Bericht zu den Prüfungen in 1997 und 1998 über Mathematik der Schadensversicherung (Spezialwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

In den Klausuren zum Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik waren zu jedem der Gebiete Stochastische Grundlagen, Prämienkalkulation, Risikoteilung, Reservierung und Solvabilität Aufgaben gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde jeweils nur gewertet, wenn eine der anderen Aufgaben nicht bearbeitet wurde. Die Zahlen in der Aufgabenstellung geben jeweils die maximal erreichbare Punktzahl an. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 72 der 180 möglichen Punkte erreicht wurden. Zunächst die

Aufgaben des Jahres 1997:

Aufgabe 1 (Grundlagen)

Gegeben sei das individuelle Modell eines Versicherungsbestandes mit n Risiken, deren Verteilungen die Gestalt

$$P_i = (1 - p_i)\,\delta_0 + p_i Q_i,\ i = 1, \dots, n$$

besitzen. Sei $P = P_1 * \dots * P_n$.

a) Geben Sie die Approximation mit einer Poissonschen Summenverteilung für P an. (5 Punkte)

b) Geben Sie die Kornya-Approximation der Ordnung 3 für P an. (5 Punkte)

c) Wie berechnet man die Kornya-Approximation (beliebige Ordnung) im Falle arithmetischer Verteilungen Q_i? (10 Punkte)

d) Welcher Unterschied besteht zwischen der de Pril-Rekursion und der Kornya-Approximation hoher Ordnung? (10 Punkte)

Lösung:

a) Die PSV-Approximation hat die Parameter

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

und

$$Q = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_i Q_i .$$

b) Die Kornya-Approximation hat die Form

$$\exp(\lambda(H - \delta_0)), \tag{0.1}$$

mit

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} (p_i + p_i^2/2 + p_i^3/3)$$

und

$$H = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i Q_i - \frac{1}{2} p_i^2 (Q_i^{*2} - 2Q_i) + \frac{1}{3} (Q_i^{*3} - 3Q_i^{*2} + 3Q_i) \right).$$

c) Der angesprochene Fall ist der, bei dem alle Verteilungen Q_i auf einem Gitter der Form $\{h, 2h, 3h, \ldots\}$ leben. Die Kornya-Approximation $\hat{P}$ einer beliebigen Ordnung lebt dann auf dem Gitter $\{0, h, 2h, 3h, \ldots\}$, sie hat die Form (0.1), und die Berechnung geschieht mit der Panjer-Rekursion:

$$\hat{P}\{0\} = \exp(-\lambda),$$

$$\hat{P}\{h(k+1)\} = \frac{\lambda}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} iH\{hi\}\, \hat{P}\{h(k+1-i)\}, \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

d) Eine Kornya-Approximation ist nahezu exakt, sie beruht auf derselben Schreibweise einer Verteilung als Exponential des Logarithmus wie die de Pril-Rekursion. Bis auf die Terme hoher Ordnung ist die Rekursion für die Berechnung der Kornya-Approximation genau dasselbe wie die de Pril Rekursion. Allerdings sind die Startwerte unterschiedlich: bei Kornya ist dieser $\exp(-\lambda)$, bei de Pril die exakte Wahrscheinlichkeit für die Null:

$$P\{S = 0\} = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Aufgabe 2 (Prämienkalkulation)

a) Erläutern Sie die Begriffe *Linksfunktion* und *Varianzfunktion.* (5 Punkte)

b) Welche Rolle spielen diese Begriffe bei verallgemeinerten linearen Modellen? (5 Punkte)

c) Der Tarif für ein Risiko soll nach drei Merkmalen A, B und C differenziert werden, wobei A 5, B 6 und C 7 Ausprägungen aufweist. Wieviele Parameter hat ein multiplikatives verallgemeinertes lineares Modell, welches die Haupteffekte und die gemischten Effekte AB berücksichtigt? (10 Punkte)

d) Wie berechnet man Residuen im Falle Poissonverteilter Beobachtungen? (10 Punkte)

Lösung:

a) Die *Varianzfunktion* stellt die Abhängigkeit der Varianz vom Mittelwert dar; sie legt den Verteilungstyp des statistischen Modells fest. Für Normal-, Poisson-, Gamma- und inverse Gaußverteilungen ergeben sich folgende Varianzfunktionen: $V(\mu) = 1$; μ; μ^2 und μ^3. Die *Linkfunktion* stellt die Abhängigkeit zwischen dem Mittelwert und dem linearen Prediktor, also der Linearkombination der Regressionsparameter, dar. Sie ist eine monotone Funktion $g(\mu)$ des Mittelwertes μ. Ergibt $g(\mu)$ den natürlichen Parameter der exponentiellen Familie, dann spricht man von der *natürlichen* Linksfunktion.

b) Bei verallgemeinerten linearen Modellen hängt der Maximum-Likelihood-Schätzer nur von den Daten, den Kovariaten (den Tarifmerkmalen), den Volumenmaßen und diesen beiden Funktionen ab. Mit der Varianzfunktion kann man das Modell an einen – möglicherweise in den Residuen sichtbaren – Trend zwischen Mittelwert und Streuung anpassen.

c) Sei μ der Kontrast, seien a_i, b_j, c_k die Parameter für die Haupteffekte und d_{ij} die Parameter für die gemischten Effekte der Merkmale A und B. Es werden zur Normierung alle Parameter Null gesetzt, bei denen einer der Indices 1 ist; dann verbleiben die Parameter μ, $a_2, \ldots, a_5$, $b_2, \ldots, b_6$, $c_2, \ldots, c_7$, und d_{ij}, $i = 2, \ldots, 5$, $j = 2, \ldots, 6$. Das sind insgesamt $1 + 4 + 5 + 6 + 4 \times 5 = 36$ Parameter.

d) Die klassischen Residuen, die in linearen Modellen ihre Bedeutung haben, werden als Differenz zwischen den Beobachtungen X_i und den geschätzten Mittelwerten gebildet, wobei mit dem Volumenmaß v_i auf gleiche Varianz standardisiert wird:

$$\varepsilon_i = (X_i - \hat{\mu}_i) / \sqrt{v_i}.$$

Bei Poissonverteilten Beobachtungen werden Residuen mit Hilfe der Devianz definiert: die Devianz der Beobachtung X_i ist

$$d_i = 2\left(\hat{\theta}_i X_i - c(\hat{\theta}_i) - \left(\tilde{\theta}_i X_i - c(\tilde{\theta}_i)\right)\right) v_i,$$

wobei $\hat{\theta}_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ_i im Modell und $\tilde{\theta}_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer im vollen Modell ist. Im Poisson-Fall ist $v_i = 1$, $\hat{\theta}_i = \log(\hat{\mu}_i)$, $c(\theta) = \exp(\theta)$, $\tilde{\theta}_i = \log(X_i)$, also

$$d_i = 2(X_i \log(\hat{\mu}_i / X_i) - (\hat{\mu}_i - X_i)),$$
$$\varepsilon_i = \sqrt{d_i}\ \mathrm{sign}(X_i - \hat{\mu}_i).$$

Für $x = 0$ wird $x \log(x) = 0$ gesetzt.

Aufgabe 3 (Solvabilität)

Phasentyp-Verteilungen werden beschrieben durch ihre Parameter π (Startvektor) und B (Intensitätsmatrix).

a) Welche Verteilung ist gegeben durch

$$\pi = (1/2, 1/2) \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}? \text{ (5 Punkte)}$$

b) Wie lauten die Parameter π und B für die Gamma(3,1)-Verteilung? (5 Punkte)

c) Welche Bedeutung haben Phasentypverteilungen für die Ruintheorie? (10 Punkte)

d) Ist die Gamma(3/2,1)-Verteilung eine Phasentypverteilung? (10 Punkte)

Lösung:

a) Die Verteilung mit Parametern $\pi_1 = (1,0)$ und obigem B ist die Erlang(2,1)-Verteilung oder eine Gamma(2,1)-Verteilung (also die Faltung zweier Exp(1)-Verteilungen). Mit $\pi_2 = (0,1)$ und obigem B erhält man die Exp(1)-Verteilung. Das vorgegebene $\pi = (1/2,\ 1/2)$ ist die Konvexkombination von π_1 und π_2. Somit wird durch die gegebenen Parameter die Verteilung

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Erlang}(2,1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Exp}(1)$$

dargestellt.

b) Die Gamma(3,1)-Verteilung ist die dreifache Faltung der Exp(1)-Verteilung. Diese wird dargestellt als Phasentypverteilung mit

$$\pi = (1,0,0) \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Für Phasentypverteilungen als Schadenhöhenverteilungen Q kann man die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell explizit angeben: Sei μ der Erwartungswert von Q, c die Prämienrate und λ die Intensität der Schadenanzahl. Ist $p = \lambda\mu/c$ und sind π und B die Parameter von Q, dann ist die Ruinwahrscheinlichkeit mit unendlichen Planungshorizont gegeben durch

$$\psi(s) = p\pi^{*\prime} \exp(sB^*)\mathbf{1}.$$

Diesen Ausdruck kann man beispielsweise in MAPLE analytisch berechnen. Dabei ist mit der Intensität b_{i0} von Zustand i nach 0,

$$\pi^* = -\frac{1}{\mu}(B')^{-1}\pi \text{ und}$$

$$B^* = (b^*_{ij}) \text{ mit } b^*_{ij} = b_{ij} + b_{i0}p\pi^*_j.$$

d) Jede Phasentypverteilung hat eine rationale momenterzeugende Funktion. Die Gamma(3/2,1)-Verteilung hat momenterzeugende Funktion

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^{3/2}, t < 1,$$

und diese ist nicht rational. Die Gamma(3/2,1)-Verteilung ist somit keine Phasentypverteilung.

Aufgabe 4 (Tarifkalkulation)

a) Was ist der Zweck des Bailey-Simon-Verfahrens, und warum strebt man diesen Zweck an? (5 Punkte)

b) Welche 4 Schwachpunkte hat das Bailey-Simon-Verfahren? (5 Punkte)

c) Welche dieser Schwachpunkte werden vom Marginalsummenverfahren überwunden? (5 Punkte)

d) Skizzieren Sie ein Verfahren (für den Fall zweier Tarifmerkmale), mit dem auch die von Marginalsummenverfahren nicht überwundenen Schwachpunkte überwunden werden können, und legen Sie dar, wieso dies der Fall ist. (15 Punkte)

Lösung:

a) Der Zweck des Bailey-Simon-Verfahrens ist der Ausgleich der Schadenerfahrung der Tarifzellen bei kreuzklassifizierter Tarifstruktur. Damit möchte man folgende Ziele erreichen:
   - eine Stabilisierung der Schwankungen der zellweisen Schadenerfahrung durch Berücksichtigung benachbarter Tarifzellen (genauer aller Zellen, die bis auf ein Merkmal übereinstimmen),
   - eine Tariforganik dergestalt, daß zwischen zwei Ausprägungen eines Tarifmerkmals ceteris paribus stets die gleiche Größer-Kleiner-Relation besteht,
   - eine Reduktion der Anzahl der Parameter, die neben den genannten Effekten auch eine einfachere Darstellung des Tarifes durch Zu- bzw. Abschläge für jede Merkmalsausprägung ermöglicht.

b) Das Bailey-Simon-Verfahren
   - ist ausreißerempfindlich,
   - überschätzt die Marginalsummen,
   - ermöglicht keinen Anpassungstest und
   - liefert keine Angabe zur Genauigkeit der Parameter bzw. der ausgeglichenen Schadenbedarfe.

c) Das Marginalsummenverfahren überwindet die beiden erstgenannten Schwächen, nicht jedoch die beiden letztgenannten.

d) Man lege dem Schadenbedarf Z_{ik} von Zelle (i, k) ein stochastisches Modell aus einer Exponentialfamilie (z.B. eine Gammaverteilung) zugrunde und schätze die Parameter x_i, y_k der multiplikativen oder additiven Tarifstruktur $EZ_{ik} = x_i \oplus y_k$ mittels Maximum-Likelihood. Auf diese Weise erhält man einen Anpassungstest mittels des Likelihood-Quotienten-Tests gegen die Parametrisierung $EZ_{ik} = \mu_{ik}$ und kann die Genauigkeit (den Standardfehler) der Parameter und der ausgeglichenen Schadenbedarfe aus der (asymptotischen) Kovarianz des ML-Schätzers ermitteln.

Aufgabe 5 (Schadenreservierung)

a) Nennen Sie die Modellvoraussetzungen des Verfahrens der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse. (5 Punkte)

b) Geben Sie den Schätzer $\hat{R}_i$ für die Schadenreserve R_i des i-ten Anfalljahres an. (5 Punkte)

c) Geben Sie einen Schätzer für den mittleren quadratischen Fehler $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ an. (15 Punkte)

d) Wozu kann man den in c) angegebenen Schätzer verwenden? (5 Punkte)

Lösung:

a) Die Modellvoraussetzungen des Verfahrens der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse lauten:
   - Die Zuwächse S_{ik} von Anfalljahr i in Abwicklungsjahr k sind unabhängig für alle $1 \le i, k \le n$.
   - Für jedes Anfalljahr ist ein Volumenmaß v_i bekannt mit

$$E(S_{ik}/v_i) = m_k \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(S_{ik}/v_i) = s_k^2/v_i \quad \text{für alle i, k.}$$

b) Wegen $R_i = S_{i,n+2-i} + \ldots + S_{i,n}$ schätzt man R_i durch

$$\hat{R}_i = \hat{S}_{i,n+2-i} + \ldots + \hat{S}_{i,n} = v_i(\hat{m}_{n+2-i} + \ldots + \hat{m}_n)$$

mit

$$\hat{m}_k = \sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} v_j.$$

c) Der mittlere quadratische Fehler $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ ergibt sich aus folgenden Formeln:

$$E(\hat{R}_i - R_i)^2 = \operatorname{Var}(\hat{R}_i - R_i) = \operatorname{Var}(\hat{R}_i) + \operatorname{Var}(R_i),$$

$$\operatorname{Var}(R_i) = \sum_{k=n+2-i}^{n} \operatorname{Var}(S_{ik}) = \sum_{k=n+2-i}^{n} v_i s_k^2,$$

$$\operatorname{Var}(\hat{R}_i) = v_i^2 \operatorname{Var}\left(\sum_{k=n+2-i}^{n} \hat{m}_k \right) = v_i^2 \sum_{k=n+2-i}^{n} \operatorname{Var}(\hat{m}_k)$$

$$\operatorname{Var}(\hat{m}_k) = \sum_{j=1}^{n+1-k} \operatorname{Var}(S_{jk}) / \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j \right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1-k} v_j s_k^2 / \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j \right)^2 = s_k^2 / \sum_{j=1}^{n+1-k} v_j.$$

Um zu einem Schätzer für $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ zu kommen, müssen nur noch die unbekannten Parameter s_k^2 durch die Schätzer $\hat{s}_k^2$ ersetzt werden:

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} \left(\frac{S_{jk}}{v_j} - \hat{m}_k \right)^2, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\hat{s}_n^2 = \min(\hat{s}_{n-2}^2, \hat{s}_{n-1}^2).$$

d) Mit Hilfe des Schätzers aus c) kann man näherungsweise ein Konfidenzintervall für R_i angeben, z.B. durch Annahme einer Normal- oder Lognormalverteilung; bei der Normalverteilung verwendet man als Parameter für den Erwartungswert $\hat{R}_i$ und für die Varianz den Schätzer für $E(\hat{R}_i - R_i)^2$. Auf diese Weise kann man prüfen, ob andere Schätzer für R_i signifikant von dem in b) angegebenen $\hat{R}_i$ abweichen.

Aufgabe 6 (Risikoteilung)

Im kollektiven Modell sei F die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe X, G die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens S und r der Entlastungseffekt.

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ der Schadenhöhe des Rückversicherers unter einer Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität a und Haftung c an. (Zur Kontrolle empfehlenswert, aber nicht Teil der Aufgabe, ist es, den Erwartungswert

$$\int_0^\infty x d\tilde{F}(x)$$

mit dem erhaltenen $\tilde{F}$ zu berechnen.) (10 Punkte)

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $\tilde{G}$ des Gesamtschadens des Rückversicherers unter einer Stop-Loss-Rückversicherung mit Priorität b und Haftung h an. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie, daß ein linearer Verlauf von r in einem Intervall $[a_1, a_2]$ nur möglich ist, wenn keine Schadenhöhen zwischen a_1 und a_2 vorkommen können. (5 Punkte)

d) F sei eine Lognormalverteilung mit Erwartungswert EX = 6.000 und $\sigma = 1{,}8$. Berechnen Sie den Erwartungswert der bei a = 100.000 kupierten Schadenhöhe $\tilde{X} = \min(X, a)$. (10 Punkte)

Lösung:

a) Vom Originalschaden X trägt der Rückversicherer

$$\hat{X} = \begin{cases} 0 & \text{falls } X \le a, \\ X - a & \text{falls } a < X < a + c, \\ c & \text{falls } a + c \le X. \end{cases}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= P(\tilde{X} \le x \mid \tilde{X} > 0) = P(\tilde{X} \le x \mid X > a) \\ &= P(\tilde{X} \le x \text{ und } X > a) / P(X > a) \\ &= \begin{cases} \frac{F(a+x) - F(a)}{1 - F(a)} & \text{falls } 0 < x < c \\ 1 & \text{falls } x \ge c. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Für den Gesamtschaden $\tilde{S}$ des Rückversicherers gilt:

$$\tilde{S} = \begin{cases} 0 & \text{falls } S \le b, \\ S - b & \text{falls } b < S < b + h, \\ h & \text{falls } b + h \le S, \end{cases}$$

also

$$\tilde{G}(y) = \begin{cases} G(b) & \text{falls } y = 0, \\ G(b + y) & \text{falls } 0 < y < h, \\ 1 & \text{falls } h \le y. \end{cases}$$

c) Wegen

$$r(x) = E(\min(X, x)) / E(X) = \int_0^x (1 - F(t))\, dx / EX, \; x \ge 0,$$

ist

$$r'(x) = (1 - F(x))/E(X).$$

Wenn r linear in $[a_1, a_2]$ ist, so ist r' und damit auch F konstant in (a_1, a_2). Letzteres besagt aber gerade, daß zwischen a_1 und a_2 keine Schadenhöhen vorkommen können.

d)

$$\begin{aligned} E(\min(X, a)) &= \int_0^a x dF(x) + a(1 - F(a)) \\ &= EX - \int_a^\infty x dF(x) + a(1 - F(a)). \end{aligned}$$

Für die Lognormalverteilung $F(x) = \Lambda(x; \mu, \sigma) = \Phi((\ln(x) - \mu)/\sigma)$ (mit der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung) gilt lauf Formelsammlung

$$\int_a^\infty x dF(x) = E(X)\,(1 - \Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma)).$$

Wegen $E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ ist $\mu = \ln(E(X)) - \sigma^2/2 = 7{,}08$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} F(a) &= \Phi((\ln(a) - \mu)/\sigma) = \Phi(2{,}463) = 0{,}9931, \\ \Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma) &= \Phi((\ln(a) - \mu - \sigma^2)/\sigma) = \Phi(0{,}663) = 0{,}746, \\ E(\min(X, a)) &= E(X)\, \Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma) + a(1 - F(a)) \\ &= 4476 + 690 = 5166. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe

Erläutern Sie die Grundidee der Credibility Theorie und beschreiben Sie die Modelle 1) Bühlmann-Straub, 2) Credibility-Regression von Hachemeister und 3) hierarchisches Credibility Modell. In welcher Sparte wird eines dieser Modelle angewandt? (15 Punkte)

Lösung:

Credibility-Methoden werden angewandt, um den Schadenbedarf einzelner Versicherungsverträge aus der individuellen Schadenerfahrung (des einzelnen Vertrages) zu bestimmen. Hierbei wird die Datenbasis erweitert in Situationen, in denen – pro Vertrag – wenige Beobachtungen, aber viele gleichartige Verträge vorliegen. Dies geschieht durch Einbeziehung der Schadendaten aller Verträge in den Schätzer des individuellen Schadenbedarfes. Die Gleichartigkeit der Verträge wird in den Modellen 1) bis 3) unterschiedlich modelliert. In 1) bis 3) werden die Beobachtungen aus den Verträgen, gegeben gewisse nicht beobachtbare Risikoparameter $\theta = (\theta_j)$, als bedingt stochastisch unabhängig angenommen. In 1) und 3) erfüllen die Beobachtungen X_{ij} aus Vertrag j die Beziehung

$$E(X_{ij} \mid \theta) = \mu(\theta_j),$$
$$Var(X_{ij} \mid \theta) = \sigma^2(\theta_j)/v_{ij},$$

und in 2)

$$E(X_{ij} \mid \theta) = \sum_{k=1}^{r} y_{ijk}\, \beta_k(\theta_j),$$

$$Var(X_{ij} \mid \theta) = \sigma^2(\theta_j)/v_{ij}.$$

Hierbei sind v_{ij} Volumenmaße zur Beobachtung X_{ij}. In 1) und 2) sind $\theta_1, \theta_2, \ldots$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt, was die Unabhängigkeit der Verträge impliziert. In 3) besitzen die θ's selbst eine Credibility-Struktur: die Verträge sind gruppiert nach homogenen Kohorten, die jede einen eigenen Risikoparameter ψ_k besitzen, und die zu den Verträgen in der Kohorte k gehörenden Verträge sind, gegeben $\psi = (\psi_k)$, stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Die Kohortenparameter sind ihrerseits stochastisch unabhängig und identisch verteilt, was die Unabhängigkeit der Kohorten impliziert.
Nun zu den

Aufgaben des Jahres 1998:

Aufgabe 1 (Grundlagen)

1. Zeigen Sie, daß die Funktion
$$f(x) = (3/2)\exp(-x) - \exp(-2x)$$
die Dichte einer Phasentypverteilung ist, und geben Sie ihre Parameter an. (10 Punkte)
2. Für welche Schadenzahlverteilung kann man die Gesamtschadenverteilung im kollektiven Modell bei einer Phasentyp-Schadenhöhenverteilung explizit angeben? (15 Punkte)
3. Ist Gamma(1; 0,5) mit der Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-x), x > 0,$$
eine Phasentypverteilung? (5 Punkte)

Lösung:

1. Die Form der Dichte deutet darauf hin, daß die Verteilung aus den Exponentialverteilungen mit den Parametern 1 und 2 gebildet wurde. Die Faltung der beiden zugehörigen Dichten
$$\exp(-x) \quad \text{und} \quad 2\exp(-2x), x > 0,$$
ist
$$g(x) = 2(\exp(-x) - \exp(-2x)), x > 0,$$

und das ergibt, gemischt mit $h(x) = \exp(-x)$, die gegebene Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} h(x).$$

Somit ist $f(x)$ die Dichte einer Phasentypverteilung mit Startvektor $\pi = (1/2, 1/2)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(mit Wahrscheinlichkeit 1/2 startet man in Zustand 1 und geht dann über Zustand 2 zum absorbierenden Zustand 0.)

2. Ist die Schadenanzahl geometrisch verteilt, so ist bei einer Phasentyp-Schadenhöhenverteilung auch die Gesamtschadenverteilung phasentyp und ihre Verteilung explizit angebbar. Dasselbe gilt auch für Faltungen geometrischer Verteilungen, also insbesondere für negative Binominalverteilungen mit ganzzahligen Parameter *r*. Dies beruht darauf, daß für Summenverteilungen $SV(Q, R)$ mit Schadenhöhenverteilung Q und Schadenanzahlverteilung R

$$SV(Q, R_1 * \ldots R_n) = SV(Q, R_1) * \ldots * SV(Q, R_n)$$

gilt und darauf, daß Faltungen von Phasentypverteilungen wieder phasentyp sind.

3. Phasentypverteilungen haben eine rationale momenterzeugende Funktion. Die momenterzeugende Funktion der angegebenen Verteilung ist

$$MEF(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{1/2}, \quad t < 1$$

und diese Funktion ist nicht rational.

Aufgabe 2 (Solvabilität)

1. Welche Verteilungsklasse benutzt man zur Großschadenmodellierung, und welche Auswirkung haben Großschäden auf die Ruinwahrscheinlichkeit? (8 Punkte)
2. Sei Q eine Schadenhöhenverteilung derart, daß für $t > 1000$

$$Q(t, \infty) = \frac{1}{t^2}.$$

Bestimmen Sie die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell mit den Parametern $\lambda = 1$ (Intensität), $c = 2$ (Prämie), und $\mu = 1$ (mittlere Schadenhöhe). (15 Punkte)
3. Welche Großschadenverteilung ist die gefährlichere, die Lognormalverteilung oder die Paretoverteilung? Begründen Sie Ihre Antwort. (7 Punkte)

Lösung:

1. Man benutzt als Schadenhöhenverteilungen subexponentielle Verteilungen wie die Loggamma-Verteilungen, die Lognormalverteilungen oder die Weibullverteilungen mit Formparameter $\beta < 1$. Eine subexponentielle Schadenhöhe hat Einfluß auf das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell: statt der Cramer-Lundberg-Asymptotik

$$\psi(s) \sim C \exp(-Rs), \; s \to \infty,$$

die für Kleinschäden gilt, ist

$$\psi(s) \sim \frac{p}{1-p} H(s, \infty), \quad s \to \infty. \tag{0.2}$$

Hierbei ist $\psi(s)$ die Ruinwahrscheinlichkeit bei Startkapital s, Schadenhöhenverteilung Q, Prämie c und Schadenintensität λ. Die Zahl $R > 0$ ist der Anpassungskoeffizient des Problems (Q, c, λ), und $0 \le C < 1$ eine Konstante, die von R und Q abhängt. Ferner ist

$$p = \lambda\mu(Q)/c \quad \text{und}$$

$$dH(x) = \frac{1}{\mu(Q)} Q(x, \infty), \; x > 0.$$

Die Beziehung (0.2) gilt immer dann, wenn H subexponentiell ist, und dies ist wahr für die oben angegebenen Schadenhöhenverteilungen Q. Für subexponentielle Verteilungen existiert kein Anpassungskoeffizient, und die Beziehung (0.2) zeigt, daß die Ruinwahrscheinlichkeit nicht mehr exponentiell gegen Null konvergiert.

2. In dieser Situation ist mit den Bezeichnungen aus Teil 1

$$p = \frac{1}{2},$$

und für $s > 1000$

$$H(s, \infty) = \int_s^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{s}.$$

Damit wird

$$\psi(s) \sim \frac{1}{s}.$$

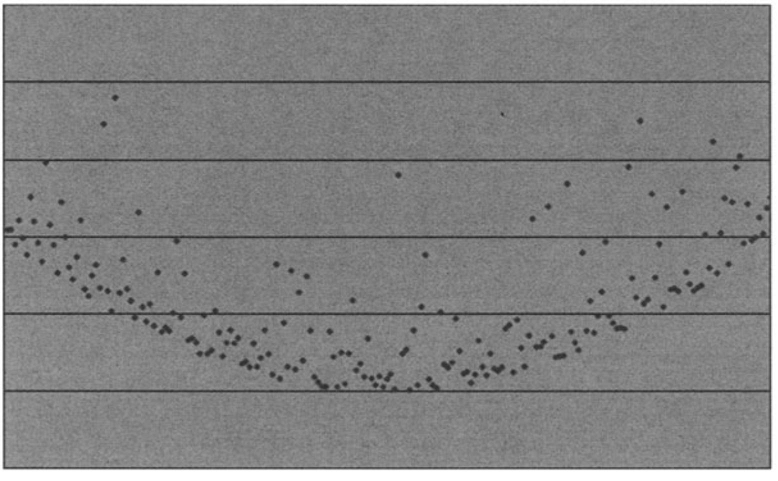
3. Die Paretoverteilung ist die gefährliche Verteilung. Während bei der Lognormalverteilung $LN(\mu, \sigma)$ alle Momente endlich sind, ist das bei der Pareto(a)-Verteilung nur für Momente der Ordnung < a der Fall. Ferner gilt für eine Lognormalverteilung P_1 und eine Paretoverteilung P_2

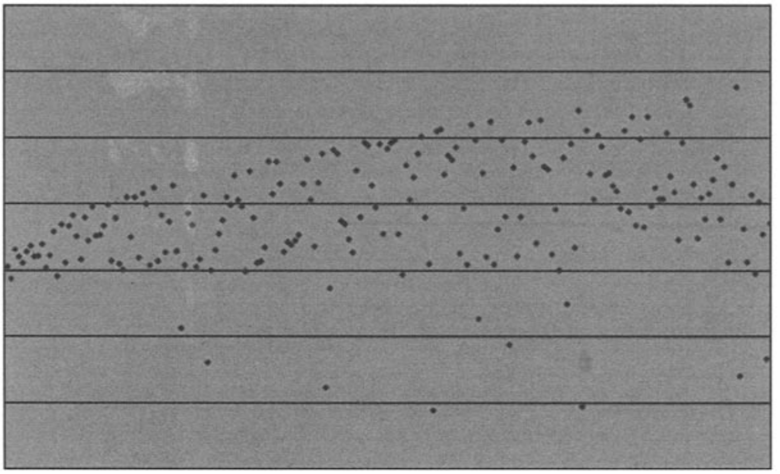
$$\lim_{t \to \infty} \frac{P_1(t, \infty)}{P_2(t, \infty)} = \lim_{t \to \infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)}{t^{-a}} = 0.$$

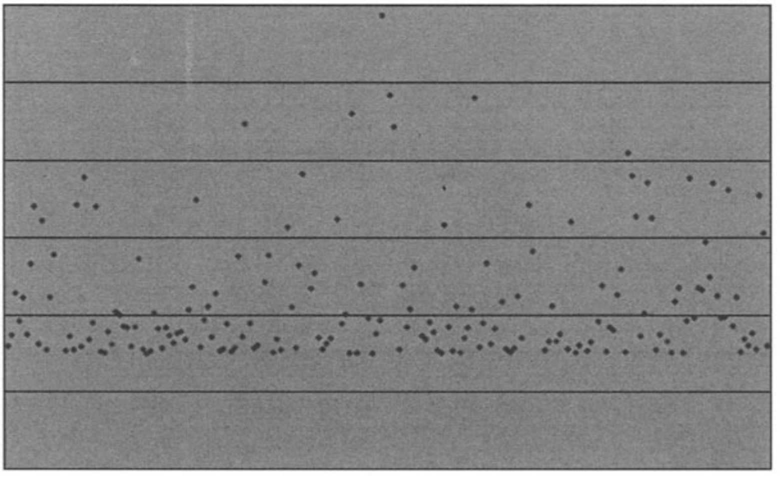
Die Teilwahrscheinlichkeiten der Paretoverteilung sind demnach für große Argumente deutlich größer als die Tailwahrscheinlichkeiten der Lognormalverteilung. Dies gilt unabhängig von den vorliegenden Parametern μ, σ und a.

Aufgabe 3 (Tarifkalkulation 1)

Nach der statistischen Analyse für den mittleren Schadenbedarf inhomogener Risiken mit Hilfe linearer Modelle haben Sie folgende Residuenplots erhalten. Interpretieren Sie diese, und geben Sie mögliche Konsequenzen Ihrer Analyse an. (Pro Fall 10 Punkte)







Lösung:

1. Plot: Gleichgültig, welche Variable z auf der horizontalen Achse dargestellt ist: das Modell erfaßt nicht die gesamte in den Daten enthaltene Struktur. Wenn man eine weitere erklärende Variable der Form f(z) mit einer Parabel oder einem Polynom höheren Grades für f berücksichtigt, dann werden Residuen entstehen, welche die jetzt sichtbare Struktur nicht mehr aufweisen.

2. Plot: Auf der vertikalen Achse sind die Residuen, auf der horizontalen Achse der geschätzte Schadenbedarf dargestellt. Es fällt auf, daß die Residuen für große Werte des geschätzten Schadenbedarfs weiter streuen als bei kleinen Werten. Dies deutet darauf hin, daß in dem Modell nicht mit der richtigen Varianzfunktion gearbeitet wurde. Zumindest ist sichtbar, daß die konstante Varianzfunktion, welche man im linearen Modell annimmt, mit den Daten nicht im Einklang steht. Ein GLM-Ansatz mit einer linearen Varianzfunktion scheint angebracht.

3. Plot: Die Residuen, welche auf der vertikalen Achse abgetragen sind, erscheinen nach unten beschränkt. Dies ist bei symmetrisch verteilten Residuen nicht der Fall. Es kann vorkommen, wenn die Residuen selbst nach unten beschränkt sind, wie z. B. bei gammaverteilten Zufallskomponenten. Man

sollte hier ein Histogramm der Residuen plotten, um zu erkennen, welche Verteilung die Residuen besitzen, und danach ein für diese Verteilung geeignetes Verallgemeinertes Lineares Modell aufstellen.

Aufgabe 4 (Tarifkalkulation 2)

Zur Modellierung des Schadenbedarfs mehrerer kreuzklassifizierter Tarifgruppen wird häufig ein Verallgemeinertes Modell (GLM) mit gammaverteilter Zufallskomponente und logarithmischer Linkfunktion verwendet.

1. Wieso ist die Gammaverteilung ein a priori in Betracht kommendes Modell für die Verteilung des Schadenbedarfs einer homogenen Tarifgruppe? (7 Punkte)
2. Die zur Gammaverteilung gehörende kanonische (natürliche) Linkfunktion ist $g(\mu) = 1/\mu$. Wieso wird in der Praxis dennoch meistens die log-Linkfunktion vorgezogen? (5 Punkte)
3. Als Ergebnis für obiges Modell liefert eine GLM-Software für den Schadenbedarf Z_i jeder Tarifgruppe i üblicherweise folgende Angaben:
   - das Volumen v_i (Eingabewert)
   - den beobachteten Schadenbedarf z_i (Eingabewert)
   - den ML-Schätzer $\hat{\mu}_i$ für den ausgeglichenen Schadenbedarf $\mu_i = E(Z_i)$
   - den ML-Schätzer $\hat{y}_i$ für den linearen Prädiktor $y_i = \ln(\mu_i)$
   - dessen Standardfehler s.e. $(\hat{y}_i) = \hat{\sigma}_i$
   - den in allen Tarifgruppen gleichen Skalierungsparameter $\hat{\alpha}$.

   Geben Sie anhand dieser Informationen einen Schätzer für den Variationskoeffizienten $\mathrm{Vko}(Z_i)$ des Zufallsfehlers und einen Schätzer für den Variationskoeffizienten $\mathrm{Vko}(\hat{\mu}_i)$ des Schätzfehlers an. (Hinweis: Benutzen Sie für $\mathrm{Vko}(\hat{\mu}_i)$ die asymptotische Verteilung von $\hat{y}_i$.) (18 Punkte)

Lösung:

1. Die Gamma-Verteilung ist bereits für den Jahresgesamtschaden eines Einzelrisikos ein zwar noch grobes, aber doch akzeptables Modell, da sie dessen wichtigsten Merkmale
   - Definitionsbereich $(0, \infty)$,
   - viel Wahrscheinlichkeitsmasse nahe bei 0,
   - stark rechtsschiefe Verteilung

   annähern kann (für kleines α). Der Gesamtschaden einer homogenen Gruppe unabhängiger solcher Risiken ist dann wieder gammaverteilt, wobei sich die Grobheiten reduzieren. Auch beim Übergang auf den volumenbezogenen Schadenbedarf bleibt die Gammaverteilung erhalten und stellt daher insgesamt ein a priori geeignetes Modell dar.
2. Der log-Link führt zu einer multiplikativen Tarifstruktur, denn beispielsweise bei zwei Tarifmerkmalen ist der lineare GLM-Ansatz

   $$\ln(E(Z_{i,k})) = \mu + \alpha_i + \beta_k$$

   äquivalent zu

   $$E(Z_{i,k}) = \exp(\mu) \times \exp(\alpha_i) \times \exp(\beta_k),$$

   wobei die Nettoprämie gerade multiplikativ von je einem Faktor pro Merkmal abhängt. Eine solche multiplikative Tarifstruktur ist erstrebenswert zum Erreichen einer Tariforganik, d.h. die Auswirkung einer Merkmalsausprägung ist in allen Tarifgruppen durch einen einheitlichen prozentualen Zu- oder Abschlag von der Grundprämie gegeben. Bei inverser Linkfunktion

   $$(E(Z_{i,k}))^{-1} = \mu + \alpha_i + \beta_k$$

   ergäbe sich keine multiplikative Tarifstruktur.
3. Der Gesamtschaden eines Einzelrisikos von Tarifgruppe i hat laut Teil 1 eine Gammaverteilung mit Erwartungswert μ_i, d.h. gemäß Formelsammlung beträgt die Varianz μ_i^2/α. Der Gesamtschaden S_i von v_i unabhängigen solchen Risiken hat also Erwartungswert $v_i\mu_i$ und Varianz $v_i\mu_i^2/\alpha$.

Der Schadenbedarf $Z_i = S_i/v_i$ der Tarifgruppe i hat dann Erwartungswert μ_i und Varianz $\mu_i^2/(v_i\alpha)$, d.h. Variationskoeffizient $\text{Vko}(Z_i) = (v_i\alpha)^{-1/2}$, was mit Hilfe des Schätzers für α geschätzt werden kann. $\hat{y}_i$ ist als ML-Schätzer asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(\mu_i)$ und Varianz σ_i^2. Daher ist $\hat{\mu}_i = \exp(\hat{y}_i)$ lognormalverteilt mit (laut Formelsammlung) $\text{Vko}(\hat{\mu}_i) = \sqrt{\exp(\sigma_i^2) - 1} \approx \sigma_i$ falls $\sigma_i \ll 1$. Auch hier braucht man nur noch den Schätzer für σ_i einzusetzen.

Aufgabe 5 (Schadenreservierung)

1. Welches stochastische Modell für den kumulierten Schadenstand $C_{i,k}$ von Anfalljahr i nach k Entwicklungsjahren liegt dem Chain-Ladder-Verfahren zugrunde? Zeigen Sie, daß in diesem Modell zwei aufeinanderfolgende Einzel-Abwicklungsfaktoren $C_{i,k}/C_{i,k-1}$ und $C_{i,k+1}/C_{i,k}$ unkorreliert sind. (12 Punkte)

2. Wendet man das Credibilitymodell von Bühlmann-Straub auf die Anfalljahre eines Abwicklungsdreiecks der Schadenzahlungszuwächse an, so erhält man den Credibility-Reserveschätzer

$$\hat{R}_i(c_i) = (1 - w_i)\,(c_i C_{i,n+1-i}/w_i + (1 - c_i)\, v_i q_i),$$

wobei

v_i = Volumen des Anfalljahres i
$C_{i,n+1-i}$ = aktueller kumulierter Schadenstand des Anfalljahres i
q_i = a priori erwartete Endschadenquote $E(C_{i,n}/v_i)$
w_i = a priori erwarteter Anteil $C_{i,n+1-i}/C_{i,n}$ des nach $n + 1 - i$ Entwicklungsjahren bereits bezahlten Schadenbetrags
c_i = Credibility Faktor.

Geben Sie drei verschiedene Werte für c_i an, für die $\hat{R}_i(c_i)$ jeweils mit der Reserve einer bekannten Schadenreservierungsmethode übereinstimmt. Nennen Sie die sich jeweils ergebende Methode, und erläutern Sie für jeden der drei Werte von c_i, in welcher Situation die betreffende Wahl sinnvoll ist. (18 Punkte)

Lösung:

1. Das Chain-Ladder Modell lautet

$$E(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = f_k C_{ik}, \quad 1 \le k \le n-1,$$

mit unbekannten Parametern $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Für $C_{i,k} > 0$ folgt daraus

$$E(C_{i,k+1}/C_{i,k} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = f_k \text{ und somit}$$

$$E(C_{i,k+1}/C_{i,k}) = f_k.$$

Ebenso ist

$$E(C_{i,k}/C_{i,k-1}) = f_{k-1}.$$

Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned} E\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right) &= E\left[E\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \,\middle|\, C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}\right)\right] \\ &= E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \,\middle|\, C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}\right)\right] \\ &= E\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} f_k\right) = E\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right) E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right), \end{aligned}$$

was gerade die Bedingung der Unkorreliertheit ist.

2. Die drei Werte für c_i sind 0, 1 und w_i. Die resultierenden Reservierungsmethoden sind:

$$\hat{R}_i(0) = (1 - w_i)\, v_i q_i = \text{Bornhutter-Ferguson-Reserve},$$
$$\hat{R}_i(0) = (1 - w_i)\, C_{i,n+1-i}/w_i = C_{i,n+1-i}/w_i - C_{n+1-i}$$
$$= \text{Chain-Ladder-Reserve}$$

mit

$$\frac{1}{w_i} = \hat{f}_{n+1-i} \times \ldots \times \hat{f}_{n-1}$$

(Produkt der Schätzer der Abwicklungsfaktoren),

$$\hat{R}_i(w_i) = (1 - w_i)\,(C_{i,n+1-i} + (1 - w_i)\, v_i q_i)$$
$$= \text{Benktander/Hovinen/Neuhaus-Reserve}.$$

In $\hat{R}_i(c_i)$ kommen mit $C_{i,n+1-i}/w_i$ und $v_i q_i$ zwei verschiedene Schätzer für den Schadenendstand von Anfalljahr i vor: Der erste ist eine Hochrechnung aus dem aktuellen Schadenstand und basiert entscheidend darauf, daß der aktuelle Stand tatsächlich den Anteil w_i am Endstand ausmacht. Der zweite Endstandschätzer beruht ausschließlich aus der a-priori Einschätzung des Anfalljahres und ignoriert den aktuellen Schadenstand völlig. Diese beiden sehr unterschiedlichen Endschadenschätzer werden durch den Credibility-Faktor c_i zu einem gewichteten Mittel zusammengefaßt. Der Faktor $1 - w_i$ ergibt lediglich den Übergang vom Endstandschätzer zur Reserve.

$c_i = 0$ gibt dem hochgerechneten Endschätzer keinerlei Gewicht bzw. Glaubwürdigkeit. Dies ist nur sinnvoll, wenn der bisherige Schadenstand $C_{i,n+1-i}$ falsche Hinweise auf die weitere Schadenentwicklung gibt, d.h. insbesondere bei $C_{i,n+1-i} = 0$. Enthält $C_{i,n+1-i}$ dagegen einen unerwarteten Großschaden, so ist es besser, diesen zu stutzen und das derart modifizierte $C_{i,n+1-i}$ hochzurechnen als $c_i = 0$ zu setzen. Auch eine deutlich schnellere (bzw. langsamere) Abwicklung als erwartet gibt keinen Anlaß zu $c_i = 0$, sondern zu einer Änderung der w_i.

$c_i = 1$ vertraut nur dem hochgerechneten Endstandschätzer und gibt dem a-priori Schätzer $v_i q_i$ keinerlei Gewicht. Dies ist sinnvoll, wenn die Schäden des Anfalljahrs schon als weitgehend gemeldet angesehen werden und klar ist, daß die Annahmen, die in $v_i q_i$ stecken, sich als falsch erwiesen haben. Enthält $C_{i,n+1-i}$ einen unerwarteten Großschaden, so sollte dieser gestutzt werden.

$c_i = w_i$ ist ein fast immer sinnvoller Wert für die Gewichtung der beiden o.a. Endstandschätzer, da die w_i genau in dem Maße von 0 auf 1 wachsen, wie sich der akkumulierte Schadenstand $C_{i,n+1-i}$ seinem Endstand nähert (zumindest solange die w_i für zutreffend gehalten werden), d.h. der aktuelle Schadenstand erhält umso mehr Gewicht, je näher er seinem Endstand kommt. Enthält $C_{i,n+1-i}$ einen unerwarteten Großschaden, so sollte dieser gestutzt werden.

Aufgabe 6 (Risikoteilung)

1. Das Portefeuille eines Erstversicherers bestehe aus m Risiken $i = 1, \ldots, m$ mit Versicherungssumme u_i und werde im Laufe eines Jahres von den Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ betroffen, wobei Schaden X_n Risiko $i(n)$ betrifft.
   a) Geben Sie den Selbstbehalts-Gesamtschaden $S_1(a)$ des Erstversicherers unter einer unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität a an.
   b) Geben Sie den Selbstbehalts-Gesamtschaden $S_2(b)$ des Erstversicherers unter einer unlimitierten Summenexzedenten-Rückversicherung mit Maximum b an.
   c) Sei nun $0 < b < \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ sowie $X_n = u_{i(n)}$ für alle n, d.h. jeder Schaden ist ein Totalschaden (z.B. Unfalltodversicherung). Für welche Werte von a gilt $S_1(a) < S_2(b)$? (10 Punkte)
2. Der Gesamtschaden S sei diskret auf den natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ verteilt mit $P(S \le 10) = 0{,}77$. Außerdem sei $Q_S(10) = 0{,}85$, wobei $Q_S(t)$ die Schadenerwartung des Rückversicherers unter einer unlimitierten Stop-Loss-Rückversicherung mit Priorität t bezeichnet. Berechnen Sie $Q_S(11)$. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst $Q_S(10) - Q_S(11)$.) (10 Punkte)

3. Erstversicherer EV und Rückversicherer RV vereinbaren folgende Teilung des Gesamtschadens S von EV („inverser Stop Loss"): Der vom RV zu bezahlende Betrag R sei (mit $0 < a < b < \infty$)

$$\begin{array}{ll} S - b & \text{falls } S > b \\ 0 & \text{falls } a \le S \le b, \\ -(a - S) & \text{falls } S < a \text{ (d.h. RV erhält den Betrag } a - S \text{ vom EV).} \end{array}$$

Sie haben für die Ihnen bekannte Verteilungsfunktion $G(s) = P(S \le s)$ ein PC-Computerprogramm zur Berechnung der Stop-Loss-Schadenerwartung

$$Q_S(t) = E[\max(S - t, 0)]$$

für beliebige Prioritäten $t \ge 0$. Drücken Sie $E(R)$ ausschließlich mit Hilfe von Q, a und b aus. (10 Punkte)

Lösung:

1. a)

$$S_1(a) = \sum_{n=1}^{N} \min(a, X_n).$$

b)

$$S_2(b) = \sum_{n=1}^{N} \min\left(\frac{b}{u_{i(n)}}, 1\right) X_n.$$

c)

$$X_n = u_{i(n)} \Rightarrow S_2(b) = \sum_{n=1}^{N} \min(b, X_n) = S_1(b).$$

$S_1(a)$ ist streng monoton wachsend in $[0; \max\{X_1, \ldots, X_N\})$, daher gilt $S_1(a) < S_2(b)$ genau für alle $a < b$.

2. Mit $g_n = P(S = n)$ ist

$$Q_S(10) = \sum_{n=10}^{\infty} (n - 10)\, g_n = \sum_{n=11}^{\infty} (n - 10)\, g_n,$$

$$\begin{aligned} Q_S(10) - Q_S(11) &= \sum_{n=11}^{\infty} (n - 10)\, g_n - \sum_{n=11}^{\infty} (n - 11)\, g_n \\ &= (11 - 10) \sum_{n=11}^{\infty} g_n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{10} g_n = 0{,}23, \end{aligned}$$

$$Q_S(11) = Q_S(10) - 0{,}23 = 0{,}62.$$

3.

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_0^a (s - a)\, dG(s) + \int_b^\infty (s - b)\, dG(s) \\ &= \int_0^\infty (s - a)\, dG(s) - \int_a^\infty (s - a)\, dG(s) + Q_S(b) \\ &= Q_S(0) - a - Q_S(a) + Q_S(b) \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe

1. Beschreiben Sie die gebräuchlichen Berechnungsverfahren für die Gesamtschadenverteilung im kollektiven Modell, bei dem die Schadenanzahl negativ binominalverteilt ist und die Schadenhöhe a) eine Dichte besitzt oder b) auf den Zahlen 1, 2, 3... konzentriert ist. (8 Punkte)
2. Betrachten Sie im obigen Fall a) die Berücksichtigung einer Selbstbeteiligung (also einer Entschädigung für einen Schaden der Höhe X in Höhe von $\max(X - M, 0)$). Wie ändert sich die Schadenanzahl- und die Schadenhöhenverteilung? (7 Punkte)
3. Wie kann man im Fall a) die Vereinbarung eines Limits (also eine Entschädigung für einen Schaden X in Höhe von $\min(X, L)$) berücksichtigen? Wie kann man insbesondere mit dem Problem umgehen, daß die Gesamtschadenverteilung weder diskret noch stetig ist? (15 Punkte)

Lösung:

1. Im Falle von a) wird die Rekursionsformel für Dichten angewendet:

$$f(x) = p_1\, g(x) + \int_0^x \left(a + b\,\frac{y}{x}\right) g(y)\, f(x-y)\, dy,$$

wobei $f(x)$ die Dichte der Gesamtschadenverteilung rechts von der Null ist, $g(x)$ die Dichte der Schadenhöhe, $p_1 = rp(1-p)^r$, $a = p$, $b = (r-1)p$. Startwert ist $f(0) = p_1 g(0)$. Im Fall b) lautet die Rekursionsformel

$$P\{k+1\} = \sum_{j=1}^{k+1} \left(a + b\,\frac{j}{k+1}\right) Q\{j\}\, P\{k+1-j\},$$

mit denselben Werten für a und b, der Startwert ist $P\{0\} = (1-p)^r$.

2. Sei $q = P(X \le M)$. Die neue Schadenhöhenverteilung hat die Dichte $g(x+M)/(1-q)$, $x > 0$. Die neue Schadenzahlverteilung ist wieder eine negative Binominalverteilung mit Parametern r und

$$p' = \frac{pq}{1-p+pq}.$$

Dies sieht man folgendermaßen: Die neue Schadenzahl N' ergibt sich aus der alten Schadenzahl N und den Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ durch

$$N' = \sum_{i=1}^{N} 1_{(X_i > M)},$$

und diese hat wegen der Unabhängigkeit der Schadenhöhen und der Schadenanzahl die erzeugende Funktion

$$\left(\frac{1-p}{1-p(1-q+qz)}\right)^r = \left(\frac{1-p}{1-p+pq-pqz}\right)^r = \left(\frac{1-p'}{1-p'z}\right)^r.$$

Dies ist die erzeugende Funktion der negativen Binomialverteilung mit Parametern r und p'.

3. Die Entschädigung $\min(X, L)$ hat im Intervall $(0, L)$ die Dichte $g(x)$ von X und in L die Punktmasse $w := P(X \ge L)$. Die Gesamtschadenverteilung hat dann positive Masse q_k auf den Punkten kL, $k = 0, 1, 2, \ldots$, und zwischen diesen Punkten hat sie eine Dichte $f(x)$.

   1. Für die *Poissonverteilung:* Ist die Schadenanzahl Poisson-verteilt mit Parameter λ, dann kann man die Gesamtschadenverteilung P als Faltung zweier Poissonscher Summenverteilungen schreiben:

   $$P = PSV(\lambda(1-w), Q_1) * PSV(\lambda w, \delta_L).$$

   Hierbei ist Q_1 die Verteilung auf $(0, L)$ mit Dichte $g(x)/w$, und δ_L ist die Verteilung mit Masse 1 im Punkte L. Beide Verteilungen sind mit den üblichen Verfahren zu berechnen, und die Faltung ist wenig rechenintensiv.

2. Für die *geometrische Verteilung:* Die Gesamtschadenverteilung P kann man schreiben als Konvexkombination
$$P = \alpha P_1 + (1-\alpha)\,P_2,$$
wobei P_1 die Dichte $f(x)/\alpha$ und P_2 die Punktwahrscheinlichkeiten $P_2\{kL\} = q_k/(1-\alpha)$ besitzt. Die Verteilung Q von $\min(X, L)$ kann man ebenso schreiben:
$$Q = (1-w)\,Q_1 + w\delta_L.$$
Mit
$$P = \sum_{n=0}^{\infty} p^n (1-p)\,Q^{*n} = (1-p)\,\delta_0 + p(P * Q)$$
ergibt sich
$$\begin{aligned}&\alpha P_1 + (1-\alpha)\,P_2\\ &= (1-p)\,\delta_0 + p\,\{\alpha(1-w)\,P_1 * Q_1 + \alpha w P_1 * \delta_L\\ &\quad + (1-\alpha)\,(1-w)\,P_2 * Q_1 + (1-\alpha)\,wP_2 * \delta_L\}.\end{aligned}$$
Weil sich Punktmassen auf der rechten und linken Seite dieser Gleichung entsprechen müssen, gilt
$$(1-\alpha)\,P_2 = (1-p)\,\delta_0 + p\,(1-\alpha)\,wP_2 * \delta_L$$
sowie
$$\alpha P_1 = p\,\{\alpha(1-w)\,P_1 * Q_1 + \alpha w P_1 * \delta_L + (1-\alpha)\,(1-w)\,P_2 * Q_1\},$$
Aus der ersten Gleichung erhält man
$$p_k = (pw)^k\,(1-p),$$
und für die Dichte $f(x)$ im Intervall $(mL, (m+1)L)$ erhält man die Beziehung
$$f(x) = p \int_0^{\min(x,L)} g(y)\,f(x-y)\,dy + pw\,f(x-L) + pq_m\,g(x-mL).$$
Damit kann man die Dichte von P rekursiv berechnen.
Die beiden Spezialfälle a) und b) wurden als vollständige Lösungen der Aufgabe gewertet. Der allgemeine Fall ist für eine Klausur zu aufwendig, er wird aber der Vollständigkeit halber ebenfalls dargestellt.

3. Der *allgemeine Fall:* Wir zerlegen die Gesamtschadenverteilung P wie in b) in den Teil mit Dichte $f(x)$ und den diskreten Teil mit Punktwahrscheinlichkeiten q_k in den Punkten kL, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Die Punktwahrscheinlichkeiten sind
$$q_k = w^k p_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$
wobei p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Punktwahrscheinlichkeiten der Schadenzahlverteilung sind. Für die Berechnung der Dichte $f(x)$ zwischen den Massepunkten mL und $(m+1)\,L$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ benötigt man eine Rekursionsformel, die für beliebige Schadenhöhenverteilungen gilt. Eine solche erhält man für die Verteilungsfunktion $F(x)$ des Gesamtschadens:
$$F(u) = p_0 + \int_0^u \int_0^{u-v} \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) dG(y)\,dF(v), \tag{0.3}$$
wobei $G(y)$ die Verteilungsfunktion der Schadenhöhenverteilung Q ist. Dies folgt mit Integration der Rekursionsformel für Dichten:
$$f(x) = p_1\,g(x) + \int_0^x g_0(y)\left(a + b\,\frac{y}{x}\right) f(x-y)\,dy.$$
Die Funktion $f(x)$ ist in dieser Gleichung die Dichte zu $F(x)$ rechts von der Null, $g_0(x)$ ist die Dichte der Schadenhöhenverteilung Q_0, und $p_0, p_1, \ldots$ sind die Punktwahrscheinlichkeiten der

Schadenanzahl, für welche die Rekursion

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt. Für u > 0 erhält man

$$F(u) = p_0 + p_1 G_0(u) + \int_0^u \int_0^x g_0(y) \left(a + b\,\frac{y}{x}\right) f(x-y)\,dy\,dx,$$

oder, nach der Substitution v = x – y

$$F(u) = p_0 + p_1 G_0(u) + \int_0^u \int_0^{u-v} g_0(y) \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) f(v)\,dy\,dv. \tag{0.4}$$

Wegen $p_1 = (a + b)\,p_0$ und $P\{0\} = p_0$ ist dies dasselbe wie (0.3). Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Integralgleichung nicht nur für Schadenhöhenverteilungen Q_0 mit Dichte $g_0(x)$, sondern für beliebige Verteilungen Q. Beim inneren Integral in (0.3) setzen wir nun die Verteilung Q von $\min(X, L)$ ein:

$$\int_0^{u-v} \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) dG(y) = \int_0^{\min(u-v,L)} \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) g(y)\,dy + \left(a + b\,\frac{L}{L+v}\right) w\,1_{(u-v>L)}\,.$$

Somit erhalten wir für u < L

$$\begin{aligned}F(u) &= p_0 + \int_0^u \int_0^{u-v} \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) g(y)\,dy\, f(v)\,dv \\ &\quad + q_0 (a+b) \int_0^u g(y)\,dy \\ &= p_0 + q_1 \int_0^u g(y)\,dy + \int_0^u \int_0^x \left(a + b\,\frac{y}{x}\right) g(y)\, f(x-y)\,dy\,dx\end{aligned}$$

und damit für x < L

$$f(x) = q_1\, g(x) + \int_0^x \left(a + b\,\frac{y}{x}\right) g(y)\, f(x-y)\,dy,$$

die klassische Rekursionsformel für Dichten. Für m > 0 und mL < x, u < (m + 1) L enthält die Rekursionsformel zusätzliche Terme:

$$\begin{aligned}F(u) &= p_0 + \int_0^u \int_0^{\min(u-v,L)} \left(a + b\,\frac{y}{y+v}\right) g(y)\,dy\, f(v)\,dv \\ &\quad + \int_0^{u-L} \left(a + b\,\frac{L}{L+v}\right) w\, f(v)\,dv \\ &\quad + q_m \int_0^{u-mL} \left(a + b\,\frac{y}{y+mL}\right) g(y)\,dy \\ &\quad + \sum_{kL<u-L} q_k \left(\int_0^L \left(a + b\,\frac{y}{y+kL}\right) g(y)\,dy + \left(a + \frac{bL}{L+kL}\right) w\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^u \int_0^{\min(u-v,L)} \left(a + b \frac{y}{y+v}\right) g(y)\, dy\, f(v)\, dv$$
$$= \int_0^u \int_0^{\min(x,L)} \left(a + b \frac{y}{x}\right) g(y)\, f(x-y)\, dy dx$$

ist daher

$$f(x) = \int_0^{\min(x,L)} \left(a + b \frac{y}{x}\right) g(y)\, f(x-y)\, dy$$
$$+ \left(a + b \frac{L}{x}\right) w\, f(x-L)$$
$$+ q_m \left(a + b \frac{x-mL}{x}\right) g(x-mL).$$

Dies ist die Rekursionsformel, mit der man die „Dichte" $f(x)$ von P zwischen den Punkten mit positiver Masse berechnen kann.