\sigma}_k{}^2$ ein Maß für den Schätzfehler von $\hat{\mu}_i$ bzw. $\hat{\mu}_k$ ist. Erläutern Sie kurz, wann und wieso c_{ik} zu einer besseren Clusterung als d_{ik} führt. (4)

d) Wie könnte man mit Hilfe eines dieser Distanzmaße zu einer statistisch begründeten Stopp-Regel für das Ward-Verfahren kommen? (8)

Lösung:

a) Clusterverfahren werden bei nominal skalierten Risikomerkmalen mit einer großen Zahl von Ausprägungen (z.B. Autotypen, Betriebsarten, PLZ-Gebiete, Zulassungsbezirke) zur

Reduktion der Anzahl der Ausprägungen eingesetzt, um durch Zusammenfassen ähnlicher Ausprägungen zu stärker besetzten Ausprägungsgruppen zu kommen. i, k bezeichnen zwei beliebige Ausprägungen bzw. Ausprägungsgruppen, v_i, v_k deren Volumen (Anzahl Jahreseinheiten oder Gesamtversicherungssumme), $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_k$ Schätzer für den Erwartungswert von Schadenbedarf bzw. Schadensatz.
Beim Verfahren von Ward berechnet man zunächst die Distanzen d_{ik} zwischen allen Ausprägungen. Dann fusioniert man die beiden Ausprägungen mit der kleinsten Distanz d_{ik} und berechnet alle Distanzen zur neu entstandenen Ausprägungsgruppe. Dann werden wieder die beiden Ausprägung(sgrupp)en mit dem kleinsten d_{ik} fusioniert usw., bis man bei der gewünschten Anzahl Ausprägungsgruppen angelangt ist (agglomerative Vorgehensweise).

b) Wenn man d_{ik} in der Form $d_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2/(v_i^{-1} + v_k^{-1})$ schreibt, erkennt man, daß bei großen Volumina die Schätzer $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_k$ näher beieinander liegen müssen, um dieselbe Distanz zu liefern wie bei kleinen Volumina. Dies ist sinnvoll, da bei kleinem Volumen die Schätzer $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_k$ ungenauer sind und daher zufallsbedingt weiter als bei großem Volumen auseinander liegen können, auch wenn die wahren Erwartungswerte μ_i, μ_k gleich weit entfernt sind. Auf diese Weise werden Ausreißer in kleinen Gruppen gedämpft. Unterstellt man für den Schadenbedarf/-satz Z_i eine Varianzannahme der Art $\mathrm{Var}(Z_i) = \sigma^2/v_i$ mit einem in allen Ausprägungsgruppen gleichen σ^2, so ist der Nenner $v_i^{-1} + v_k^{-1}$ bis auf den Faktor σ^2 gerade gleich $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)$, d.h. alle d_{ik} haben unter der Nullhypothese $\mu_i = \mu_k$ approximativ dieselbe Verteilung.

c) Wenn die Streuungen der Schadenbedarfe/sätze (und damit auch von $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_k$) um mehr als nur die Volumenunterschiede differieren – d.h. also wenn $\mathrm{Var}(Z_i) = \sigma_i^2/v_i$ mit einem von Ausprägungsgruppe zu Ausprägungsgruppe anderen σ_i^2 –, so ist die Distanz c_{ik} aus denselben Gründen besser als d_{ik}, aus denen auch d_{ik} besser als e_{ik} ist, da die c_{ik} dann approximativ stets dieselbe Verteilung haben, während dies bei d_{ik} dann nicht mehr der Fall ist. Dies verhindert die Fusion verschiedener Schadenbedarfe bei kleiner Streuung und kleiner Distanz bzw. fusioniert auch sehr verschiedene $\hat{\mu}_i$ bei großer Streuung.

d) Man berechnet unter einer geeigneten Verteilungsannahme (z.B. $Z_i \sim \mathrm{Normal}(\mu_i, \sigma^2/v_i$ mit bekanntem σ^2) die Verteilung von d_{ik} unter der Nullhypothese $\mu_i = \mu_k$. Dann ist d_{ik} eine Teststatistik für die Hypothese gleicher Erwartungswerte. Dann gibt man sich eine Signifikanzschranke (z.B. 95%) vor und stoppt das Fusionieren, sobald die Teststatistik d_{ik} die Nullhypothese bei allen noch möglichen Fusionen ablehnt.

I.5 Aufgabe zur Schadenreservierung

a) Geben Sie an, wie beim Chain-Ladder-Verfahren die unbekannten kumulierten Schadenstände C_{ik}, $k > n + 1 - i$, geschätzt werden (i = Anfalljahr, k = Abwicklungsjahr, $n + 1$ = letztes Kalenderjahr). (4)

b) Welches stochastische Modell liegt dem Chain-Ladder-Verfahren zugrunde? (4)

c) Wie lautet die Formel für die standardisierten Residuen r_{ik}, $i + k \leq n + 1$, gemäß dem Modell b)? (7)

d) Wie kann man mit Hilfe der standardisierten Residuen prüfen, ob das Dreieck der Schadenstände einen Kalenderjahreffekt enthält? (5)

e) Welche der Modellannahmen aus b) sind bei Vorliegen eines Kalenderjahreffekts verletzt und warum? (5)

f) Wieso kann man bei d) nicht die gewöhnlichen, nicht-standardisierten Residuen verwenden? (5)

Lösung:

a) Rekursiv durch $\hat{C}_{i,k} = \hat{C}_{i,k-1}\hat{f}_{k-1}$ mit Startwert $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$ und $\hat{f}_{k-1} = \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}$ für $1 \le i \le n$, $2 \le k \le n$.

b) (CL1) $E(C_{i,k} \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1}f_{k-1}$
(CL2) $\mathrm{Var}(C_{ik} \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\sigma_{k-1}^2$
(CL3) $(C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{in})$, $1 \le i \le n$, sind unabhängig.

c) $$r_{ik} = \frac{C_{ik} - \hat{E}(C_{ik}|C_{i,k-1})}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(C_{ik}|C_{i,k-1})}} = \frac{C_{ik} - C_{i,k-1}\hat{f}_{k-1}}{\sqrt{C_{i,k-1}\hat{\sigma}_{k-1}^2}} = \frac{\dfrac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} - \hat{f}_{k-1}}{\hat{\sigma}_{k-1}/\sqrt{C_{i,k-1}}}$$

für $1 \le i \le n-1$, $2 \le k \le n-1$, $3 \le i+k \le n+1$ sowie $r_{1n} = 0$,

wobei $\hat{\sigma}_k^2 = \dfrac{1}{n-k-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-i} C_{ik}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k\right)^2$.

d) Durch Inspektion des Plots der r_{ik} gegen die Kalenderjahre $j = i+k$, $3 \le j \le n+1$. Wenn die Residuen nicht nach weißem Rauschen aussehen, sondern einen klaren Trend oder eine sprunghafte Veränderung ihres mittleren Niveaus aufweisen, so spricht man von einem Kalenderjahreffekt.

e) Bei einem Kalenderjahreffekt haben gemäß d) die Residuen eines oder mehrerer Kalenderjahre einen gemeinsamen Effekt, der eine Korreliertheit der betreffenden Zuwächse $C_{ik} - C_{i,k-1}\hat{f}_{k-1}$ beinhaltet. Daher ist die Unabhängigkeitsannahme CL3 verletzt, aber auch Annahme CL1, aus der die Unkorreliertheit der Einzelabwicklungsverfaktoren jedes Anfalljahres folgt.

f) Um vergleichbar zu sein und weißes Rauschen zu produzieren, müssen alle Residuen annähernd dieselbe Verteilung haben. Dies wäre bei nichtstandardisierten Residuen $C_{ik} - C_{i,k-1}\hat{f}_{k-1}$ nicht der Fall, da schon die Varianzen $\mathrm{Var}(C_{ik} \mid C_{i,k-1})$ von Zelle zu Zelle gemäß (CL2) verschieden sind.

1.6 Aufgabe zur Risikoteilung

Im Kollektiven Modell seien N die Schadenzahl und $X_1, X_2, \ldots$ die Schadenhöhen mit Verteilungsfunktion F.

a) Wie lautet die Formel für den Gesamtschaden S_a des Erstversicherers, wenn bei allen Policen eine Abzugsfranchise der Höhe $a > 0$ vereinbart wird? (3)

b) Wie groß ist der Erwartungswert $E(N_a)$ der Anzahl N_a der (echten) Entschädigungsfälle (als Funktion von N, F und a)? (3)

c) Wie groß ist die mittlere Entschädigungshöhe $E(X(a))$ pro echtem Entschädigungsfall $X(a)$ (als Funktion von F und a)? (4)

d) Wie groß ist der Erwartungswert $E(S_a)$ der Gesamtentschädigung sowohl allgemein (als Funktion von a, N und F) als auch speziell für $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$ für $x > b > 0$ (und $F(x) = 0$ sonst). (7)

e) Sei wiederum speziell $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$ für $x > b > 0$ und $b < a/2$. Um welchen Faktor ändert sich $E(S_a)$, wenn die Abzugsfranchise um 10% reduziert wird? (3)

f) Zurück zur ursprünglichen Situation mit Franchise a. Sei wiederum speziell $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$ für $x > b > 0$ mit $b < a/2$ (und $F = 0$ sonst). Um welchen Faktor ändert sich $E(S_a)$, wenn alle Schadenhöhen X_n um 10% teuerer werden? (10)

Lösung:

a) $S_a = \sum_{n=1}^{N} \max(X_n - a, 0)$

b) $N_a = \sum_{n=1}^{N} 1_{\{X_n > a\}} \Rightarrow E(N_a) = E(N)E(1_{\{X_n > a\}})$
$$= E(N)\big(1 - F(a)\big)$$

c) $E\big(X(a)\big) = E(X - a | X > a) = \int_a^\infty (x-a)dF(x)/\big(1 - F(a)\big)$
$$= \int_a^\infty \big(1 - F(x)\big)dx/\big(1 - F(a)\big)$$

d) $E(S_a) = E(N_a)E\big(X(a)\big) = E(N)\int_a^\infty \big(1 - F(x)\big)dx$

Speziell für $1 - F(x) = \begin{cases} (x/b)^{-2} & \text{für} \quad x > b \\ 1 & \text{für} \quad x \leq b \end{cases}$

wird im Fall $a \geq b$
$$\int_a^\infty \big(1 - F(x)\big)dx = \int_a^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^{-2} dx = \left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} b\right]_a^\infty = \frac{b^2}{a}$$
bzw. im Fall $a < b$
$$\int_a^\infty \big(1 - F(x)\big)dx = \int_a^b dx + \int_b^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^{-2} dx = b - a + \left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} b\right]_b^\infty = 2b - a$$
d.h. wir erhalten
$$E(S_a) = \begin{cases} E(N)b^2/a & \text{für} \quad a \geq b \\ E(N)(2b - a) & \text{für} \quad x < b \end{cases}.$$

e) $\tilde{a} = 0{,}9a \Rightarrow E(S_{\tilde{a}}) = E(N) \cdot b^2/(0{,}9a) = E(S_a)/0{,}9$

$\Rightarrow$ E(Sa) erhöht sich um $\frac{1}{0{,}9} = 1{,}\overline{11}$.

f) $\tilde{X}_n = cX_n \Rightarrow \tilde{F}(x) = P(\tilde{X}_n < x) = P\left(X_n < \frac{x}{c}\right) = F\left(\frac{x}{c}\right) = 1 - \left(\frac{x}{bc}\right)^{-2}$ für $x > bc$

$\Rightarrow E(\tilde{S}_a) \stackrel{(d)}{=} E(N)\int_a^\infty \big(1 - \tilde{F}(x)\big)dx \stackrel{(d)}{=} E(N)\tilde{b}^2/a$ mit $\tilde{b} = bc$,

d.h. $E(\tilde{S}_a) = E(S_a) \cdot c^2$

$\Rightarrow E(S_a)$ erhöht sich um $c^2 = 1{,}10^2 = 1{,}21$.

Falsch ist $E(\tilde{S}_a) = E(N)\int_a^\infty (1{,}1x - a)\frac{dF(x)}{1 - F(a)}$,

da auch Schäden $x < a$ inflationsbedingt zu $E(\tilde{S}_a)$ beitragen.

1. Wann kann man die Tailwahrscheinlichkeit $P(t,\infty)$ für $P = \sum_{n=0}^{\infty} R\{n\}Q^{*n}$ durch
$$\sum_{n=1}^{\infty} nR\{n\}Q(t,\infty)$$
approximieren? Geben Sie ein Beispiel für R und Q an! (10 Punkte)
2. Sei $\psi(s)$ die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell mit Schadenhöhenverteilung Pareto(2), und sei $\psi(0) = 1/2$. Geben Sie eine Approximation für $\psi(s)$ an, die für großes s gilt. (10 Punkte)
3. Erläutern Sie die Formel
$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n(1-p)H^{*n}(s,\infty),$$
und leiten Sie daraus ab:
$$\psi(s) \geq pH(s,\infty),\ s \geq 0.$$
(10 Punkte)

Lösung:

1. Dies gilt, wenn die Schadenhöhenverteilung Q subexponentiell ist und die Schadenzahlverteilung R folgende Bedingung erfüllt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} R\{n\}(1+\varepsilon)^n < \infty \text{ für ein } \varepsilon > 0.$$
Beispiel: Q ist eine Lognormalverteilung, und R ist eine Poissonverteilung.
2. Da Pareto(2) eine Leiterhöhenverteilung H besitzt, die – wegen ihrer Pareto-Tails – subexponentiell ist, gilt
$$\psi(s) \sim \frac{p}{1-p} H(s,\infty).$$
Hierbei ist $p = \psi(0) = 1/2$, und für $s > 1$
$$H(s,\infty) = \frac{1}{2}\int_s^{\infty} t^{-2}dt = \frac{1}{2s}.$$
Demnach gilt hier
$$\psi(s) \sim \frac{1}{2s}.$$
3. In der Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell ist
$$p = \psi(0) = \lambda\mu/c$$
und H die Leiterhöhenverteilung mit Dichte
$$\frac{1}{\mu}Q(x,\infty), x > 0,$$
wobei Q die Schadenhöhenverteilung mit Mittelwert μ ist. Wegen
$$H^{*n}(s,\infty) \geq H(s,\infty), n \geq 1,$$
gilt
$$\psi(s) \geq \sum_{n=1}^{\infty} p^n(1-p)H(s,\infty) = pH(s,\infty).$$

2. Klausur des Jahres 2000

2.1 Aufgabe zum Grundwissen 1

Im kollektiven Modell sei die Schadenhöhenverteilung phasentyp mit den Parametern $\pi = (0, 1)$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Für eine Schadenzahl N, deren Verteilung die Faltung zweier geometrischer Verteilungen mit Parametern p und q ist, wird die Verteilung von $S = X_1 + ... + X_N$ wieder phasentyp. Geben Sie die Parameter dieser Phasentypverteilung an.

Hinweis: Benutzen Sie eine Darstellung mit Zustandsraum $\{0,1,2,3,4\}$.
(30 Punkte)

Lösung:

Die gesuchte Verteilung ist die Faltung zweier Summenverteilungen, jeweils mit der vorliegenden Schadenhöhenverteilung und mit einer geometrischen Schadenzahlverteilung, deren Parameter p bzw. q sind. Dies gilt nach der bekannten Formel

$$SV(R_1, Q) * SV(R_2, Q) = SV(R_1 * R_2, Q).$$

Der schematische Lösungsweg ist der folgende: Ist die Schadenhöhe phasentyp mit Parametern π und B und ist die Schadenzahlverteilung eine um 1 verschobene geometrische Verteilung mit Punktwahrscheinlichkeiten

$$R\{n\} = a^{n-1}(1-a), n = 1, 2, \ldots, 0 < a < 1,$$

dann ist auch die Gesamtschadenverteilung P(a) phasentyp mit Parametern π und der Matrix B′ mit Einträgen

$$b'_{ij} = b_{ij} + ab_{i0}\pi_j, i, j = 1, \ldots, l.$$

Für die angegebenen Parameter π und B ergibt sich dabei jeweils

$$\pi = (0, 1), B = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 + p/2 \\ 0 & -1 + p/2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\pi = (0, 1), B = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 + q/2 \\ 0 & -1 + q/2 \end{pmatrix}.$$

Die Faltung dieser beiden Phasentypverteilungen P(p) und P(q) hat auf dem Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Darstellung

$$\pi_0 = (0, 1, 0, 0), B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 + p/2 & 0 & 1/2 - p/2 \\ 0 & -1 + p/2 & 0 & 1 - p/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 + q/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + q/2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist jedoch nicht die Lösung der Aufgabe, weil die Schadenanzahl jeweils die verschobene geometrische Verteilung war. Die Gesamtschadenverteilung $\overline{P}(a)$ mit einer Phasentyp-Verteilung mit Parametern π, B und einer (nicht verschobenen) geometrischen Verteilung mit Parameter a ist eine verallgemeinerte Phasentyp-Verteilung mit positiver Masse in Null, die Matrix B bleibt unverändert, und der Startvektor hat die Form $\pi_2 = (1 - a, 0, a)$, nun mit drei Einträgen, für den Start in 0, 1 und 2. Man kann $\overline{P}(a)$ auch folgendermaßen darstellen:

$$\overline{P}(a) = (1 - a)\delta_0 + aP(a).$$

weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(1-a)Q^{*n} = (1-a)\delta_0 + a\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}(1-a)Q^{*n} = (1-a)\delta_0 + aP(a).$$

Wir müssen demnach zwei solche verallgemeinerte Phasentypverteilungen

$$(1-p)\delta_0 + pP(p)\text{und}$$
$$(1-q)\delta_0 + qP(q)$$

falten. Dies ergibt

$$\begin{aligned}&((1-p)\delta_0 + pP(p)) * ((1-q)\delta_0 + qP(q))\\ &= (1-p)(1-q)\delta_0 + p(1-q)P(p) + q(1-p)P(q) + pqP(p) * P(q).\end{aligned}$$

Die gesuchte Gesamtschadenverteilung ist demnach eine Konvexkombination von drei echten Phasentypverteilungen, sie hat also eine Darstellung auf dem Zustandsraum $\{0, 1, ..., 9\}$ mit dem 9-dimensionalen Startvektor

$$((1-p)(1-q), 0, p(1-q), 0, q(1-p), 0, pq, 0, 0)$$

und der 8×8–Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2+p/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1+p/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1/2+q/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1+q/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2+p/2 & 0 & 1/2-p/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+p/2 & 0 & 1-p/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2+q/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+q/2 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist akzeptabel und wurde mit der vollen Punktzahl belohnt.
Der Hinweis deutet allerdings darauf hin, dass etwas Nachdenken zu einer einfacheren Lösung und Darstellung auf dem kleineren Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ führt. Am Startvektor π und der Matrix B kann man ablesen, dass der Zustand 1 nie erreicht wird und die Schadenhöhenverteilung gerade die Exp(1)-Verteilung ist. Damit wird P(a) zu Exp(1 – a), und die gesuchte Gesamtschadenverteilung ist

$$\begin{aligned}&(1-p)(1-q)\delta_0 + p(1-q)\mathrm{Exp}(1-p) + q(1-p)\mathrm{Exp}(1-q)\\ &+ pq\mathrm{Exp}(1-p) * \mathrm{Exp}(1-q).\end{aligned}$$

Diese Verteilung ist eine Phasentypverteilung, die auf dem Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Darstellung

$$\pi_1 = ((1-p)(1-q), 1-p, 1-q, pq, 0)$$

und

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1+p & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1+q & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1+p & 1-p\\ 0 & 0 & 0 & -1+q \end{pmatrix}$$

besitzt. Einer der Klausurteilnehmer hat die noch elegantere Darstellung der Phasentypverteilung auf dem Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3\}$ mit $\pi_1 = ((1-p)(1-q), 1-p, pq, 1-q)$ und

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1+p & 0 & 0 \\ 0 & -1+p & 1-p \\ 0 & 0 & -1+q \end{pmatrix}$$

gefunden.

2.2. *Aufgabe zum Grundwissen 2*

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Schadenhöhen.

1. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter a in der Verteilung Exp(a) der Schäden, der auf den Beobachtungen $Y_i = \min(X_i, M)$, $i = 1, \ldots, n$, basiert. (5 Punkte)
2. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter a in der Verteilung Pareto(a) der Schäden, der auf den Beobachtungen $Y_i = \max(X_i - M, 0), i = 1, \ldots, n$ basiert. (5 Punkte)
3. Wie berechnet man die asymptotische Varianz dieser Schätzer, und welche Bedeutung hat diese asymptotische Varianz? (5 Punkte)

Lösung:

1. Die Verteilung von Y_i hat auf dem Intervall $(0, M)$ die Dichte $a\exp(-ay)$, und im Punkte M hat sie die Punktmasse $\exp(-aM)$. Wir können daher annehmen, dass alle Beobachtungen Y_i positiv sind. Die zu maximierende Likelihoodfunktion ist dann

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a\exp(-aY_i)1_{\{0<Y_i<M\}} + \exp(-aM)1_{\{Y_i=M\}}\right).$$

   Mit $m = \#\{i : Y_i < M\}$ kann man die Log-Likelihoodfunktion schreiben als

$$L := m\log(a) - a \sum_{Y_i<M} Y_i - aM(n-m),$$

   und dies wird maximal für

$$a = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^{-1},$$

   sofern $m > 0$. Für $m = 0$ wird L bei $a = 0$ maximal.

2. Die Verteilung von Y_i hat auf dem Intervall $(1, M)$ die Dichte $ay^{-(a+1)}$, und im Punkte M hat sie die Punktmasse M^{-a}. Wir können daher annehmen, dass alle Beobachtungen Y_i und auch M größer als 1 sind. Die zu maximierende Likelihoodfunktion ist dann

$$\prod_{i=1}^{n} \left(aY_i^{-(a+1)}1_{\{1<Y_i<M\}} + M^{-a}1_{\{Y_i=M\}}\right),$$

   und mit obigem m ist die Log-Likelihoodfunktion

$$m\log(a) - (a+1)\sum_{Y_i<M} \log(Y_i) - a\log(M)(n-m);$$

   dies wird maximal für

$$a = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \log(Y_i)\right)^{-1},$$

   sofern $m > 0$ gilt. Für $m = 0$ wird L bei $a = 0$ maximal.

3. Ist $p(x,\theta)$ die Dichte einer Beobachtung bezüglich eines dominierenden Maßes ν, wenn θ der wahre Parameter ist, dann ist die asymptotische Varianz $\sigma^2(\theta)$ gegeben durch

$$\sigma^2(\theta) = \left(\int\left(\frac{d}{d\theta}\log p(x,\theta)\right)^2 p(x,\theta)\nu(dx)\right)^{-1}.$$

Hierbei wird natürlich die Existenz und Integrierbarkeit der Ableitung nach θ vorausgesetzt. Bei Existenz der zweiten Ableitung nach θ ist die folgende Formel nützlich:

$$\sigma^2(\theta) = \left(-\int\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\log p(x,\theta)\right)^2 p(x,\theta)\nu(dx)\right)^{-1}.$$

Im ersten Beispiel ist $\theta = a$, $p(x,\theta) = a\exp(-ax)1_{(x<M)} + \exp(-aM)1_{(x=M)}$, und mit der zweiten Formel ergibt sich

$$\sigma^{-2}(\theta) = \int_0^M \frac{1}{a^2} a\exp(-ax)dx = \frac{1}{a^2}(1-\exp(-Ma)).$$

Die asymptotische Varianz benötigt man zur Konstruktion von (asymptotischen) Konfidenzintervallen für θ : das Intervall

$$C(\alpha) = \left[\hat\theta - \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma^2(\theta)u_{\alpha/2}, \hat\theta + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma^2(\theta)u_{\alpha/2}\right]$$

enthält für großes n mit Wahrscheinlichkeit nahe bei α den unbekannten Parameter θ. Hier ist $\hat\theta$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ, und $u_{\alpha/2}$ ist das obere $1-\alpha/2$—Quantil der Standard-Normalverteilung.

2.3. Aufgabe zur Tarifierung 1

1. Welches Verteilungsmodell, mit Volumenmaß, besitzt die Varianzfunktion $V(\mu) = \mu$? Welches Verteilungsmodell, mit Volumenmaß , besitzt die natürliche Linkfunktion $g(\mu) = \mu$? (5 Punkte)
2. Es liegt ein multiplikatives Modell mit 3 Merkmalen A, B, C vor, die Merkmale haben jeweils $5, 8$ und 10 Ausprägungen. Wieviele Parameter besitzt das Modell, wenn alle gemischten Effekte der Ordnung 2 berücksichtigt werden? (6 Punkte)
3. Woran kann man erkennen, dass ein Modell mit $V(\mu) = \mu$ nicht passt? (4 Punkte)

Lösung:

1. Die Varianzfunktion $V(\mu) = \mu$ gehört zur Poissonverteilung. Das zugehörige Modell mit Volumenmaßen ist die Familie der skalierten Poissonverteilungen mit Parametern $a > 0$ und $\lambda > 0$ und den Zähldichten

$$p(a,\lambda)\{ak\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2\ldots.$$

Zur natürlichen Linkfunktion gehören die Normalverteilungen $N(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

2. Die Antwort ist unabhängig davon, ob ein additives oder ein multiplikatives Modell vorliegt. Ein Modell mit gemischten Effekten der Ordnung 2 hat folgende Gestalt:

$$E[X_{ijk}] = \mu + a_i + b_j + c_k + d_{ij} + e_{ik} + f_{jk}.$$

Die Zahl der Parameter ergibt sich zu

$$1 + 4 + 7 + 9 + 4 \times 7 + 4 \times 9 + 7 \times 9 = 148.$$

3. Die Annahme der Varianzfunktion $V(\mu) = \mu$ muss man fallenlassen, wenn die standardisierten Residuen

$$\widehat{\varepsilon}_i = (X_i - \widehat{\mu}_i)/\sqrt{\widehat{\mu}_i}$$

unterschiedlich stark schwanken, also beispielsweise für große $\widehat{\mu}$ stärker schwanken als für kleine. Hierbei ist X_i eine Beobachtung und $\widehat{\mu}_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für $E[X_i]$ im Modell. Ebenso könnte man die nicht standardisierten Residuen

$$\widehat{\varepsilon}_i = (X_i - \widehat{\mu}_i)$$

betrachten und dort prüfen, ob die Schwankungen dieser Residuen linear ansteigen oder nicht.

2.4. Aufgabe zur Solvabilität

Die jährliche Schadensumme in einer Feuerversicherung wird mit einer Poissonschen Summenverteilung beschrieben, welche einen Poissonparameter $\lambda = 1$ und die Schadenhöhenverteilung Exp(1) besitzt, die Versicherungsprämie beträgt 2. Durch den Einbau von Rauchdetektoren verändert sich die Situation: die Schadenfrequenz steigt auf 1.2, die Schadenhöhe ist in 60% aller Fälle 1, im Rest der Fälle hat sie eine Exp(1)-Verteilung, und die Prämie beträgt 1.6. Hat sich die Risikosituation des Versicherers durch diese Maßnahme verbessert? Beurteilen Sie dies mit Hilfe des Anpassungskoeffizienten. (30 Punkte)

Lösung:

Der Anpassungskoeffizient vor dem Einbau ergibt sich aus der Gleichung

$$1 + 2R = \frac{1}{1 - R},$$

was $R = 1/2$ ergibt. Nach dem Einbau sieht die Gleichung für den Anpassungskoeffizienten R' so aus:

$$1.2 + 1.6R' = 1.2\left(0.6 \exp(R') + 0.4 \frac{1}{1 - R'}\right).$$

Für $R' = 1/2$ ist die linke Seite der Gleichung 2, die rechte Seite ist

$$1.2(0.6\sqrt{e} + 0.8) > 1.2 \times 1.4 > 2.$$

Daraus folgt $R = 1/2 > R'$; der Anpassungskoeffizient hat sich durch den Einbau von Rauchdetektoren also verkleinert, die Risikosituation des Versicherers hat sich nicht verbessert.

2.5 Aufgabe zur Tarifkalkulation II (25 Punkte)

1. Skizzieren Sie eine statistisch fundierte Vorgehensweise zur Auswahl des auf Basis des Schadenbedarfs effizientesten *zusätzlichen* Tarifmerkmals für einen bereits auf m Tarifmerkmalen mit insgesamt M Zellen beruhenden Tarifs in der Autohaftpflicht-Versicherung und nennen Sie die zur Durchführung erforderlichen Daten. (8 Punkte)

2. Ein Versicherungsunternehmen will einen KH-Tarif aufbauen, der sich ausschließlich an der Schadenhäufigkeit orientiert. Das *erste* Tarifmerkmal soll mit dem Kriterium

$$T = \sum_{k=1}^{K} v_k (z_k - \hat{\mu})^2 / \hat{\mu}$$

ausgewählt werden, wobei

K = Anzahl Ausprägungsklassen des Merkmals,
v_k = Anzahl Jahreseinheiten in Ausprägungsklasse k,
z_k = Schadenhäufigkeit in Ausprägungsklasse k = (Anzahl Schäden)/v_k,
$\hat{\mu} = \sum v_k z_k / \sum v_k$.

a) Kommentieren Sie die Tauglichkeit dieses Kriteriums. Welches Merkmal sollte ausgewählt werden: das mit dem größten Wert T, das mit dem kleinsten Wert T oder ein anderes (welches?)? Begründen Sie Ihre Antwort. (10 Punkte)

b) Nach Auswahl des ersten Tarifmerkmals soll geprüft werden, ob ein weiteres Merkmal in Betracht kommt. Wie sollte – bei Beibehaltung der hinter T steckenden Philosophie – vorgegangen werden: Auswahl des Merkmals, das in a) am zweitbesten abgeschnitten hat oder anders (wie?)? Begründen Sie Ihre Antwort. (7 Punkte)

Lösung:

1. Man testet, welches (noch nicht als Tarifmerkmal verwendete) Risikomerkmal über die Gesamtheit der M Zellen des bestehenden Tarifs die Hypothese gleicher Schadenbedarfs-Erwartungswerte in seinen Ausprägungsklassen am klarsten verwirft, d.h. wenn das betrachtete Merkmal K Ausprägungsklassen hat, so testet man die Hypothese
H_0: $(E(Z_{1k}), E(Z_{2k}), \ldots, E(Z_{MK}))$, $1 \leq k \leq K$, sind gleich,
z.B. mittels LQ-Text, wobei Z_{ik} der Schadenbedarf in Zelle i,k ist.
Hierfür benötigt man pro entstehender Zelle die inflationsbereinigten Werte des Schadenbedarfs aus mehreren Jahren und die zugehörige Anzahl Jahreseinheiten. Wenn man nur Daten aus einem Jahr hat, muss man den Formparameter kennen oder Kreuzklassifikation unterstellen
Statt des Tests auf Gleichgewicht von Erwartungswert-Vektoren gibt es auch andere Möglichkeiten, z.B. unter Annahme von Kreuzklassifikation den Vergleich der Devianzen entsprechend geschachtelter GLMs.

2a) Die Statistik $T = \sum_{k=1}^{K} v_k (z_k - \hat{\mu})^2 / \hat{\mu} = \sum_{k=1}^{K} \frac{(n_k - v_k \hat{\mu})^2}{v_k \hat{\mu}}$

mit der Schadenzahl $n_k = v_k z_k$ in Ausprägungsklasse k ist die Testgröße des χ^2-Anpassungstests (mit $K-1$ Freiheitsgraden), d.h. prüft die Hypothese H_0, ob die Schadenzahlen in allen Ausprägungsklassen dieselbe mittlere Frequenz $E(n_k/v_k) = \mu$ haben (denn dann ist $(n_1, n_2, \ldots, n_K)$ polynomial verteilt mit den volumenproportionalen Klassenwahrscheinlichkeiten $p_k = v_k/v_+$, $1 \leq k \leq K$, und in Klasse k werden $p_k n_+ = v_k \hat{\mu}$-viele Schäden erwartet).
Wird die Hypothese H_0 nicht abgelehnt, so unterscheiden sich die Ausprägungsklassen des Merkmals nur zufällig, d.h. das Merkmal ist nicht als Tarifmerkmal geeignet. Umgekehrt ist ein Merkmal umso eher als Tarifmerkmal geeignet, je signifikanter H_0 abgelehnt wird, d.h. je kleiner der P-Wert von T ist, d.h. die Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2_{K-1} > T)$, dass eine Chi-Quadrat-verteilte Zufallsvariable mit $K-1$ Freiheitsgraden größer als der beobachtete Wert von T ist. Das muss wegen unterschiedlicher Klassenzahl nicht unbedingt das Merkmal mit dem größten Wert T sein!

2b) Man sollte nicht das Merkmal nehmen, welches in a) am zweitbesten abgeschnitten hat, da dieses stark mit dem ersten Merkmal korreliert sein könnte, und dann die Effizienz des Tarifs mit 2 Merkmalen kaum besser wäre als mit nur einem Merkmal. Stattdessen sollte man das Merkmal nehmen, welches mit der entsprechenden verallgemeinerten Testgröße

$$T_2 = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} v_{kl}(z_{kl} - \hat{\mu}_k)^2/\hat{\mu}_k, \quad \hat{\mu}_k = \sum_l v_{kl}z_{kl}/\sum_l v_{kl}$$

die höchste Signifikanz, d.h. den kleinsten P-Wert $P(\chi^2_{K(L-1)} > T_2)$ ergibt. T_2 testet für alle K Zellen des ersten Tarifmerkmals zugleich, ob dort das 2. Merkmal in seinen Ausprägungsklassen eine jeweils gleiche Häufigkeit μ_k hat.

2.6 Aufgabe zur Schadenreservierung (35 Punkte)

Sei C_{ik} der kumulierte Schadenstand von Anfalljahr i nach k Entwicklungsjahren, $1 \leq i, k \leq n$, und $S_{ik} := C_{ik} - C_{i,k-1}$ sowie $D_{ik} := \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ik}\}$. Für $Z_{ik} := \frac{S_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid D_{ik}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq n-1$, wird eine Gammaverteilung mit Erwartungswert μ_k und Formparameter $C_{ik}\alpha_k$ vorgeschlagen.

a) Ist der Vorschlag a priori bezüglich der Art der Verteilung und deren Parametrisierung akzeptabel? Begründen Sie Ihre Antwort. (8 Punkte)

b) Wie lautet auf Basis der verfügbaren Beobachtungen der Maximum-Likelihood-Schätzer für μ_k? Welche zusätzliche Annahme haben Sie dabei gemacht? Gibt es Ähnlichkeiten zu einem bekannten Schadenreservierungsverfahren? (9 Punkte)

c) Berechnen Sie den (bedingten) Erwartungswert $E(S_{i,k+2} \mid D_{ik})$ des Zuwachses im *über*nächsten Entwicklungsjahr. (8 Punkte)

d) Welches Integral muss ausgerechnet werden, wenn man die ganze Verteilung des Zuwachses $S_{i,k+2} \mid D_{ik}$ im übernächsten Entwicklungsjahr berechnen will (bei bekannten Parametern)? Sie können dabei zur Abkürzung die Bezeichnung $f(x \mid \mu,\alpha)$ bzw. $F(x \mid \mu,\alpha)$ für die Dichte bzw. Verteilungsfunktion der Gammaverteilung mit Erwartungswert μ und Formparameter α verwenden. (10 Punkte)

Lösung:

a) Handelt es sich um Zahlungen, so sind die Zuwächse $S_{i,k+1}$ üblicherweise rechtsschief verteilt auf $(0;\infty)$ und können daher a priori durch eine Gammaverteilung modelliert werden. Dann sind auch die Quotienten $Z_{i,i} = \frac{S_{i,k+1}}{C_{ik}} \Big| D_{ik}$ bei gegebenem C_{ik} gammaverteilt.
C_{ik} spielt hierbei die Rolle eines Volumenmaßes für $S_{i,k+1}$; $1 + Z_{ik} = C_{i,k+1}/C_{ik}$ ist gerade der individuelle Abwicklungsfaktor. Daher ist analog zur Chain Ladder (CL) die Annahme eines überall gleichen Erwartungswerts μ_k von Z_{ik} sinnvoll und erlaubt mittels $\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{ik}(1 + \hat{\mu}_k)$ für $k > n - i$ die Prognose des noch nicht bekannten Teils des Abwicklungsdreiecks. Das Modell für Z_{ik}, $1 \leq i \leq n$, ist bei festem k gerade das Individuelle Modell für die Zahlungen des Anfalljahrs i mit unterschiedlichen Volumina C_{ik}, d.h. die Varianz

$$\mathrm{Var}(Z_{ik}) = \mu_k^2/(C_{ik}\alpha_k)$$

ist gerade umgekehrt proportional zum Volumen C_{ik} wie beim CL-Abwicklungsfaktor-Modell. Das vorgeschlagene Modell ist also ein Spezialfall des verteilungsfreien CL-Modells und somit für Zahlungsdreiecke akzeptabel. Das Gamma-Modell für Z_{ik} ist weniger für angefallene Schäden geeignet, da hierbei $S_{i,k+1}$ negativ werden kann, und auch nicht für Schadenanzahlen, da gammaverteilte Zufallsvariablen stets positiv und kontinuierlich sind.

b) Gemäß Formelsammlung ist

$$f(x \mid \mu, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\alpha/\mu} / \Gamma(\alpha)$$

die Dichte der Gamma-Verteilung mit Erwartungswert $\mu = \alpha/\beta$ und Formparameter α. Die Loglikelihood ist also

$$\ln\big(f(x \mid \mu, \alpha)\big) = \alpha \ln(\alpha/\mu) + (\alpha - 1)\ln(x) - x\alpha/\mu - \ln\big(\Gamma(\alpha)\big).$$

Die Loglikelihood an der Stelle $x_i = Z_{ik}$ lautet also

$$\ln\big(f(x_i \mid \mu_k, C_{ik}\alpha)\big) = C_{ik}\alpha_k \ln(C_{ik}\alpha_k/\mu_k) + (C_{ik}\alpha_k - 1)\ln(Z_{ik}) - Z_{ik}C_{ik}\alpha_k/\mu_k - \ln\big(\Gamma(C_{ik}\alpha_k)\big).$$

Unter der zusätzlichen Annahme unabhängiger Beobachtungen $x_1 = Z_{1k}, \ldots, x_{n-k} = Z_{n-k,k}$ lautet die Loglikelihood

$$L(\mu_k, \alpha_k) = \ln\left\{\prod_{i=1}^{n-k} f(x_i \mid \mu_k, C_{ik}\alpha_k)\right\} = \sum_{i=1}^{n-k} \ln\big(f(x_i \mid \mu_k, C_{ik}\alpha_k)\big)$$

und liefert folgende Bedingung für den Maximum-Likelihood-Schätzer von μ_k:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu_k} L(\mu_k, \alpha_k) = \sum_{i=1}^{n-k}\left(-\frac{C_{ik}\alpha_k}{\mu_k} + \frac{Z_{ik}C_{ik}\alpha_k}{\mu_k^2}\right) = \frac{\alpha_k}{\mu_k^2}\sum_{i=1}^{n-k}(S_{i,k+1} - C_{ik}\mu_k)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}_k = \sum_{i=1}^{n-k} S_{i,k+1} \Big/ \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} = \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1} \Big/ \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} - 1,$$

d.h. es ergibt sich dieselbe Ergänzung des Abwicklungsdreiecks wie beim Chain-Ladder-Verfahren.

c)

$$\begin{aligned} E(S_{i,k+2} \mid D_{ik}) &= E[E(S_{i,k+2} \mid D_{i,k+1}) \mid D_{i,k}] \\ &= E[C_{i,k+1}\mu_{k+1} \mid D_{ik}] \\ &= E[(C_{ik} + S_{i,k+1}) \mid D_{ik}]\mu_{k+1} \\ &= (C_{ik} + E[S_{i,k+1} \mid D_{ik}])\mu_{k+1} \\ &= (C_{ik} + C_{ik}\mu_k)\mu_{k+1} \\ &= C_{ik}(1 + \mu_k)\mu_{k+1} \end{aligned}$$

d) Gegeben $D_{i,k+1}$ hat $S_{i,k+2}$ and der Stelle $x > 0$ die Dichte

$$f(x \mid C_{i,k+1}\mu_{k+1}, C_{i,k+1}\alpha_{k+1}) = f(x \mid (C_{ik} + S_{i,k+1})\mu_{k+1}, (C_{ik} + S_{i,k+1})\alpha_{k+1}).$$

Da nur D_{ik} und nicht $D_{i,k+1}$ als gegeben zu betrachten ist, ist $S_{i,k+1}$ variabel, d.h. diese Dichte muss noch über alle möglichen Werte $S_{i,k+1} = y$ entsprechend deren Wahrscheinlichkeit $f(y \mid C_{ik}\mu_k, C_{ik}\alpha_k)$ bei gegebenem C_{ik} gemittelt werden. Daher beträgt die Dichte von $S_{i,k+2}$, gegeben D_{ik}, an der Stelle $x > 0$

$$\int_0^\infty f(x \mid (C_{ik} + y)\mu_{k+1}, (C_{ik} + y)\alpha_{k+1}) f(y \mid C_{ik}\mu_k, C_{ik}\alpha_k)\, dy.$$

2.7 Aufgabe zur Risikoteilung (30 Punkte)

Für das Portefeuille eines Erstversicherers wird die Gültigkeit des Kollektiven Modells mit Schadenzahl N, Schadenhöhe X und Schadenhöhenverteilung F unterstellt, um die Auswirkung einer unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $a > 0$ zu analysieren.

a) Berechnen Sie die Ableitung von $m_k(a) = E[(\min(X,a))^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ nach a an den Nicht-Sprungstellen von F. (6 Punkte)

b) Drücken Sie den Variationskoeffizienten $\mathrm{Vko}(S_a)$ des Selbstbehalts-Gesamtschadens $S_a = \sum_{n=1}^{N} \min(X_n, a)$ in Abhängigkeit von $m_k(a)$ und N aus. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Vko}(S_a)$ monoton wachsend in a ist. (7 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass für den Selbstbehalts-Gesamtschaden S* des Erstversicherers unter einer Quoten-Rückversicherung mit $E(S^*) = E(S_a)$ stets gilt:

$$\mathrm{Var}(S*) > \mathrm{Var}(S_a). \quad \text{(6Punkte)}$$

e) Beweisen Sie, dass $X_a = \min(X,a)$ und $Y_a := X - X_a = \max(0, X - a)$ bei echter Risikoteilung positiv korreliert sind. (8 Punkte)

Lösung:

a) Nach Definition ist

$m_k(a) = E\left[(\min(X, a))^k\right] = \int_0^a x^k\, dF(x) + a^k(1 - F(a)).$

Hiervon kann man unter Annahme der Existenz einer Dichte dF(x)=f(x)dx direkt die Ableitung nach a berechnen. Ohne diese Annahme muß man partiell integrieren:

$$\begin{aligned} m_k(a) &= \left[x^k F(x)\right]_0^a - \int_0^a kx^{k-1} F(x)dx + a^k(1 - F(a)) \\ &= a^k - \int_0^a kx^{k-1} F(x)dx = \int_0^a kx^{k-1}(1 - F(x))\, dx, \end{aligned}$$

und daraus folgt unmittelbar

$$m_k'(a) = ka^{k-1}(1 - F(a)).$$

b) Mit $X_a = \min(X,a)$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Vko}(S)_a &= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S_a)}}{E(S_a)} = \frac{\sqrt{E(N)\mathrm{Var}(X_a) + \mathrm{Var}(N)(E(X_a))^2}}{E(N)E(X_a)} \\ &= \frac{\sqrt{E(N)(m_2(a) - m_1^2(a)) + \mathrm{Var}(N) m_1^2(a)}}{E(N) m_1(a)} \end{aligned}$$

c)

$$(\mathrm{Vko}(S_a))^2 = \frac{1}{E(N)} \cdot \frac{m_2(a)}{m_1^2(a)} + \frac{\mathrm{VarN} - \mathrm{EN}}{(\mathrm{EN})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \frac{m_2(a)}{m_1^2(a)} &= \frac{m_1^2(a) m_2'(a) - m_2(a) 2 m_1(a) m_1'(a)}{m_1^4(a)} \\ &= \frac{m_1(a) 2a(1 - F(a)) - m_2(a) 2(1 - F(a))}{m_1^3(a)} \\ &= \frac{2(1 - F(a))}{m_1^3(a)} (a m_1(a) - m_2(a)) > 0 \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} m_2(a) &= \int_0^a x^2 dF(x) + a^2(1 - F(a)) \\ &< \int_0^a ax\, dF(x) + a^2(1 - F(a)) = a m_1(a) \end{aligned}$$

d) Trivialerweise gilt $\mathrm{Vko}(S^*) = \mathrm{Vko}(S) = \mathrm{Vko}(S_\infty)$.
Nach c) ist $\mathrm{Vko}(S_a) < \mathrm{Vko}(S_\infty)$, also $\mathrm{Vko}(S_a) < \mathrm{Vko}(S^*)$,

also $\frac{\mathrm{Var}(S_a)}{(E(S_a))^2} < \frac{\mathrm{Var}(S^*)}{(E(S^*))^2}$

Daraus folgt wegen der Voraussetzung $E(S_a) = E(S^*)$ sofort die Behauptung.

e) Zu zeigen ist $\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) > 0$.

$\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) = E(X_a \cdot Y_a) - E(X_a)E(Y_a)$,

$$E(X_a \cdot Y_a) = \int_0^a x \cdot 0\, dF(x) + \int_a^\infty a(x-a)\, dF(x)$$

$$= a \int_0^\infty (x-a)\, dF(x) = aE(Y_a),$$

$\mathrm{Cov}(X_a, Y_a) = (a - E(X_a))E(Y_a) > 0$

wegen

$$E(x_a) = \int_0^\infty \min(x,a)\, dF(x) < \int_0^\infty a\, dF(x) = a.$$

2.8 Zusatzaufgabe

In einem Versicherungsvertrag ist die Schadenanzahl pro Jahr geometrisch verteilt mit Parameter 0.2, und die Schadenhöhen nehmen die Werte 50, 100 und 1000 mit den Wahrscheinlichkeiten 0.75, 0.2 und 0.05 an. Bei Schadenfreiheit wird eine Beitragserstattung in Höhe von 210 DM gewährt. Schäden können am Ende des Jahres nachgemeldet werden.

1. Wie wird sich ein rationaler Versicherungsnehmer verhalten? (5 Punkte)
2. Wie hoch ist die Nettorisikoprämie, wenn die Beitragsrückerstattung als Schadenzahlung aufgefasst wird? (25 Punkte)

Lösung:

1. Ein rationaler Versicherungsnehmer wird keinen Schaden melden, wenn die Gesamtsumme der Schäden die Beitragsrückgewähr 210 nicht überschreitet, also
   1. wenn kein Schaden auftritt;
   2. wenn ein Schaden der Höhe ≤ 100 auftritt;
   3. wenn zwei Schäden der Höhe ≤ 100 auftreten;
   4. wenn zwei Schäden der Höhe 50 und ein Schaden der Höhe ≤ 100 auftritt;
   5. wenn vier Schäden der Höhe 50 auftreten.
2. Sei N die Schadenanzahl, und $X_1, X_2, \ldots$ seien die Schadenhöhen. Die Beitragsrückerstattung der Höhe 210 wird mit folgender Wahrscheinlichkeit ausbezahlt:

$$\begin{aligned}
&P(N=0) + P(N=1)P(X_1 \leq 100) + P(N=2)P(X_1 \leq 100)^2 \\
&+P(N=3)\big(P(X_1=50) + 3P(X_1=100)\big)P(X_1=50)^2 + P(N=4)P(X_1=50)^4 \\
&\quad = 0.8 + 0.8 \times 0.2 \times 0.95 + 0.8 \times 0.2^2 \times 0.95^2 \\
&\qquad + 0.8 \times 0.2^3 \times 1.35 \times 0.75^2 + 0.8 \times 0.2^4 \times 0.75^4 \\
&\quad = 0.986145.
\end{aligned}$$

Die Nettorisikoprämie für die Beitragsrückerstattung beträgt also $210 \times 0.986145 = 207.09$.

Die Nettorisikoprämie für alle Schäden ist bei der mittleren Schadenhöhe von

$$50 \times 0.75 + 100 \times 0.2 + 1000 \times 0.05 = 107.5$$

und einer mittleren Schadenanzahl von 0.25 gegeben durch

$$0.25 \times 107.5 = 26.875.$$

Der Erwartungswert aller selbst getragenen Schäden ist

$$\begin{aligned}
&0.8 \times 0.2 \times (50 \times 0.75 + 100 \times 0.2) \\
&+ 0.8 \times 0.2^2 \times (100 \times 0.75^2 + 2 \times 150 \times 0.75 \times 0.2 + 200 \times 0.05^2) \\
&+ 0.8 \times 0.2^3 \times (150 \times 0.75^3 + 3 \times 200 \times 0.75^2 \times 0.2) \\
&+ 0.8 \times 0.2^4 \times 200 \times 0.75^4 \\
&= 13.374.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Nettorisikoprämie berechnet sich aus der Nettorisikoprämie für die Beitragsrückerstattung plus Nettorisikoprämie für alle Schäden minus Erwartungswert der selbst getragenen Schäden, also zu

$$207.09 + 26.875 - 13.374 = 220.59.$$