Klausur zur Mathematik der Schadenversicherung, Spezialwissen Oktober 2007

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

Wieder sind sieben Aufgabe gestellt, und jede ist mit einer maximalen Punktzahl gekennzeichnet. Insgesamt sind 180 Punkte zu erreichen, und mit 72 Punkten wird die Klausur als bestanden bewertet. Die Zusatzaufgabe wird nur gewertet, wenn eine andere Aufgabe nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet wurde.

1 Aufgabe zum Grundwissen (30 Punkte)

Eine diskrete Phasentyp-Verteilung wird dargestellt durch eine homogene Markov-Kette auf einem Zustandsraum $\{0, ..., I\}$ mit Startvektor $p = (p_0, ..., p_I)$ und Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})_{i,j=0,...,I}$, bei der der Zustand 0 schließlich absorbierend ist. Sei $0 < q < 1$.

1. Welche Verteilung wird durch $I = 1, p = (0, 1)$ und

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

   dargestellt? Wie verändert sich die Verteilung, wenn man p zu $p = (1-q, q)$ abändert? (10 Punkte)

2. Geben Sie eine Darstellung, also I, p und Q an für die Verteilung mit Punktwahrscheinlichkeiten

$$NBin(2, q)\{k\} = (k+1)q^k(1-q)^2, k = 0, 1, 2, ...$$

   (20 Punkte)

Tip zu 2.: Die Darstellung ist möglich mit $I = 2$ und

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q \\ 1-q & 0 & q \end{pmatrix}$$

und mit einem Startvektor $p \neq (0, 1, 0)$.

Lösung:

1. Die Markov-Kette startet in Zustand 1, sie kehrt so oft wieder in diesen Zustand zurück, bis sie im absorbierenden Zustand 0 landet. Wenn sie $n-$mal nach 1 zurückkehrt und dann nach 0 springt, ist die Zahl der Schritte bis zur Absorbierung $n+1$, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $(1-p)p^n$. Somit hat die Verteilung P_1 der Wartezeit bis zur Absorbierung die Punktwahrscheinlichkeiten $p^{n-1}(1-p), n = 1, 2, ...$ Die Verteilung P_1 ist die um 1 nach rechts verschobene geometrische Verteilung.

2. Ist P_1 die Verteilung aus Teil (1), dann hat die gesuchte Verteilung P die Darstellung
$$P = (1-p)\delta_0 + pP_1,$$
wobei δ_0 das Dirac-Maß im Punkte 0 ist. Somit hat P die Punktwahrscheinlichkeiten $(1-p)p^n, n = 0, 1, 2, ...$ und ist damit die geometrische Verteilung mit Parameter p.

3. Mit dem gegebenen Tip muss nur noch ein geeigneter Startvektor $p = (p_0, p_1, p_2)$ angegeben werden. Die Punktwahrscheinlichkeit von $NBin(2, q)$ in der Null ist $(1-q)^2$, und dies muss das gesuchte p_0 sein. Die Punktwahrscheinlichkeit im Punkte Eins ist $2q(1-q)^2$, und dies muss $p_2(1-q)$ sein, also $p_2 = 2q(1-q)$. Damit wird $p_1 = 1-p_0-p_2$ festgelegt zu $p_1 = q^2$. Die mit dem Startvektor $p_0, p_1, p_2)$ erzeugte diskrete Phasentyp-Verteilung hat die Darstellung
$$p_0\delta_0 + p_1P_1^{*2} + p_2P_1,$$
und mit den berechneten Werten für p_0, p_1, p_2 ist dies
$$(1-q)^2\delta_0 + 2q(1-q)P_1 + q^2P_1^{*2} = ((1-p)\delta_0 + pP_1)^{*2} = P^{*2} = NBin(2, q).$$

2 Aufgabe zur Solvabilität (30 Punkte)

Die Risiken X und Y seien stochastisch unabhängig mit der Verteilung Pareto(a), also mit Dichte

$$x \longrightarrow ax^{-a-1}, x > 1.$$

1. Zeigen Sie, dass für $a > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{X+Y > 2t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = 2^{-a+1}.$$

   Was bedeutet dies für den Value at Risk der Risiken X bzw. $X+Y$? (10 Punkte)

2. Man weiß, dass für $a = 1$ und $t > 2$

$$\mathbb{P}\{X+Y > t\} = \frac{2t + 2\log(t-1)}{t^2}$$

   gilt. Welche Konsequenzen hat dies für den Value at Risk der Risiken X bzw. $X+Y$? (10 Punkte)

3. Für exponential-verteilte unabhängige Risiken Z_1, Z_2 mit Dichte

$$z \longrightarrow a\exp(-az), z > 0, a > 0,$$

   gilt bekanntlich für $t > 0$

$$\mathbb{P}\{Z_1 + Z_2 > t\} = \exp(-at)(1+at).$$

   Zeigen Sie damit, dass in diesem Beispiel die – für Kleinschadenverteilungen typische – Limesaussage

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{Z_1 + Z_2 > 2t\}}{\mathbb{P}\{Z_1 > t\}} = 0$$

   gilt. (10 Punkte)

Lösung:

1. Da die Pareto-Verteilung subexponentiell ist, gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{X+Y > t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = 2$$

   und damit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{X+Y > 2t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{X+Y > 2t\}}{\mathbb{P}\{X > 2t\}} \frac{\mathbb{P}\{X > 2t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} = 2^{-a+1}.$$

Damit gilt für $a < 1$

$$\mathbb{P}\{X + Y > 2t\} > \mathbb{P}\{X > t\} \text{ für alle hinreichend großen } t,$$

und für $a < 1$ ist

$$\mathbb{P}\{X + Y > 2t\} < \mathbb{P}\{X > t\} \text{ für alle hinreichend großen } t.$$

Das wiederum bedeutet, dass für hinreichend kleines α der Value at Risk $VAR_\alpha(X)$ zur Toleranzwahrscheinlichkeit α, definiert durch

$$VAR_\alpha(X) = \inf\{t : \mathbb{P}\{X > t\} < \alpha\}$$

die Beziehungen

$$VAR_\alpha(X + Y) > 2VAR_\alpha(X) \text{ für } a < 1 \tag{1}$$

und

$$VAR_\alpha(X + Y) < 2VAR_\alpha(X) \text{ für } a > 1$$

erfüllt. Für (1) erhält man dies aus

$$\mathbb{P}\{X + Y > 2VaR_\alpha(X)\} > \mathbb{P}\{X > VaR_\alpha(X)\} = \alpha.$$

Während also für $a > 1$ bezüglich VaR Diversifikation bei unabhängigen Risiken möglich ist, ist dies für $a < 1$ nicht mehr möglich.

2. Aus der gegebenen Darstellung erhalten wir für $t > 1$

$$\mathbb{P}\{X + Y > 2t\} = \frac{4t + 2\log(2t - 1)}{(2t)^2} > \frac{4t}{4t^2} = \mathbb{P}\{X > t\}.$$

Wie in Teil (1) erhalten wir, dass für hinreichend kleines α

$$VAR_\alpha(X + Y) < 2VAR_\alpha(X)$$

gilt, also bezüglich VaR keine Diversifikation möglich ist.

3. Einsetzen liefert

$$\frac{\mathbb{P}\{Z_1 + Z_2 > 2t\}}{\mathbb{P}\{Z_1 > t\}} = \frac{\exp(-2at)(1 + 2at)}{\exp(-at)} = \exp(-at)(1 + 2at),$$

und dies konvergiert für $t \to \infty$ gegen Null.

3 Aufgabe zur Tarifierung (30 Punkte)

Verallgemeinerte lineare Modelle erlauben eine große Anzahl unterschiedlicher Verteilungstypen (Poisson, Gamma, etc.), welche durch die Varianzfunktion $V(\mu)$ festgelegt werden.

1. Geben Sie mindestens vier verschiedene mögliche Varianzfunktionen mit den zugehörigen Verteilungstypen an. (10 Punkte)

2. Wie kann man aus den Daten Informationen über die Varianzfunktion erhalten? Beschreiben Sie für kreuzklassifizierte Daten je ein Verfahren, welches

   - auf einem Residuenplot basiert oder
   - bei Einzelschadensätzen die Mittelwerte und Varianzen in den Zellen benutzt.

   (10 Punkte)

3. Ein verallgemeinertes lineares Modell kann man mit dem natürlichen Parameter θ parametrisieren, ebenso gut geht das mit dem Erwartungswert $\mu = \mu(\theta) = c'(\theta)$. Hierbei ist $c(\theta)$ die Normierungsfunktion im Exponenten für die Dichte

   $$p(x, \theta, v) = \exp((\theta x - c(\theta))v/\sigma + h(x, v)).$$

   Zeigen Sie: Ist $\theta = g(\mu)$ bzw. $c(\theta) = h(\mu)$, dann gilt für die Varianzfunktion $V(\mu)$

   $$V(\mu) = 1/g'(\mu)$$

   bzw.

   $$V(\mu) = \mu/h'(\mu).$$

   (10 Punkte)

Lösung:

1. Zur Lösung waren vier Verteilungsklassen anzugeben, von denen hier als Beispiele sechs angegeben sind:

   - Poissonverteilungen mit $V(\mu) = \mu$;
   - Normalverteilungen mit $V(\mu) = 1$;
   - Gammaverteilungen mit $V(\mu) = \mu^2$;
   - Inverse Gaußverteilungen mit $V(\mu) = \mu^3$;
   - Binomialverteilungen mit $V(\mu) = \mu(1 - \mu)$;
   - Negative Binomialverteilungen mit $V(\mu) = \mu(1 + \mu)$.

2. a) Residuenplot: Nach der Berechnung der Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu}_i$ für die Mittelwerte μ_i unter der Annahme einer Varianzfunktion $V(\mu)$ plottet man die Pearson-Residuen

$$v_i(X_i - \hat{\mu}_i)/\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}$$

gegen die geschätzen $\hat{\mu}_i$ und akzeptiert die gewählte Varianzfunktion $V(\mu)$, wenn die Residuen für wachsendes μ nicht auseinanderlaufen ($V(\mu)$ wächst nicht schnell genug) oder gegen die $\mu-$Achse zusammenlaufen ($V(\mu)$ wächst zu schnell). Dies ist also ein Testverfahren für ein gewähltes $V(\mu)$.

b) Mit Einzelschadensätzen: Bei kreuzklassifizierten Daten werden die Einzelschadensätze in Zellen mit gleichem Risiko verteilt; für die Schätzung einer Varianzfunktion macht man dies mit einem nicht zu feinen Modell, so dass die Zellen ausreichend besetzt sind (mit beispielsweise mehr als fünf Datensätzen pro Zelle). In jeder Zelle berechnet man das arithmetische Mittel und die empirische Varianz der interessierenden Größe (also beispielsweise der Schadenhöhen oder Schadenanzahlen). Diese Werte plottet man gegeneinander und liest an der Grafik eine mögliche Varianzfunktion ab.

Bei zu dünn besetzten Zellen treten unerwünschte Effekte auf: Bei Zellen, in denen nur Nullen als Beobachtungen auftreten, erhält man als empirische Varianz den quadrierten Mittelwert. Wenn dies bei vielen Zellen auftritt, dann liefert die Grafik unter Anderem die Kurve $V(\mu) = \mu^2$, die jedoch nichts mit der *wahren* Varianzfunktion zu tun hat.

3. Für die Funktion $c(\theta)$ gilt $c'(\theta) = \mu(\theta)$ und $c''(\theta) = V(\mu(\theta))$, also $\mu'(\theta) = V(\mu(\theta))$. Leitet man die definierenden Gleichungen

$$\theta = g(\mu) \text{ und } c(\theta) = h(\mu(\theta))$$

jeweils einmal nach θ ab, so erhält man

$$1 = g'(\mu(\theta))\mu'(\theta) = g'(\mu)V(\mu)$$

und

$$\mu(\theta) = c'(\theta) = h'(\mu(\theta))\mu'(\theta) = h'(\mu)V(\mu),$$

was sich zu

$$V(\mu) = 1/g'(\mu) \text{ beziehungsweise } V(\mu) = \mu/h'(\mu)$$

umformen lässt.

4 Aufgabe zur Tarifkalkulation II (Spezialwissen Schaden 2007)

Ein KH-Tarif verwendet zwei Risikomerkmale A und B mit I bzw. K Ausprägungsklassen. Der Tarif soll ausschließlich nach der Schadenfrequenz differenzieren. Als Daten stehen pro Zelle (i, k), $1 \le i \le I$, $1 \le k \le K$, die Schadenzahl n_{ik} und die Anzahl Jahreseinheiten v_{ik} der Risiken des letzten Jahres zur Verfügung. Es soll ein multiplikatives kreuzklassifiziertes Ausgleichsverfahren angewandt werden.

a) Welche beiden Grundannahmen für die zugehörigen Zufallsvariablen N_{ik} machen die stochastischen multiplikativen kreuzklassifizierten Ausgleichsverfahren? (3 Punkte)

b) Nun wird zusätzlich angenommen, dass die N_{ik} Poisson-verteilt sind. Stellen Sie die zugehörige Likelihoodfunktion auf und leiten Sie die Likelihood-Gleichungen für die Parameterschätzer her. (10 Punkte)

c) Stattdessen will Ihr Kollege die Parameterschätzer mit Hilfe des Bailey/Simon-Verfahrens ermitteln. Wie lautet sein Ansatz? (4 Punkte)

d) Ihr Kollege begründet seine Vorgehensweise damit, dass er dann an Hand der Höhe des Bailey/Simon-Kriteriums auch sofort erkennen könne, ob das Modell zu den Daten passt. Hat er recht? (Wenn nicht – warum? Wenn ja – wie kann er das erkennen?) (4 Punkte)

e) Für die gegebenen Daten mit I=11, K=8 erhält Ihr Kollege für das Kriterium den Wert 81,5. Wird er auf Grund dessen behaupten, dass das Modell beibehalten werden kann oder dass es abgelehnt werden muss? Wieso? (5 Punkte)

f) Mit welchem Hauptargument würden Sie für die Anwendung des Verfahrens b) plädieren? (4 Punkte)

Lösung:

a) Die stochastischen multiplikativen Ausgleichsverfahren nehmen an, dass die Schadenvariablen N_{ik} unabhängig sind mit $E(N_{ik}) = v_{ik}x_iy_k$ mit unbekannten Parametern x_i, y_k.

b) Die Likelihoodfunktion L ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Beobachtungen n_{ik}, die jeweils einer Poisson-Verteilung mit Parameter $v_{ik}x_iy_k$ entstammen:

$$L = \prod_{i,k} exp(-v_{ik}x_iy_k)\,(v_{ik}x_iy_k)^{n_{ik}}/n_{ik}!$$

Maximieren von L durch Nullsetzen der Ableitungen von L oder $ln(L)$ nach den Parametern ergibt die Likelihoodgleichungen:

$$\ln(L) = \sum_{i,k}\left(-v_{ik}x_iy_k + n_{ik}ln(v_{ik}x_iy_k) - ln(n_{ik}!)\right),$$

$$0 = \frac{\partial ln(L)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{K}\left(-v_{ik}y_k + \frac{n_{ik}}{x_i}\right) = \frac{1}{x_i}\sum_{k=1}^{K}\left(n_{ik} - v_{ik}x_iy_k\right) \quad \text{und analog für } y_k.$$

Als Likelihoodgleichungen ergeben sich also die sog. Marginalsummenbedingungen

$$\sum_{k=1}^{K} v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k = \sum_{k=1}^{K} n_{ik},\ 1 \le i \le I, \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{I} v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{I} n_{ik},\ 1 \le k \le K,$$

für die Parameterschätzer $\hat{x}_i, \hat{y}_k$.

c) Beim Bailey/Simon-Verfahren werden die Parameterschätzer so bestimmt, dass

$$Q := \sum_{i,k} \frac{(n_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2}{v_{ik} x_i y_k} \quad \text{minimiert wird.}$$

d) Der Kollege hat recht, denn Q ist zugleich die Testgröße des Chi-Quadrat-Anpassungstests. Man muss nur noch die Anzahl Freiheitsgrade ermitteln, sich eine Irrtumswahrscheinlichkeit vorgeben und das Perzentil der Chi-Quadrat-Verteilung an der Stelle Q ermitteln.

e) Die zu Q gehörende Chi-Quadrat-Verteilung hat $IK - (I+K-1) = 88 - 18 = 70$ Freiheitsgrade (Anzahl Beobachtungen minus Anzahl der geschätzten Parameter). Laut Formelsammlung liegt der Wert $Q = 81{,}5$ unter dem 95%-Perzentil der Chi-Quadrat-Verteilung mit 70 Freiheitsgraden ($\chi^2_{70;95\%} = 90{,}5$), d.h. die Nullhypothese des Modells wird nicht abgelehnt (bei 5% Irrtumswahrscheinlichkeit).

f) Im Gegensatz zum Bailey/Simon-Verfahren ermöglicht die Maximum-Likelihood-Methode auch die Bestimmung der Genauigkeit der Schadenfrequenzschätzer $\hat{x}_i \hat{y}_k$ pro Zelle (i,k) (zum Vergleich mit den bisherigen Schätzern bzw. zur Prüfung der Signifikanz von zellweisen Unterschieden) sowie die Angabe eines Konfidenzintervalls für die künftige Realisierung von N_{ik}. Ein Anpassungstest ist ebenfalls möglich.

5 **Aufgabe zur Risikoteilung** (Spezialwissen Schaden 2007)

1. Sei S der Gesamtschaden des Rückversicherers unter einer proportionalen Rückversicherung und b seine Nettoprämie (nach Abzug der Betriebskosten). Häufig wird zusätzlich ein Gewinnanteil vereinbart derart, dass der Rückversicherer vom Gewinn $b - S$, falls dieser positiv ist, einen Anteil $q \in (0; 1)$ dem Erstversicherer erstattet. Die dem Rückversicherer effektiv verbleibende Nettoprämie $B(S)$ hängt also von S ab und ist $\leq b$. Drücken Sie $B(S)$ als lineare Transformation von $min(S, b)$ aus. (5 Punkte)

2. Da die Gesamtschadenverteilung häufig durch eine arithmetisch diskrete Verteilung ersetzt wird, die dann rekursiv berechnet werden kann, möchte man auch die Stop-Loss Prämie rekursiv berechnen. Sei also der Gesamtschaden S arithmetisch diskret auf $IN_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ verteilt mit $g_k = P(S = k)$, $g_0+g_1+g_2+\ldots = 1$, und $G_k = P(S \leq k)$, $k \in IN_0$.

2a) Leiten Sie eine Rekursionsformel für $SL_k = E(min(S, k))$, $k \in IN_0$, her, die nur von SL_{k-1} und G_{k-1} abhängt. (Hinweis: Formen Sie SL_k in eine Summe um.) (5 Punkte)

2b) Zeigen Sie, dass $E(min(S, b))$ für beliebiges $b > 0$ durch lineare Interpolation der SL_k mit $k \in IN_0$ gewonnen werden kann. (7 Punkte)

3. G bezeichne die Verteilung $G(s) = P(S \leq s)$ des Gesamtschadens S des Erstversicherers (der jetzt nicht mehr arithmetisch diskret sein muss). R sei der auf den Rückversicherer unter einem Stop-Loss mit Priorität b und Haftung h entfallende Schaden, $T = S - R$ der Selbstbehaltsschaden des Erstversicherers.

3a) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen H von T und F von R jeweils durch G aus (ggfs. mit Fallunterscheidung). (9 Punkte)

3b) Drücken Sie R und T jeweils mit Hilfe der Operationen min und max als Funktion von S aus (ohne Fallunterscheidungen). (4 Punkte)

Lösung:

1) $B(S) = b - q \cdot max(b - S,\, 0) = b + q \cdot min(S - b,\, 0)$
$\quad = (1-q)b + q\big(b + min(S-b,\, 0)\big) = (1-q)b + q \cdot min(S,\, b)$.

2a) $SL_k = \sum_{n=0}^{k} n \cdot g_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} k \cdot g_n$,

$$SL_{k-1} = \sum_{n=0}^{k-1} n \cdot g_n + \sum_{n=k}^{\infty} (k-1) \cdot g_n = \sum_{n=0}^{k-1} n \cdot g_n + \sum_{n=k}^{\infty} k \cdot g_n - \sum_{n=k}^{\infty} g_n,$$

$$SL_k - SL_{k-1} = k \cdot g_k - k \cdot g_k + \sum_{n=k}^{\infty} g_n = 1 - G_{k-1}.$$

Also lautet die gesuchte Rekursionsformel $SL_k = SL_{k-1} + 1 - G_{k-1}$.

2b) Für beliebiges $b > 0$ gilt (wenn $[b]$ die größte ganze Zahl $\le b$ bezeichnet)

$$E(min(S,b)) = \sum_{k=0}^{[b]} k \cdot g_k + \sum_{k=[b]+1}^{\infty} b \cdot g_k = \sum_{k=0}^{[b]} k \cdot g_k + \sum_{k=[b]+1}^{\infty} [b] \cdot g_k + (b - [b]) \sum_{k=[b]+1}^{\infty} g_k$$
$$= SL_{[b]} + (b - [b])(1 - G_{[b]}).$$

Lineare Interpolation bedeutet $\dfrac{E(min(S,b)) - SL_{[b]}}{SL_{[b]+1} - SL_{[b]}} = \dfrac{b - [b]}{[b] + 1 - [b]}$,

was wegen 2a gleichbedeutend ist mit $\dfrac{E(min(S,b)) - SL_{[b]}}{1 - G_{[b]}} = b - [b]$

und somit identisch mit der vorigen Formel für $E(min(S,b))$.

3a) Für $0 \le r < h$ gilt $\{R \le r\} = \{S \le b+r\}$, also ist $F(r) = G(b+r)$ für $r < h$,
für $r \ge h$ gilt $\{R \le r\} = \{S < \infty\}$, also ist $F(r) = 1$ für $r \ge h$.
Für $0 \le t < b$ gilt $\{T \le t\} = \{S \le t\}$, also ist $H(t) = G(t)$ für $t < b$,
für $t \ge b$ gilt $\{T \le t\} = \{S \le t+h\}$, also ist $H(t) = G(t+h)$ für $t \ge b$.

3b) $R = min\big(max(S - b,\, 0),\, h\big)$, $\quad T = max\big(min(S,\, b),\, S - h\big)$.

6 **Aufgabe zur Schadenreservierung** (Spezialwissen Schaden 2007)

Seien C_{ik}, $1 \le i,\, k \le n$, und S_{ik} die üblichen Bezeichnungen für den Schadenstand bzw. dessen Zuwachs in Anfalljahr i und Abwicklungsjahr k.

1a) Für welche beiden hauptsächlichen Aufgaben benötigt man den Prognosefehler des Reserveschätzers? (4 Punkte)

1b) Für welche beiden hauptsächlichen Aufgaben benötigt man den Schätzfehler des Reserveschätzers? (4 Punkte)

2a) Geben Sie die Formel für den Reserveschätzer $\hat{R}_i^{BF}$ gemäß dem Bornhuetter/Ferguson(BF)-Verfahren an und erläutern Sie kurz die darin vorkommenden Bezeichnungen. (3 Punkte)

2b) Seien v_i das Volumen von Anfalljahr i und $\hat{m}_1, \hat{m}_2, ..., \hat{m}_n$ die Schätzer für die Parameter des Zuwachsquoten(ZQ)-Modells sowie $\hat{m}_{n+1}$ ein Schätzer für die Tailquote. Geben Sie hiermit den zugehörigen Reserveschätzer $\hat{R}_i^{ZQ}$ gemäß dem ZQ-Verfahren mit Tail an. Bringen Sie nun $\hat{R}_i^{ZQ}$ in die Form der BF-Reserve und leiten sie daraus ab, unter welchen BF-Annahmen sich die gleiche Reserve wie beim ZQ-Verfahren mit Tail ergibt. (5 Punkte)

3a) Nennen Sie die drei Modellannahmen des Chain-Ladder(CL)-Modells (3 Punkte)

3b) Wieso gelten diese Annahmen im Allgemeinen nicht zugleich sowohl für die Abwicklung der angefallenen Schäden als auch für die der Zahlungen desselben Geschäftssegments? (5 Punkte)

3c) Zeigen Sie durch Ausrechnen von $Cov(C_{i,k-1}, S_{ik})$, dass $C_{i,k-1}$ und S_{ik} im CL-Modell meist (wann genau?) positiv korreliert sind. Gilt dies auch im ZQ-Modell? (6 Punkte)

Lösung:

1a) Der Prognosefehler ermöglicht die Beantwortung der Frage, wie weit die tatsächlichen künftigen Aufwendungen vom Reserveschätzer abweichen können, und die Modellierung des Risikokapitals bzw. des Schwankungszuschlags.

1b) Der Schätzfehler ermöglicht die Beantwortung der Frage, ob ein anderer Schätzwert signifikant verschieden ist, und die Konstruktion eines Konfidenzintervalls für den wahren Erwartungswert, in dem der best estimate liegen muss.

2a) $\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{b}_{n+1-i})$, wobei $\hat{U}_i$ ein „initial" oder „a priori" Schätzer für den erwarteten Endschaden ist (z.B. vom Pricing) und $\hat{b}_{n+1-i}$ ein Schätzer für den nach n+1-i Abwicklungsjahren aufgewendeten Teil des Gesamtschadens (kumulatives Abwicklungsmuster $(b_1, b_2, ..., b_n)$).

2b) $\hat{R}_i^{ZQ} = v_i(\hat{m}_{n+1-i} + ... + \hat{m}_{n+1}) = v_i\hat{m}_+\left(1 - \dfrac{\hat{m}_1 + ... + \hat{m}_{n+1-i}}{\hat{m}_+}\right)$ mit $\hat{m}_+ := \hat{m}_1 + ... + \hat{m}_{n+1}$.

Daher ergibt gemäß 2a BF mit $\hat{U}_i := v_i\hat{m}_+$ und $\hat{b}_{n+1-i} := (\hat{m}_1 + ... + \hat{m}_{n+1-i})/\hat{m}_+$ den gleichen Reserveschätzer.

3a) (CL1) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{in}\}$, $1 \le i \le n$, sind unabhängig.

(CL2) Es gibt Faktoren f_k mit $E(C_{i,k+1}|C_{i1},...,C_{ik}) = C_{ik} \cdot f_k$.

(CL3) Es gibt Faktoren σ_k^2 mit $Var(C_{i,k+1}|C_{i1},...,C_{ik}) = C_{ik} \cdot \sigma_k^2$.

3b) Im Allgemeinen hängen die individuellen Abwicklungsfaktoren $F_{ik} = C_{i.k+1}/C_{ik}$ der Zahlungen und $G_{ik} = D_{i,k+1}/D_{ik}$ der angefallenen Schäden vom Paid/Incurred-Stand C_{ik}/D_{ik} ab (derart, dass bei überdurchschnittlichem P/I-Stand ein unterdurchschnittlicher Paid-Faktor und/oder überdurchschnittlicher Incurred-Faktor resultiert), d.h. sie haben bei Vorliegen beider Datendreiecke nicht einen in allen Anfalljahren gleichen Erwartungswert, wie es das CL-Modell animmt.

3c) Mit der Bezeichnung $D_{i,k-1} = \{C_{i1},\dots,C_{i,k-1}\}$ gilt:

$$\begin{aligned} Cov(C_{i,k-1}, S_{ik}) &= E\left(Cov(C_{i,k-1}, S_{ik} \middle| D_{i,k-1})\right) + Cov\left(E(C_{i,k-1} \middle| D_{i,k-1}), E(S_{ik} \middle| D_{i,k-1})\right) \\ &= 0 + Cov\left(C_{i,k-1}, C_{i,k-1}(f_{k-1}-1)\right) = (f_{k-1}-1)Var(C_{i,k-1}) \,. \end{aligned}$$

Daher sind $C_{i,k\text{-}1}$ und S_{ik} genau dann positiv korreliert, wenn $f_{k\text{-}1} > 1$ ist.
Im ZQ-Modell sind alle Zuwächse S_{ik} unabhängig, also auch $C_{i,k\text{-}1}$ und S_{ik}.

7 Zusatzaufgabe (30 Punkte)

Für die Simulation interner Modelle braucht man Zufallszahlen mit vorgegebenen Verteilungen.

1. Wie erhält man aus einer auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariable U eine Zufallsgröße, die

   - exponential-verteilt ist mit Parameter $a > 0$;
   - Pareto-verteilt ist mit Dichte $x \to ax^{-a-1}, x > 1, a > 0$?
   - lognormal-verteilt ist mit Parametern μ, σ^2?
   - chi-quadrat-verteilt ist mit 3 Freiheitsgraden?
   - Weibull-verteilt ist mit Parameter $\beta > 0$, also mit der Dichte

   $$x \to \beta x^{\beta-1} \exp(-x^\beta), x > 0?$$

   (10 Punkte)

2. Wie simuliert man einen Gesamtschaden $S = X_1 + ... + X_N$, bei dem N Poisson-verteilt ist und bei dem die unabhängigen Schadenhöhen X_i Pareto-verteilt sind mit Parameter $a > 1$? Vermeiden Sie hierbei den Panjer-Algorithmus! (7 Punkte)

3. Wie simuliert man die Summe zweier Gesamtschäden S_1 und S_2, deren Verteilung wie in 2. aussieht und deren Abhängigkeit durch eine Kopula $C(u,v)$ gegeben ist? Nehmen Sie hierfür an, dass Sie schon eine Methode haben, mit der Paare (U,V) von Zufallsvariablen erzeugt werden, welche Verteilungsfunktion $C(u,v)$ besitzen. (13 Punkte)

Lösung:

1. Die gewünschten Zufallsgrößen werden aus einer oder mehreren unabhängigen, auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallszahlen U, U_1, U_2, U_3 generiert.

   - Exponential-verteilt: $X = -\log(U)$;
   - Pareto-verteilt: $X = U^{-1/a}$;
   - lognormal-verteilt: mit $Z = \Phi^{-1}(U)$ (oder dem Box-Müller-Verfahren) erzeugt man ein $Z \sim N(0,1)$ und setzt $X = \exp(\mu + \sigma Z)$;
   - chi-quadrat-verteilt: für $i = 1,2,3$ erzeugt man mit $Z_i = \Phi^{-1}(U_i)$ N(0,1)-verteilte unabhängige Zufallsvariable und setzt dann $X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$;
   - Weibull-verteilt: Hier benutzt man, dass eine Weibull-verteilte Größe aus einer exponential-verteilten Zufallsvariable durch Potenzieren entsteht. Also: $X = (-\log(U))^{1/\beta}$.

2. Man simuliert zunächst die Schadenanzahl N durch

$$N = \min\{n : U \leq Poi(\lambda)[0, n]\}$$

und setzt dann

$$S = U_1^{-1/a} + ... + U_N^{-1/a}.$$

3. Seien U, V gegeben mit Verteilungsfunktion $C(u, v)$. Mit dem Panjer-Algorithmus kann man die Verteilung des Gesamtschadens im kollektiven Modell für diskrete, äquidistante Schadenhöhenverteilungen berechnen. Sei Δ die Schrittweite. In diesem Fall berechnet man zunächst die Punktwahrscheinlichkeiten $p_i^{(1)}$ und $p_i^{(2)}$ der diskretisierten Zufallsvariablen S_1, S_2, soweit sie benötigt werden,

$$p_k^{(i)} = \mathbb{P}\{S_i = k\Delta\}, k = 0, 1, 2, ...,$$

und setzt dann

$$S_1 = \min\{k : U < p_1(1) + ... + p_k^{(1)}\}\Delta$$

beziehungsweise

$$S_2 = \min\{k : V < p_1(2) + ... + p_k^{(2)}\}\Delta.$$

Dann ist $S = S_1 + S_2$ eine Zufallsgröße mit der gewünschten Verteilung.

Falls die Schadenhöhen nicht diskret sind, kann man mit Diskretisierungen arbeiten, und zwar so, dass man durch Auf- oder Abrunden obere und untere Schranken für die Schadenhöhen erhält:

$$X_i' = k\Delta \text{ wenn } (k-1)\Delta \leq X_i < k\Delta,$$

$$X_i'' = k\Delta \text{ wenn } k\Delta \leq X_i < (k+1)\Delta,$$

so dass für die mit obigem Verfahren erzeugten Gesamtschäden

$$S_k'' \leq S_k \leq S_k', k = 1, 2$$

gilt. Mit $S' = S_1' + S_2'$ beziehungsweise $S'' = S_1'' + S_2''$ gilt dann

$$S'' \leq S \leq S'.$$

Berechnet man mit den so gebildeten Approximationen mit Hilfe von Simulationen ein monotones Risikomaß $\rho(S)$, dann erhält man wegen $\rho(S'') \leq \rho(S) \leq \rho(S')$ eine Approximation und eine Fehlerabschätzung für $\rho(S)$. Ist der Fehler zwischen $\rho(S'')$ und $\rho(S')$ zu groß, dann muss man Δ verkleinern.