Blätter DGVFM (2007) 28: 149–160
DOI 10.1007/s11857-007-0010-6

ACTUARIAL EXAMS

Bericht zur Prüfung im Oktober 2006 über Mathematik der Schadenversicherung (Spezialwissen)

Christian Hipp · Thomas Mack

Published online: 13 April 2007

Die Prüfung im Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik fand am 21. Oktober 2006 mit 34 Kandidaten statt. Die Aufgaben waren in 3 Stunden zu lösen, und jede der sieben Aufgabe war mit einer maximalen Punktzahl gekennzeichnet. Insgesamt waren 180 Punkte zu erreichen, und mit 72 Punkten wurde die Klausur als bestanden bewertet. Die Zusatzaufgabe wurde nur bewertet, wenn eine andere Aufgabe nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet wurde. Die Verfasser haben alle Aufgaben gestellt und die Klausuren korrigiert. Leider haben nur 24 der Kandidaten die Klausur bestanden. Einer der Kandidaten hat die Rekordmarke von 175 Punkten erreicht.

1. Aufgabe (30 Punkte) Grundwissen, Modellierung

a) Berechnen Sie die Schiefe $E[(S-E[S])^3]$ des Gesamtschadens $S = X_1 + \ldots + X_N$ mit Poisson-verteilter Schadenanzahl N und Pareto-verteilter Schadenhöhe X mit $\mathbb{P}\{X > t\} = t^{-a}$, $t > 1$. (10 Punkte)

b) Seien X, Y stochastisch unabhängig mit einer Pareto-Verteilung mit Parameter 1/2, also mit Dichte
$$f(x) = (1/2)x^{-3/2}, \quad x > 1 .$$
Zeigen Sie, dass für hinreichend großes $t > 0$
$$\mathbb{P}\{X+Y > 2t\} > \mathbb{P}\{X > t\}. \tag{1}$$
Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Rahmen des *Value at Risk*. (10 Punkte)

c) Wie muss man das klassische Modell der Risikotheorie von Lundberg abändern, um folgendes Phänomen zu berücksichtigen: Wenn Schäden in kurzer Folge auftreten, sind die Schadenhöhen geringer, als wenn sie in großen zeitlichen Abständen auftreten. Verwenden Sie hierfür das Konzept der Kopulas. (10 Punkte)

Hinweis zu b): Benutzen Sie die Subexponentialität der Paretoverteilung.

Christian Hipp, Karlsruhe, Deutschland, e-mail: Christian.Hipp@fbv.uni-karlsruhe.de

Lösung:

Zu a)

Für die Schiefe von S muss das dritte Moment von X endlich sein, also muss $a > 3$ gelten. In diesem Fall ist die Schiefe gegeben durch $E[N]E[X^3] = \lambda a/(a-3)$.

Zu b)

Da die Verteilung von X subexponentiell ist (Hinweis), erhalten wir mit $\mathbb{P}\{X > t\} = t^{-1/2}$, t > 1, die Relation

$$\mathbb{P}\{X+Y > 2t\} \sim 2\mathbb{P}\{X > 2t\} = 2(2t)^{-1/2} = \sqrt{2}\mathbb{P}\{X > t\}\,.$$

Dies impliziert, dass für hinreichend große t die Beziehung (1) gilt.
Ist $t > 0$ mit $\mathbb{P}\{X > t\} = \alpha$, dann ist t der Value at Risk zum Level α, $t = VaR_X(\alpha)$. Die Beziehung (1) bedeutet, dass für hinreichend großes t

$$\mathbb{P}\{X+Y > 2VaR_X(\alpha)\} > \alpha\,,$$

also dass

$$VaR_{X+Y}(\alpha) > VaR_X(\alpha) + VaR_Y(\alpha)\,.$$

Zu c)

Im klassischen Lundberg-Modell wird angenommen, dass die Schadenhöhen und die Schadeneintrittszeitpunkte stochastisch unabhängig sind, und unter dieser Annahme tritt das genannte Phänomen nicht auf. Um es zu modellieren, muss man auf die Unabhängigkeit verzichten und eine Abhängigkeit zwischen den Schadenhöhen und den Wartezeiten zwischen Schäden modellieren, die bewirkt, dass kleine Schäden häufig gemeinsam mit kurzen Wartezeiten auftreten. Dies kann man mit einer Kopula erreichen, bei der die Komponenten U, V mit großer Wahrscheinlichkeit gemeinsam kleine Werte annehmen, also beispielsweise mit der Kopula, welche Masse $1/2$ auf $0 \le U = V \le 1/2$ und Dichte 2 auf $1/2 < U, V < 1$ besitzt, mit

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \min(u,v), \text{ falls } \min(u,v) \le 1/2 \\ &= 1/2 + 2(u-1/2)(v-1/2) \text{ für } 1/2 < u, v < 1\,. \end{aligned}$$

2. Aufgabe (30 Punkte) Solvabilität, Ruinwahrscheinlichkeiten

a) Bei einer Paretoverteilung mit Tail-Parameter α verhält sich die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ im Lundberg-Modell für großes Startkapital s wie $C(\alpha)s^{-\alpha+1}$:

$$\psi(s) \sim C(\alpha)s^{-\alpha+1}, \quad s \to \infty\,.$$

Für $\alpha = 0,9$ bedeutet dies,

$$\psi(s) \sim C(0.9)s^{0,1}, \quad s \to \infty\,.$$

Das ist aber nicht möglich! Wo liegt der Fehler in der Argumentation? (10 Punkte)

b) Sei $\psi(s)$ die von s, λ, c und der Schadenhöhenverteilung Q abhängende Ruinwahrscheinlichkeit mit unendlichem Planungshorizont im Lundberg-Modell. Wie können Sie – durch Veränderung einer Ausgangsgröße – die Ruinwahrscheinlichkeit halbieren:

1. durch Verdoppelung von c?
2. durch Halbierung von λ?
3. durch Verdoppelung von s?
4. durch Halbierung der Schäden (d. h. Q wird durch die von Q und $x \to x/2$ erzeugte Verteilung ersetzt)?

Begründen Sie Ihre Antworten. (16 Punkte)

c) Zeigen Sie: Ist in obigem Kontext $\psi(s) = C\exp(-as)$, dann muss $C < 1$ sein. (4 Punkte)

Lösung:

Zu a)

In der Aufgabenstellung stand *Für* $s = 0{,}9$ *bedeutet dies* ... , doch diesen Schreibfehler haben fast alle Kandidaten korrigiert. Mit $\alpha = 0{,}9$ existiert der Mittelwert der Schadenhöhen nicht, und damit gilt auch die Asymptotik $\psi(s) \sim C(\alpha)s^{-\alpha+1}$, $s \to \infty$, nicht mehr. In diesem Falle ist $\psi(s) = 1$ für alle $s \geq 0$.

Zu b)

Da man die Ruinwahrscheinlichkeit nur selten explizit berechnen kann, muss hier ein geeigneter Ansatz gewählt werden, in dem man die gestellten Fragen entscheiden kann. Dafür bieten sich Spezialfälle ($s = 0$ oder exponentialverteilte Schadenhöhen) oder Approximationen an.

i. Für $s = 0$ gilt $\psi(s) = \lambda\mu/c$. Hier kann man jeweils durch Verdoppelung von c oder Halbierung von λ oder auch durch Halbierung der Schäden die Ruinwahrscheinlichkeit exakt halbieren. Verdoppelung von $s = 0$ ändert natürlich nichts.

ii. Für exponentialverteilte Schadenhöhen mit Mittelwert μ gilt

$$\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c}\exp(-Rs)\,,$$

wobei $R = (c - \lambda\mu)/(c\mu)$ der Anpassungskoeffizient ist. Weil R in den Fällen 1., 2. und 4. wächst, wird die Ruinwahrscheinlichkeit in diesen Fällen mindestens halbiert. Im Falle 3. wird die Ruinwahrscheinlichkeit nur dann mindestens halbiert, wenn $\exp(-Rs) \leq 1/2$ gilt.

iii. Für subexponentielle Schadenhöhen X_i bietet sich die Approximation

$$\psi(s) \sim \frac{p}{1-p}H(s,\infty)$$

an, bei der H die Leiterhöhenverteilung mit Dichte

$$h(x) = \frac{1}{\mu}\mathbb{P}\{X > x\}, \quad x > 0\,,$$

und $p = \lambda\mu/c$ ist. In den Fällen 1. und 2. wird p halbiert, und H bleibt unverändert. Somit wird wegen

$$\frac{p/2}{1-p/2} \leq \frac{1}{2}\frac{p}{1-p}$$

die Ruinwahrscheinlichkeit in den Fällen 1. und 2. mindestens halbiert. Im Fall 4. betrachtet man eine neue Währung, bei der die Schadenhöhen unverändert bleiben. Dabei verdoppeln sich c und s, und damit wird auch hierduch die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(s) \sim \frac{p/2}{1-p/2} H(2s,\infty) \leq \frac{1}{2}\frac{p}{1-p} H(s,\infty) \sim \frac{1}{2}\psi(s)$$

mindestens halbiert. Im Falle 3. wird die Ruinwahrscheinlichkeit nur dann mindestens halbiert, wenn

$$H(2s,\infty) \leq \frac{1}{2} H(s,\infty)\,.$$

iv. Für Schadenhöhenverteilungen mit Anpassungskoeffizient R bietet sich die Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit durch die obere Schranke

$$\psi(s) \leq \exp(-Rs)$$

an. Dieser Ansatz eignet sich kaum für die Lösung der gestellten Fragen. Das wird deutlich am Spezialfall exponentialverteilter Schäden mit $R = 1/\mu - \lambda/c$. Verdoppelung von c (dies ist äquivalent zur Halbierung von λ) führt beispielsweise nur dann dazu, dass die (Approximation der) Ruinwahrscheinlichkeit mindestens halbiert wird, wenn $\exp(-s\lambda/(2c)) \leq 1/2$.

Zu c)

Der Fall $\psi(s) = 1$ für alle $s \geq 0$ ist immer möglich mit $a = 0$ und $C = 1$. Wird dieser Fall ausgeschlossen, dann muss $a > 0$ und $C = \psi(0) \leq 1$ sein. Die Beziehung $\psi(0) = 1$ bedeutet wiederum $\psi(s) = 1$ für alle $s \geq 0$, was ausgeschlossen war.

3. Aufgabe (30 Punkte) Tarifierung, Statistik

Seien $X_i, Y_{i1}, \ldots Y_{id}, i = 1, \ldots, n$ die Daten für ein Tarifierungsprojekt.

a) Lineare Modelle:

1. Notieren Sie den Gauss-Markov-Schätzer für den Regressionsvektor. (3 Punkte)
2. Manchmal ist die im Gauss-Markov-Schätzer vorkommende Matrix nicht invertertierbar. Wie kann man dieses Problem lösen? (5 Punkte)
3. Beschreiben Sie die Modellwahl mit Hilfe des F-Tests. (7 Punkte)

b) Verallgemeinerte Lineare Modelle:

1. Welche Begriffe gibt es bei verallgemeinerten linearen Modellen, für die es bei linearen Modellen keine entsprechende Größe gibt? (3 Punkte)
2. Wie lautet die Varianzfunktion für das Poissonverteilungs-Modell? (2 Punkte)
3. Welche Linkfunktion sollte man benutzen, wenn Eintrittswahrscheinlichkeiten geschätzt werden? (3 Punkte)
4. Beschreiben Sie die Modellwahl mit Hilfe relativer Devianzen. (7 Punkte)

Lösung:

Zu a)

1. Ist $Y = (Y_{ik}, i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, d)$ die $n \times k$ Designmatrix und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ der Beobachtungsvektor, dann ist der Gauss-Markov-Schätzer für den Regressionsvektor β gegeben durch
$$\hat{\beta} = \left(Y^T Y\right)^{-1} Y^T X\,.$$
2. Die Matrix $Y^T Y$ ist nur dann nicht regulär, wenn Y nicht vollen Rang k hat. Das bedeutet, dass eines der Merkmale durch eine Linearkombination anderer Merkmale darstellbar ist. Konkret kann dies daher kommen, dass
   nicht richtig normiert wurde (Überparametrisierung);
   ein Merkmal nur eine Ausprägung aufweist (nicht gefüllte Felder);
   ein Merkmal die durch alle restlichen Merkmale erzeugte Zerlegung in Zellen nicht verfeinert.
3. Hierzu betrachtet man $0 < d_1 < d_2 \le d$ und zwei geschachtelte Modelle $M_1 \subset M_2$, aufgefasst als Menge aller n-Vektoren der Mittelwerte, die im jeweiligen Modell möglich sind:
$$M_j = \left\{ \mu : \mu = \sum_{k=1}^{d_j} \beta_k Y_{ik}\,, i = 1, \ldots, n, \beta \in \mathbb{R}^{d_j} \right\}, \quad j = 1, 2\,.$$
Mit $\mu_j = \arg\min_\mu \{||X - \mu|| : \mu \in M_j\}$, $j = 1, 2$, bildet man die $F-$Statistik
$$F = \frac{n - d_1}{d_2 - d_1} \frac{||X - \mu_1||^2 - ||X - \mu_2||^2}{||X - \mu_1||^2}\,.$$
Zu vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α sucht man das obere $\alpha-$Quantil $F_{d_2-d_1,n-d_1}(\alpha)$ der $F-$Verteilung mit $d_2 - d_1$ und $n - d_1$ Freiheitsgraden. Wenn $F > F_{d_2-d_1,n-d_1}(\alpha)$, dann wird Modell M_1 verworfen und Modell M_2 – für weitere Vergleiche – gewählt. Ist $F \le F_{d_2-d_1,n-d_1}(\alpha)$, dann kann Modell M_1 nicht verworfen werden.

Zu b)

1. Varianzfunktion und Linkfunktion.
2. $V(\mu) = \mu$.
3. Die Logit-Funktion: $\eta = \log(p/(1 - p))$.
4. Für die Devianz benötigt man den natürlichen Parameter θ und die Momenterzeugende $c(\theta)$ aus der Dichte
$$p(x, \theta, \phi) = \exp((\theta x - c(\theta))/a(\phi) + h(x, \phi))\,;$$
damit ergibt sich die Devianz eines Modells M (ohne Volumenmaße) als
$$D(M) = 2 \sum_{i=1}^{n} \overline{\theta}_i X_i - c(\overline{\theta}_i) - \hat{\theta}_i X_i - c(\hat{\theta}_i)$$

Hierbei ist $\hat{\theta}_i$ der durch Minimierung der Devianz im Modell M gewonnene Schätzer für θ zur Beobachtung X_i, und $\overline{\theta}_i$ ist der entsprechende Schätzer im vollen Modell. Wieder betrachtet man $0 < d_1 < d_2 \leq d$ und zwei geschachtelte Modelle $M_1 \subset M_2$, aufgefasst als Menge aller n-Vektoren der linearen Prädiktoren, die im jeweiligen Modell möglich sind:

$$M_j = \left\{ \eta : \eta = \sum_{k=1}^{d_j} \beta_k Y_{ik}, i = 1, \ldots, n, \beta \in \mathbb{R}^{d_j} \right\}, \quad j = 1, 2\,.$$

Für den Vergleich dieser beiden Modelle betrachtet man die relativen Devianzen

$$d(M_1, M_2) = \frac{1}{d_2 - d_1}(D(M_1) - D(M_2))\,.$$

Bei kleinem Wert von $d(M_1, M_2)$ sollte Modell M_2 verworfen werden, weil beim Wechsel von M_1 auf M_2 die Verkleinerung der Devianz – gemessen an der Zahl zusätzlicher Parameter – nicht den gewünschten Effekt bringt. Hierbei wird *kleiner Wert* in Relation zu den relativen Devianzen beim paarweisen Vergleich in einer Kette von geschachtelten Modellen $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_K$ gesehen: ein Modell M_j wird dann akzeptiert (nicht verworfen), wenn die relative Devianz $d(M_j, M_{j+1})$ deutlich kleiner ist als die relativen Devianzen $d(M_k, M_{k+1}), k = 1, \ldots, j-1$.

4. Aufgabe (30 Punkte) Tarifkalkulation

a) Definieren Sie die Zufallsvariable „Schadenbedarf“ für eine Gruppe von Risiken. (2 Punkte)

b) Welche Annahmen macht das Individuelle Modell für Erwartungswert und Varianz des Schadenbedarfs Z_j einer Risikogruppe in Beobachtungsjahr j, $1 \leq j \leq J$? Geben Sie für die dort vorkommenden unbekannten Parameter erwartungstreue Schätzer an, die auf allen Beobachtungen Z_j basieren. (5 Punkte)

c) Wie lautet die dem Individuellen Modell in b) entsprechende Annahme eines Verallgemeinerten Linearen Modells (GLM) für $\mathrm{Var}(Z_j)$ sowohl allgemein als auch im Spezialfall der Gammaverteilung? (3 Punkte)

d) Wie lautet im Fall der Gammaverteilung die Dichte f_j von Z_j in der Parametrisierung von c)? (5 Punkte)

e) Berechnen Sie unter den vorstehenden Voraussetzungen den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erwartungswert des Schadenbedarfs. (8 Punkte)

f) Zeigen Sie die Erwartungstreue des ML-Schätzers von e). Wieso ist die in diesem Schätzer enthaltene Gewichtung der Beobachtungen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_J$ sinnvoll? (3 Punkte)

g) Leiten Sie unter Verwendung von b) und c) einen (Momenten-)Schätzer (nicht ML-Schätzer) für den Formparameter der Gammaverteilung von d) her, der auf allen Beobachtungen Z_j beruht. (4 Punkte)

Lösung:

Zu a)

Der Schadenbedarf ist der Quotient aus dem Gesamtschaden aller Risiken der Gruppe in einem Jahr und der Anzahl Jahreseinheiten im gleichen Jahr.

Zu b)

Die Annahmen des Individuellen Modells für den Schadenbedarf Z_j mehrerer Jahre $j = 1, \ldots, J$ lauten: Die Z_j sind unabhängig mit $E(Z_j) = \mu$ und $\mathrm{Var}(Z_j) = \sigma^2/v_j$ mit der bekannten Anzahl v_j der Jahreseinheiten und mit in allen Jahren gleichen, unbekannten Parametern μ und σ^2. Erwartungstreue Schätzer für μ und σ^2 sind

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{J} v_j Z_j \Big/ \sum_{j=1}^{J} v_j \text{ und } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^{J} v_j (Z_j - \hat{\mu})^2 .$$

Zu c)

$\mathrm{Var}(Z_j) = \phi V(\mu)/v_j$ allgemein bzw. $\mathrm{Var}(Z_j) = \phi\mu^2/v_j$ im Fall der Gammaverteilung

Zu d)

Die Gammadichte lautet gemäß Formelsammlung $f(x) = (\beta x)^{\alpha} e^{-\beta x}/(x\Gamma(\alpha))$ und es ist $E(X) = \alpha/\beta$, $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\beta^2$. Umparametrisierung auf $E(Z_j) = \mu$, $\mathrm{Var}(Z_j) = \phi\mu^2/v_j$ ergibt $\beta = v_j/(\phi\mu)$, $\alpha = v_j/\phi$. Dies ergibt die Dichte

$$f_j(z) = \left(\frac{v_j z}{\phi\mu}\right)^{v_j/\phi} \cdot \exp\left(-\frac{v_j z}{\phi\mu}\right) \Big/ \left(z\Gamma(v_j/\phi)\right) .$$

Zu e)

Die Likelihood der Beobachtungen $Z_1, \ldots, Z_J$ ist $L = \prod_{j=1}^{J} f_j(Z_j)$ und die Loglikelihood ist

$$\ln(L) = \sum_{j=1}^{J} \ln\left(f_j(Z_j)\right) = \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{v_j}{\phi} \ln\left(\frac{v_j Z_j}{\phi\mu}\right) - \frac{v_j Z_j}{\phi\mu} - \ln\left(Z_j \Gamma(v_j/\phi)\right)\right) .$$

Maximieren der Loglikelihood durch Nullsetzen der Ableitungen nach μ (und ϕ) ergibt

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial\mu} = \sum_{j=1}^{J} \left(-\frac{v_j}{\phi\mu} + \frac{v_j Z_j}{\phi\mu^2}\right) = \frac{1}{\phi\mu^2} \sum_{j=1}^{J} \left(v_j Z_j - v_j \mu\right) .$$

Da man dies direkt nach μ auflösen kann, braucht man die Ableitung nach ϕ nicht auszurechnen und erhält als ML-Schätzer des Schadenbedarfs μ das Ergebnis

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{J} v_j Z_j \Big/ \sum_{j=1}^{J} v_j .$$

Zu f)

Mit $v_+ := v_1 + \ldots + v_J$ wird $E(\hat{\mu}) = \sum_{j=1}^{J} \frac{v_j}{v_+} E(Z_j) = \mu \sum_{j=1}^{J} \frac{v_j}{v_+} = \mu$.

Der Schätzer $\hat{\mu}$ gibt Beobachtungen Z_j mit hohem Volumen v_j ein höheres Gewicht. Dies ist sinnvoll, weil diese Beobachtungen gemäß der Varianzannahme $\mathrm{Var}(Z_j) = \sigma^2/v_j$ eine kleinere Varianz, d. h. eine größere Genauigkeit haben. Genauer gesagt, hat $\hat{\mu}$ minimale Varianz unter allen erwartungstreuen Linearkombinationen der Z_j.

Zu g)

Der Schätzer $\hat{\sigma}^2$ aus b) schätzt in der Gamma-Parametrisierung von c) die Größe $\phi\mu^2$ (erwartungstreu). Also ist $\hat{\sigma}^2/\hat{\mu}^2$ ein (Momenten-)Schätzer für den Formparameter ϕ.

5. Aufgabe (30 Punkte) Schadenreservierung

Gegeben sei ein Abwicklungsdreieck mit den üblichen Bezeichnungen $C_{i,k}$, $1 \le i, k \le n$, für den Schadenstand bzw. $S_{i,k}$ für den Zuwachs.

a) Wie ist die Bornhuetter/Ferguson Reserve für Anfalljahr i, $1 \le i \le n$, definiert? (3 Punkte)

b) Welche Schwäche der Chain-Ladder-Reserve wird durch die BF-Reserve überwunden? (3 Punkte)

c) Beschreiben Sie (soweit möglich mit Formeln, sonst verbal), wie die Parameter der BF-Reserve in der Praxis üblicherweise geschätzt werden. (6 Punkte)

d) Nennen und begründen Sie einen Kritikpunkt an jedem der in c) genannten Schätzverfahren. (6 Punkte)

e) Geben Sie für einen der Parameterschätzer aus c) eine bessere Alternative an und begründen Sie, wieso diese Alternative besser ist. (6 Punkte)

f) Die BF-Reserve kann auch mit dem Credibility-Modell von Bühlmann/Straub begründet werden. Geben Sie die hierfür im Schadenreservierungskontext zu treffenden Modellannahmen an. (6 Punkte)

Lösung:

Zu a)

$\hat{R}_i^{BF} := \left(1 - \hat{b}_{n+1-i}\right)\ \hat{U}_i$ mit

$\hat{U}_i$ = A-priori-Schätzer für den Endschaden von Anfalljahr i,

$\hat{b}_k$ = Schätzer für den nach k Abwicklungsjahren bekannten Anteil vom Endschaden.

Zu b)

Die Chain-Ladder-Reserve $\hat{R}_i^{CL} := C_{i,n+1-i}(\hat{f}_{n+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1} - 1)$ hängt stark vom aktuellen Schadenstand $C_{i,n+1-i}$ ab und ergibt z.B. eine unsinnige Reserve $\hat{R}_i^{CL} = 0$ für $C_{i,n+1-i} = 0$, was in der nichtproportionalen Rückversicherung für die jüngsten Anfalljahre durchaus vorkommen kann. Die BF-Reserve ergibt auch für $C_{i,n+1-i} = 0$ ein sinnvolles Resultat, da es gar nicht von $C_{i,n+1-i}$ abhängt.

Zu c)

$\hat{U}_i = v_i \hat{q}_i$ mit dem bekannten Prämienvolumen v_i und einem Schätzer $\hat{q}_i$ für die Endschadenquote, basierend im neuesten Anfalljahr n auf dem Pricing bzw. der geschätzten Änderung des Anfalljahrs im Vergleich zu den Vorjahren (oder deren Durchschnittsschadenquote) bzw.

sonst auf dem Endschadenschätzer der letztjährigen Reservierung (teilweise auch auf Marktschadenquoten).
$\left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots\right)$ ist das erwartete Abwicklungsmuster, das in der Regel identisch mit dem Chain-Ladder-Abwicklungsmuster $\hat{b}_k = (\hat{f}_k \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{n-1})^{-1}$ ist mit $\hat{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$.

Zu d)

Die Verwendung des Chain-Ladder-Abwicklungsmusters macht die BF-Reserve zu einer bloßen Variante der Chain-Ladder, aber nicht zu einer eigenständigen Reservierungsmethode, als die BF häufig verwendet wird. Außerdem widerspricht die implizite Verwendung von Abwicklungsfaktoren der von der BF-Reserve eigentlich angestrebten Unabhängigkeit (siehe b)) zwischen den bekannten und den noch ausstehenden Schäden, denn Abwicklungsfaktoren etablieren ja gerade einen Zusammenhang zwischen den bekannten und den ausstehenden Schäden.
Die in c) dargestellte Schätzung von U_n ist kaum objektivierbar (peer-review-fähig), da die Änderungen von Prämien- und Schadenniveau nur schwer zu schätzen sind, so dass dies meist nur durch gefühlsmäßiges Ansetzen eines Wertes für $\hat{q}_n$ erfolgt. Falls $\hat{U}_i$ für die Vorjahre jeweils durch den A-posteriori-Endstand $C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i^{BF}$ der letztjährigen Reservierung geschätzt wird, so bedeutet diese Vorgehensweise, dass eine etwaige Fehleinschätzung beim erstmaligen Festsetzen von $\hat{U}_i$ nur langsam und graduell korrigiert wird, auch wenn dies in $C_{i,n+1-i}$ schon erkennbar wäre. Auch die Übertragbarkeit von Marktstatistiken auf ein individuelles Portefeuille ist stets fragwürdig.

Zu e)

Anstelle des Chain-Ladder-Abwicklungsmusters verwendet man besser

$$\hat{b}_k^* = \hat{\beta}_1 + \ldots + \hat{\beta}_k \quad \text{mit} \quad \hat{\beta}_j := \sum_{i=1}^{n+1-j} S_{i,j} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-j} \hat{U}_i \,,$$

wobei $S_{i,j}$ die Zuwächse des Abwicklungsdreiecks sind. Diese Vorgehensweise ergibt sich durch Auflösung der BF-Reserve-Formel nach $\hat{b}_j$ zu $\hat{b}_j = 1 - \frac{\hat{R}^{BF}_{n+1-j}}{\hat{U}_{n+1-j}} \approx \frac{C_{n+1-j,j}}{\hat{U}_{n+1-j}}$ sowie Mittelung zu $\hat{\hat{b}}_j := \sum\limits_{i=1}^{n+1-j} C_{i,j} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n+1-j} \hat{U}_i$ aus der Erkenntnis, dass $(\hat{\hat{b}}_1, \hat{\hat{b}}_2, \ldots)$ Inversionen $\hat{\hat{b}}_k > \hat{\hat{b}}_{k+1}$ enthalten kann, was durch Verwendung der Zuwächse $S_{i,k}$ statt der Stände $C_{i,k}$ weitgehend vermieden wird. Dieses Abwicklungsmuster passt von seiner Konstruktion her genau zur BF-Reserve und macht BF zu einem eigenständigen Verfahren.

Zu f)

Für die Schadenzuwächse S_{ik} müssen unter dem Credibilitymodell folgende Annahmen erfüllt sein:
Jedes Anfalljahr i hängt von einer unbekannten Anfalljahrqualität Θ_i ab, derart dass gilt:

$E(S_{ik}|\Theta_i) = v_i\,\mu(\Theta_i)m_k$ mit bekanntem Volumen v_i und Abwicklungsparametern m_k.
$\mathrm{Var}(S_{ik}|\Theta_i) = v_i\,\sigma^2(\Theta_i)m_k$.
Die Anfalljahre (Θ_i, $S_{i1}, \ldots, S_{in}$), $1 \le i \le n$, sind unabhängig.
$\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ sind identisch verteilt.
$Cov(S_{ik}, S_{ij}|\Theta_i) = 0$ für $k \neq j$.

In der Varianzannahme können v_i und/oder m_k auch in anderen Potenzen vorkommen, was aber nur selten den Datengegebenheiten entspricht. In der Praxis sind die m_k nicht bekannt und müssen durch Schätzer ersetzt werden.

6. Aufgabe (30 Punkte) Risikoteilung

Für das Portefeuille eines Erstversicherers gelte das kollektive Modell. Die Schadenhöhe X sei Pareto-verteilt mit $F(x) = 1-(b/x)^{\alpha}$ mit $b = 1$ und $\alpha = 1{,}5$. Die Schadenzahl N sei Poisson-verteilt mit $E(N) = 24$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Rückversicherers unter einer Schadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $a = 4$ und Haftung $h = 5$.
Hinweis: Auf das richtige numerische Ausrechnen entfallen 15 Punkte, da es in der vorgesehenen Zeit machbar ist (auch ohne Taschenrechner!), zumal der Rückversicherungsaktuar bei EDV-Ausfall genau das tun muss. Wenn Sie dennoch Zeit für andere Aufgaben sparen wollen, können Sie statt des exakten numerischen Ausrechnens auch Erwartungswert und Varianz des Rückversicherers nur mit Faustformeln schätzen. Wenn die so erzielten Ergebnisse weniger als 20% von den genauen Werten abweichen, erhalten Sie die vollen 15 Punkte für den Rechenteil.

Lösung:

Von jedem Schaden X entfällt $Y = \min(\max(X-a,0),h)$ auf den Rückversicherer. Dessen Gesamtschaden Z hat also nach den Waldschen Formeln Erwartungswert $E(Z) = E(N)E(Y)$ und Varianz $\operatorname{Var}(Z) = E(N)E(Y^2)$. Mit der Dichte $f(x) = \alpha\, b^{\alpha}\, x^{-\alpha-1}$ von X gilt

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_a^{a+h} (x-a)\, f(x)dx + h \int_{a+h}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_a^{a+h} x f(x)dx - a\,(F(a+h)-F(a)) + h\,(1-F(a+h)) \;, \\
E(Y^2) &= \int_a^{a+h} (x-a)^2 f(x)dx + h^2 \int_{a+h}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_a^{a+h} x^2 f(x)dx - 2a \int_a^{a+h} x f(x)dx + a^2\,(F(a+h)-F(a)) \\
&\quad + h^2\,(1-F(a+h)) \;.
\end{aligned}$$

Mit $\int_a^{a+h} x^k f(x)dx = \int_a^{a+h} \alpha b^{\alpha} x^{k-\alpha-1} dx = ab^{\alpha}\left[\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\right]_a^{a+h} = \frac{\alpha b^{\alpha}}{k-\alpha}\left((a+h)^{k-\alpha} - a^{k-\alpha}\right)$ und den vorgegebenen Werten für a, h, b und α wird schließlich

$$\begin{aligned}
F(a) &= 7/8, \\
F(a+h) &= 26/27 \\
E(Y) &= \frac{1}{2} - \frac{19}{54} + \frac{5}{27} \;=\; \frac{1}{3}, \\
E(Y^2) &= 3 - 4 + \frac{38}{27} + \frac{25}{27} \;=\; \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

$$E(Z) = 8 \quad \text{sowie}$$
$$\text{Var}(Z) = 32\,.$$

Einsatz von Faustformeln zur Plausibilierung:
Der Rückversicherer muss mit $E(N)(1-F(a)) = 3$ XL-Schäden rechnen. Die Höhe des XL-Schadens liegt zwischen 0 und 5, und wird daher im Mittel grob mit 2,5 angesetzt (wegen der Schiefe der Verteilung zwar an sich niedriger, aber dem steht ein hoher (8/27) Anteil von Maximalschäden gegenüber). Dies ergibt $E(Z) \approx 7{,}5$. Für $\text{Var}(Z)$ gibt es die recht gute obere Abschätzung durch $h \cdot E(Z) \approx 37{,}5$.

7. Aufgabe (30 Punkte) Zusatzaufgabe, Simulation

a) Welche Simulationsverfahren bezeichnet man als *Markov Chain Monte Carlo Verfahren*? (5 Punkte)

b) Beschreiben Sie die Simulation eines $d-$dimensionalen Zufallsvektors X mit beschränkter Dichte $f(x_1, \ldots, x_d)$ mit dem Gibbs-Sampling-Verfahren. (10 Punkte)

c) Sei $f(x, y)$ eine Dichte mit $0 \leq f(x, y) \leq M$, und $g(y)$ sei eine beliebige Dichte. Bei fest gewähltem x wird die Zufallsvariable X folgendermaßen erzeugt: Man zieht eine Zufallszahl Y mit Dichte $g(y)$ und eine Zufallszahl U mit der Gleichverteilung auf $(0, M)$. Ist $f(x, Y) > U$, dann setzt man $X = Y$; ansonsten zieht man ein neues Paar (U, Y). Welche Verteilung besitzt X? (15 Punkte)

Lösung:

Zu a)

Das sind diejenigen Simulationsverfahren, bei denen man nicht direkt die interessierende Verteilung heranzieht (weil sie nicht zugänglich ist), sondern eine Markov-Kette simuliert, deren stationäre Verteilung die gesuchte Verteilung ist.

Zu b)

Man simuliert eine Markov-Kette $d-$dimensionaler Zufallsvektoren, ausgehend von einem Startvektor $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, \ldots, X_d^{(0)})$ in d Schritten zu einem Zufallsvektor $X^{(1)}$, wobei man folgende Übergangsdichten benutzt:

$$x \to f\left(x, X_2^{(0)}, \ldots, X_d^{(0)}\right),$$
$$x \to f\left(X_1^{(1)}, x, X_3^{(0)}, \ldots, X_d^{(0)}\right),$$
$$x \to f\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, x, X_4^{(0)}, \ldots, X_d^{(0)}\right), \ldots$$
$$x \to f\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{d-1}^{(1)}, x\right).$$

Zunächst werden eine Anzahl solcher Verktoren $X^{(k)}, k = 1, \ldots, K$, erzeugt, damit die Verteilung der $X^{(k)}, k > K$, nahe bei der stationären Verteilung liegt (*burn in Phase*). Erst danach werden die Vektoren $X^{(k)}$ für die Monte-Carlo-Simulation verwendet; beispielsweise zur Berechnung von $E[f(X)]$ durch

$$\frac{1}{M}\sum_{k=K+1}^{K+M} f\left(X^{(k)}\right) .$$

Zu c)

Zur Berechnung der Verteilung von X betrachten wir ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X < t\} =& \mathbb{P}\{Y < t | f(x, Y) > U\} = \frac{\mathbb{P}\{Y < t \;\&\; f(x, Y) > U\}}{\mathbb{P}\{f(x, Y) > U\}} \\ =& \frac{\int_{-\infty}^{t} g(y) f(x, y)/M dy}{\int g(y) f(x, y)/M dy} = \frac{\int_{-\infty}^{t} g(y) f(x, y) dy}{\int g(y) f(x, y) dy}\end{aligned}$$

Hat also (Z, Y) die gemeinsame Dichte $f(z, y)g(y)$ (dies ist eine Dichte, wenn für festes y die Funktion $x \to f(x, y)$ eine Dichte ist), dann ist die Verteilung von X die bedingte Verteilung von Y, gegeben $Z = x$.