Bericht zur Prüfung im Oktober 2005 über Schadenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

Diesmal waren wieder 6 Aufgaben und eine Zusatzaufgabe gestellt worden. Die Zusatzaufgabe wurde nur bewertet, wenn eine der 6 anderen Aufgaben nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet markiert wurde. Angegeben ist jeweils die maximale Punktzahl für die Aufgaben. Insgesamt waren 180 Punkte möglich. Zum Bestehen der Klausur reichten 72 Punkte. Zugelassen waren die klassische Formelsammlung, die verteilt wurde, sowie ein Tascherechner. Von den 37 Teilnehmern haben 31 die Klausur bestanden.

1. Aufgabe (25 Punkte) Grundwissen, Kopulas

Sei $0 < u_0 < 1$, und für eine beliebige zweidimensionale Kopula $C(u, v)$ sei

$$\rho(C) = \frac{C(u_0, u_0) - u_0^2}{u_0(1 - u_0)}.$$

Zeigen Sie, dass für dieses einfache Risikomß

a) $-1 \le \rho(C) \le 1$ für beliebige Kopula C;

b) $\rho(C) = 0$ für die Unabhängigkeitskopula;

c) $\rho(C) = 1$ für die Komonotonie-Kopula $C(u, v) = \min(u, v)$.

d) Geben Sie eine weitere Kopula $C(u, v)$ an, für die $\rho(C) = 1$ gilt.

Lösung:

Zu a)Wegen $C(u, v) \le C(u, 1) = u$ ist

$$\rho(C) \le (u_0 - u_0^2)/(u_0(1 - u_0)) = 1.$$

Andererseits ist nach der Frechet-Hoeffding Ungleichung

$$C(u, v) \ge \max(u + v - 1, 0)$$

und damit für $u_0 \le 1/2$

$$\rho(C) \ge -u_0^2/(u_0(1 - u_0)) = -u_0/(1 - u_0) \ge 1.$$

Für $u_0 > 1/2$ gilt analog

$$\begin{aligned} \rho(C) \ge (2u_0 - 1 - u_0^2)/(u_0(1 - u_0)) &= \\ -(1 - u_0)^2/(u_0(1 - u_0)) &= -(1 - u_0)/u_0 \ge -1. \end{aligned}$$

Hierbei wird benutzt, dass $u \to u/(1 - u)$ monoton wächst und $u \to (1 - u)/u$ monoton fällt.

Zu b)
Für die Unabhängigkeitskopula gilt $C(u,v) = uv$ und damit

$$\rho(C) = (u_0^2 - u_0^2)/(u_0(1-u_0)) = 0.$$

Zu c)
Für die Komonotonie-Kopula gilt $C(u,u) = u$ und damit

$$\rho(C) = (u_0 - u_0^2)/(u_0(1-u_0)) = 1.$$

Zu d)
Die folgende Kopula $C(u,v)$ erfüllt stets $\rho(C) = 1$:

$$C(u,v) = \begin{cases} \min(u,v) & \text{falls} \quad u \leq u_0 \text{ oder } v \leq u_0 \\ u_0 + \frac{1}{1-u_0}(u-u_0)(v-u_0) & \text{falls} \quad u > u_0 \text{ und } v > u_0 \end{cases}$$

Sei Q_1 die Gleichverteilung auf $u = v \leq u_0$ und Q_2 die Gleichverteilung auf $(u_0, 1)^2$. Die Funktion $C(u,v)$ ist eine Kopula, es ist

1. die Verteilungsfunktion der Verteilung P, die als Kombination

$$P = u_0 Q_1 + (1-u_0) Q_2$$

   geschrieben werden kann und
2. die $C(u,1) = C(1,u) = u$ erfüllt.

Anmerkung: Die Aufgabenstellung in der Klausur enthielt in a) den Schreibfehler

$$0 \leq \rho(C) \leq 1.$$

Die meisten Klausurteilnehmer haben diesen unschönen Fehler entdeckt, sie sind dafür mit zwei zusätzlichen Punkten belohnt worden.

2. Aufgabe (30 Punkte) Solvabilität, Kapitalkosten

Das Versicherungsgeschäft eines Erstversicherers sei modelliert durch einen Lundberg-Prozess mit Schadenfrequenz $\lambda = 100$ und mit der Schadenhöhenverteilung Exp(1/100), der Exponentialverteilung mit Mittelwert 100. Für das Eigenkapital s ist ein Zins von 10% zu bezahlen. Das Unternehmen will eine Ruinwahrscheinlichkeit von $0,01$ einhalten.
Zeigen Sie: Die Gesamtkosten, also $c + 0,1s$ (Prämie plus Kapitalkosten), sind mit $c = 10.678,80$ optimal gewählt. Dies bedeutet, dass ein Eigenkapital von $7.141,70$ investiert wird und dass bei jedem anderen Eigenkapital, mit dem die Ruinwahrscheinlichkeit $0,01$ eingehalten wird, höhere Gesamtkosten entstehen.

Lösung:

Nach Formelsammlung berechnet sich die Ruinwahrscheinlichkeit zum Startkapital s als

$$\psi(s) = \frac{1}{1+\theta} \exp(-Rs),$$

wobei $\theta = (c - \lambda\mu)/(\lambda\mu))$ der relative Sicherheitszuschlag in der Prämie c und $\mu = \lambda = 100$ ist, und $R = \theta/((1+\theta)\mu)$ ist der Anpassungskoeffizient des Risikomodells. Über die Forderung $\psi(s) = 0,01$ hängen die Größen c und s zusammen:

$$s = -\frac{1}{R}\log(0,01c/10.000) = -\frac{100(1+\theta)}{\theta}\log(0,01(1+\theta))$$

und

$$c = 10.000(1+\theta).$$

Wir schreiben die Gesamtkosten $G = G(\theta)$ als Funktion von θ und wählen θ so, dass G minimal wird. Dabei ist

$$G = c + 0.1s = 10.000(1+\theta) + 0,1\frac{100(1+\theta)}{\theta}(-\log(0,01(1+\theta)))$$

mit

$$G'(\theta) = 10.000 + 10\log(0,1(1+\theta))/\theta^2 - 10/\theta.$$

In der Aufgabe wird als Lösung des Optimierungsproblems $c = 10.678,8$ oder $\theta = 0,06788$ vorgeschlagen. Dieser Wert führt zu $G'(\theta) = 0,693598$, was nahe genug an Null ist, um den Wert als Minimum zu akzeptieren. Für $\theta = 0,06787$ erhält man $G'(\theta) = -2.251846$.

3. Aufgabe (35 Punkte) Tarifierung, ML-Schätzer

Zur Parameterschätzung in parametrischen Modellen verwendet man den Maximum-Likelihood Schätzer. Betrachten Sie den Fall unabhängiger beobachteter Schadenhöhen $X_1, ...,$ X_n, die eine skalierte amerikanische Pareto-Verteilung mit der Dichte

$$p(x, a, b) = ab(1+bx)^{-a-1}$$

besitzen.

a) Wie lauten die Bestimmungsgleichungen (die *Normalengleichungen*) für den ML-Schätzer $(\hat{a}, \hat{b})$ der beiden Parameter (a, b)?

b) Berechnen Sie $\hat{a}$ und die asymptotische Varianz von $\hat{a}$ für den Fall, dass b bekannt ist.

c) Berechnen Sie für den Fall, dass beide Parameter unbekannt sind, die asymptotische Kovarianzmatrix des ML-Schätzers. Benutzen Sie hierfür die Relationen

$$E[X/(1+bX)] = \frac{1}{b(a+1)},$$

$$E[(X/(1+bX))^2] = \frac{2}{b^2(a+1)(a+2)},$$

und führen Sie die Berechnung nur für den Fall $a = 2, b = 1$ durch.

d) Wie kann man mit dieser Kovarianzmatrix eine Approximation für die Wahrscheinlichkeit von

$$|\sqrt{n}(\hat{a} - a)| < 1 \text{ und } |\sqrt{n}(\hat{b} - b)| < 1$$

bestimmen?

Hinweis: Die Matrix in c) ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Zu a)

Beim Maximum-Likelihood-Schätzer ist

$$L := \sum_{i=1}^{n} \log(ab) - (a+1)\log(1+bX_i)$$

zu maximieren. Die Normalengleichungen hierzu sind

$$0 = \frac{\partial L}{\partial a} L = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} \log(1+bX_i),$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial b} L = \frac{n}{b} - (a+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{b}{1+bX_i}.$$

Zu b)

$$\widehat{a} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1+bX_i) \right)^{-1}$$

Zu c)

Die $2 \times 2-$dimensionale asymptotische Kovarianzmatrix hat die Einträge

$$\begin{aligned}
-E[\partial^2 \log f/\partial a^2] &= 1/a^2, \\
-E[\partial^2 \log f/(\partial a \partial b)] &= E[X/(1+bX)] = \frac{1}{b(a+1)}, \\
-E[\partial^2 \log f/\partial b^2] &= \frac{1}{b^2} - (a+1)E[(X/(1+bX))^2] \\
&= \frac{1}{b^2} - \frac{2}{b^2(a+2)} = \frac{a}{b^2(a+2)}.
\end{aligned}$$

Für $a = 2$ und $b = 1$ erhält man so die Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von Λ, welche man mit der Cramerschen Regel berechnen kann, ist die gesuchte asymptotische Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \Lambda^{-1} = 72 \begin{pmatrix} 1/2 & \text{-}1/3 \\ \text{-}1/3 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & \text{-}24 \\ \text{-}24 & 18 \end{pmatrix}$$

Zu d)

Man berechnet zunächst die asymptotische Kovarianz nicht für $a = 2$ und $b = 1$, sondern für den Maximum-Likelihood-Schätzer $a = \widehat{a}, b = \widehat{b}$. Mit der entstehenden Matrix $\widehat{\Sigma}$ wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch

$$N(0, \widehat{\Sigma})\{(x,y) : x < 1 \text{ und } y < 1\}$$

approximiert. Hierbei ist $N(0, \widehat{\Sigma})$ die zweidimensionale Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Kovarianzmatrix $\widehat{\Sigma}$.

4. Aufgabe (30 Punkte) Tarifkalkulation II

Bei der Tarifkonstruktion müssen die effizientesten Risikomerkmale gefunden werden. Dabei können die ursprünglichen Risikomerkmale manchmal durch Dummyvariablen ersetzt werden.

a) Nennen Sie den wichtigsten Vorteil und den wichtigsten Nachteil des Einsatzes von Dummyvariablen. (4 Punkte)

b) Das Risikomerkmal „Alter“ habe die Ausprägungsklassen 18-23, 24-45, 46-65 und 66-99. Geben Sie an, durch welche Dummyvariablen dieses Risikomerkmal ersetzt werden kann. (5 Punkte)

c) Wieso ist das Ersetzen von nominal skalierten Risikomerkmalen (wie z.B. Regionalklasse oder Typklasse) durch Dummyvariablen problematisch? Wie kann man sich trotzdem einigermaßen behelfen, um das Problem möglichst klein zu halten? (5 Punkte)

d) Jede Dummyvariable teilt die Gesamtheit der Risiken in zwei Gruppen mit Volumen v_1 bzw. v_2 und Schadenbedarf Z_1 bzw. Z_2. Wir nehmen der Einfachheit halber an, die Schadenbedarfe seien normalverteilt mit $E(Z_k) = \mu_k$ und $Var(Z_k) = \sigma^2/v_k$ mit in beiden Gruppen gleichem σ^2. Geben Sie die Dichte von Z_k an. (3 Punkte)

e) Die effizienteste Dummyvariable kann mittels eines Likelihood-Quotienten-Tests auf Gleichheit von Erwartungswerten gefunden werden. Berechnen Sie die entsprechende Testgröße für die in d) beschriebene Situation unter der Annahme, dass σ^2 bekannt ist und Z_1, Z_2 je einmal beobachtet werden. (Geben Sie mindestens an, welche Berechnungsschritte durchzuführen sind.) (10 Punkte)

f) Wieso kann man hier bei der Auswahl der effizientesten Dummyvariable gemäß d) und e) letztlich dann doch auf die Kenntnis des Werts von σ^2 verzichten? (3 Punkte)

Lösung:

Zu a)

Da Dummyvariablen (DV) nur zwei Ausprägungen haben, wird das Datenmaterial nicht so rasch atomisiert wie bei Risikomerkmalen (RM) mit mehreren Ausprägungen, von denen evtl. einige nicht signifikant sind. Letztlich spart man dadurch Parameter. Dafür wächst die Anzahl zu untersuchender Merkmale stark an, z.B. ergibt ein RM mit 10 Ausprägungen mindestens 9 DV.

Zu b)

Das RM kann durch drei Dummyvariablen D_1, D_2, D_3 ersetzt werden, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{array}{llll} D_1 = 1 & \text{falls Alter} \leq 23, & \text{und} & D_1 = 0 \quad \text{sonst,} \\ D_2 = 1 & \text{falls Alter} \leq 45, & \text{und} & D_2 = 0 \quad \text{sonst,} \\ D_3 = 1 & \text{falls Alter} \leq 65, & \text{und} & D_3 = 0 \quad \text{sonst.} \end{array}$$

Dann kann jede Ausprägung des Alters eindeutig durch eine Kombination von höchstens zwei DV beschrieben werden:
die Altersklasse 18-23 durch $D_1 = 1$, die Altersklasse 24-45 durch $D_1 = 0$ und $D_2 = 1$, die Altersklasse 46-65 durch $D_2 = 0$ und $D_3 = 1$, die Altersklasse 66-99 durch $D_3 = 0$.
Dagegen ergibt die Definition von 4 Dummyvariablen $D_i = 1$ in Altersgruppe i, $1 \leq i \leq 4$, eine Kollinearität $\{D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0\} = \{D_4 = 1\}$.

Zu c)

Bei nominal skalierten Risikomerkmalen hat man keine natürliche Anordnung der Ausprägungen und kann daher das in b) benutzte Konstruktionsprinzip „$\leq$ “ nicht nutzen. Man kann sich approximativ dadurch behelfen, dass man die Ausprägungen nach der Höhe ihres beobachteten Schadenbedarfs bzw. Schadensatzes anordnet und dann nur $n-1$ DV entsprechend dieser Anordnung definiert. Würde man dagegen für die n Ausprägungen die $n-1$ Dummyvariablen D_i, $1 \leq i \leq n-1$ benutzen, mit

$$D_1 = 1 \text{ für Ausprägung } i \text{ und } D_i = 0 \text{ sonst,}$$

so wäre es für eine einzelne Dummyvariable kaum möglich, als signifikantes Tarifmerkmal ausgewählt zu werden, da sie sich vom Durchschnitt der anderen Dummyvariablen i.a. nur wenig unterscheidet. Daher müsste man alle relevanten Ausprägungskombinationen durch je eine Dummyvariable beschreiben, was sehr viele Dummyvariablen ergeben kann (bis zu $2^n - 1$).

Zu d)

Die Dichte ergibt sich durch Einsetzen der Parameter μ_k und σ^2/v_k in die Normalverteilungsdichte der Formelsammlung zu

$$f(z|v_k, \mu_k) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2/v_k}} \exp\left(-\frac{(z-\mu_k)^2}{2\,\sigma^2/v_k}\right).$$

Zu e)

1. Schritt: Aufstellen der Likelihoodfunktion L_u der Daten z_1, z_2 bei unterschiedlichen Erwartungswerten μ_1, μ_2:

$$\begin{aligned} L_u &= f(z_1|v_1, \mu_1) \cdot f(z_2|v_2, \mu_2) \\ &= \left(2\,\pi\,\sigma^2/v_1\right)^{-0,5} \cdot \exp\left(-\frac{(z_1-\mu_1)^2}{2\,\sigma^2/v_1}\right) \cdot \left(2\,\pi\,\sigma^2/v_2\right)^{-0,5} \cdot \exp\left(-\frac{(z_2-\mu_2)^2}{2\,\sigma^2/v_2}\right). \end{aligned}$$

2. Schritt: Berechnen der ML-Schätzer für μ_1, μ_2 durch Maximieren von L_u (mittels Nullsetzen der logarithmischen Ableitung):

$$\ln(L_u) = -0,5\,\ln(2\,\pi\,\sigma^2/v_1) - \frac{(z_1-\mu_1)^2}{2\,\sigma^2/v_1} - 0,5\,\ln(2\,\pi\,\sigma^2/v_2) - \frac{(z_2-\mu_2)^2}{2\,\sigma^2/v_2},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \ln(L_u) = \frac{z_k - \mu_k}{\sigma^2/v_k} \implies \hat{\mu}_k = z_k,\ k = 1, 2\,.$$

3. Schritt: Aufstellen der Likelihoodfunktion L_g der Daten bei gemeinsamem Erwartungswert $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$\begin{aligned} L_g &= f(z_1|v_1, \mu) \cdot f(z_2|v_2, \mu) \\ &= \left(2\,\pi\,\sigma^2/v_1\right)^{-0,5} \cdot \exp\left(-\frac{(z_1-\mu)^2}{2\,\sigma^2/v_1}\right) \cdot \left(2\,\pi\,\sigma^2/v_2\right)^{-0,5} \cdot \exp\left(-\frac{(z_2-\mu)^2}{2\,\sigma^2/v_2}\right). \end{aligned}$$

4. Schritt: Berechnen des ML-Schätzers für μ (analog zum 2. Schritt):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(L_g) = \frac{z_1 - \mu}{\sigma^2/v_1} + \frac{z_2 - \mu}{\sigma^2/v_2} \implies \hat{\mu} = \frac{v_1\,z_1 + v_2\,z_2}{v_1 + v_2}\,.$$

5. Schritt: Die Testgröße des LQ-Tests ist das Doppelte des logarithmierten Quotienten der beiden maximierten Likelihoods (d.h. nach Einsetzen der ML-Schätzer):

$$2 \ln \frac{L_u(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)}{L_g(\hat{\mu}, \hat{\mu})} = 2\left(\ln(L_u) - \ln(L_g)\right) = \frac{(z_1 - \hat{\mu})^2}{\sigma^2/v_1} + \frac{(z_2 - \hat{\mu})^2}{\sigma^2/v_2}.$$

Diese Testgröße ist nach der allgemeinen ML-Theorie asymptotisch verteilt wie ein Chi-Quadrat mit 1 Freiheitsgrad. Setzt man die Beziehung für $\hat{\mu}$ ein, so ergibt sich als Testgröße $\frac{1}{\sigma^2}\frac{v_1 v_2}{v_1+v_2}(z_1 - z_2)^2$, was bis auf den Faktor σ^{-2} mit dem Kriterium des Ward-Verfahrens übereinstimmt.

Zu f)

Weil die LQ-Testgröße für alle Dummyvariablen dieselbe Gestalt und damit die gleiche Verteilung hat, so dass der gemeinsame Faktor σ^{-2} die Größenverhältnisse nicht beeinflusst Die Dummyvariable mit dem höchsten Wert von

$$v_1(z_1 - \hat{\mu})^2 + v_2(z_2 - \hat{\mu})^2 = v_1 v_2 (z_1 - z_2)^2/(v_1 + v_2)$$

ist das effizienteste Risikomerkmal. Dagegen haben die LQ-Testgrößen bei Risikomerkmalen mit unterschiedlich vielen Ausprägungsklassen asymptotische Chi-Quadrat-Verteilungen mit unterschiedlich vielen Freiheitsgraden, also verschiedene Verteilungen.

5. Aufgabe (30 Punkte) Schadenreservierung

$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ seien die üblichen Bezeichnungen für Zuwachs (S) und Stand (C) des Schadenaufwands von Anfalljahr i (mit bekanntem Volumen v_i) zum Ende von Entwicklungsjahr k, $1 \le i, k \le n, C_{i0} = 0$.

a) Geben Sie die Modellannahmen des Chain-Ladder-Modells (CL-Modell) an. (3 Punkte)

b) Sei $D_{i,k-1} = \{C_{i1}, C_{i2}, ..., C_{i,k-1}\}$. Berechnen Sie für das CL-Modell die beiden bedingten Erwartungswerte $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}|D_{i,k-1}\right)$ und $E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}|D_{i,k-1}\right)$, und geben Sie jeweils an, welche der Modellannahmen Sie wo verwendet haben. (5 Punkte)

c) Geben Sie die Modellannahmen des Modells bei anfalljahrunabhängigen Zuwachsquoten (ZQ-Modell) an. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie für das ZQ-Modell ebenfalls $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}|D_{i,k-1}\right)$ und $E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}|D_{i,k-1}\right)$ mit $D_{i,k-1}$ wie in b), und geben Sie jeweils an, welche der Modellannahmen Sie wo verwendet haben. (5 Punkte)

e) Wie kann man die Erkenntnisse aus b) und d) nutzen, um für festes k zu entscheiden, welches der beiden Modelle besser zu den gegebenen Daten passt? (7 Punkte)

f) Welche der folgenden Aussagen (i) bis (iv) ist richtig (mit Beweis)? (7 Punkte)

Die Gleichung $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) = \frac{E(S_{ik})}{E(C_{i,k-1})}$ gilt

(i) in beiden Modellen,
(ii) im CL-Modell,

(iii) im ZQ-Modell,

(iv) in keinem der beiden Modelle.

Lösung:

Zu a)

(i) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, ..., C_{in}\}$, $1 \leq i \leq n$, sind unabhängig.

(ii) $E(C_{ik}/C_{i,k-1}|C_{i1}, ..., C_{i,k-1}) = f_k$ für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq n$.

(iii) $Var(C_{ik}/C_{i,k-1}|C_{i1}, ..., C_{i,k-1}) = \sigma_k^2/C_{i,k-1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq n$.

Zu b)

$$E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}|D_{i,k-1}\right) = E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} - 1|D_{i,k-1}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} f_k - 1\,.$$

$$E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}|D_{i,k-1}\right) = \frac{C_{i,k-1}}{v_i}E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} - 1|D_{i,k-1}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \frac{C_{i,k-1}}{v_i}(f_k - 1)\,.$$

Zu c)

(i) Die Zuwächse S_{ik}, $1 \leq i, k \leq n$, sind global unabhängig.

(ii) $E(S_{ik}/v_i) = m_k$ für $1 \leq i, k \leq n$.

(iii) $Var(S_{ik}/v_i) = s_k^2/v_i$ für $1 \leq i, k \leq n$.

Zu d)

$$E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}|D_{i,k-1}\right) = \frac{1}{C_{i,k-1}}E(S_{ik}|D_{i,k-1}) \overset{\text{(i)}}{=} \frac{E(S_{ik})}{C_{i,k-1}} = \frac{v_i}{C_{i,k-1}}E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \frac{v_i}{C_{i,k-1}}m_k\,,$$

$$E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}|D_{i,k-1}\right) \overset{\text{(i)}}{=} E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} m_k\,.$$

Hier wird die Annahme (i) entscheidend gebraucht.

Zu e)

Man plotte für festes k einerseits (Plot 1) $\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}$ gegen $\frac{v_i}{C_{i,k-1}}$ und andererseits (Plot 2) $\frac{S_{ik}}{v_i}$ gegen $\frac{C_{i,k-1}}{v_i}$. Trifft das CL-Modell auf die Daten zu, so haben gemäß b) die Punkte in Plot 1 keinen (positiven) Trend, da sie nur zufällig um $f_k - 1$ streuen und nicht von $v_i/C_{i,k-1}$ abhängen; die Punkte ind Plot 2 jedoch streuen um den (i.a. positiven) Trend $f_k - 1$. Trifft dagegen das ZQ-Modell zu, so ist es gerade umgekehrt, d.h. gemäß d) haben die Punkte in Plot 1 einen i.a. positiven Trend m_k, die in Plot 2 dagegen keinen Trend. Zeigt also Plot 1 einen Trend und Plot 2 nicht, so entscheide man sich für das ZQ-Modell. Zeigt aber Plot 2 einen Trend und Plot 1 nicht, so ist das CL-Modell vorzuziehen.

Zu f)

Richtig ist Aussage (ii), d.h. die Gleichung gilt nur im CL-Modell:
Im CL-Modell gilt nach b) $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}|D_{i,k-1}\right) = f_k - 1$, woraus einerseits $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) = f_k - 1$ und andererseits $E(S_{ik}|D_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\,(f_k - 1)$ folgt. Aus Letzterem folgt $E(S_{ik}) = E(C_{i,k-1})\,(f_k - 1)$, was zusammen mit der „einerseits"-Beziehung zeigt, dass die Gleichung $E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) = \frac{E(S_{ik})}{E(C_{i,k-1})}$ im CL-Modell gilt, da beide Seiten gleich $f_k - 1$ sind.

Im ZQ-Modell folgt aus der Modellannahme (i) die Beziehung

$$E\left(\frac{S_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) = E(S_{ik})E\left(\frac{1}{C_{i,k-1}}\right),$$

aber Letzteres ist nicht gleich $E(S_{ik})\,\frac{1}{E(C_{i,k-1})}$ wegen der Jensenschen Ungleichung, sonst wäre $C_{i,k-1}$ konstant.

6. Aufgabe (30 Punkte) Risikoteilung

Sei S der Jahresgesamtschaden eines gegebenen Erstversicherungs-Portefeuilles und b die zugehörige Nettoprämie (= Brutto minus Akquisitions- und Verwaltungskosten). Sei Q der Selbstbehaltsschaden und $R := S - Q$ der Rückversicherungsschaden unter einer beliebigen Rückversicherungskonstruktion sowie $b(R)$ der an den Rückversicherer (RVU) gehende Teil von b und $b(Q) := b - b(R)$ der dem Erstversicherer (EVU) verbleibende Teil. Etwaige beim EVU entstehende, ausschließlich durch die Rückversicherung (RV) bedingte Verwaltungskosten werden ignoriert.

a) Wie soll sich der EVU gemäß dem Varianzmodell zwischen verschiedenen RV-Alternativen $(Q_i, b(Q_i))$, $i \in I$, entscheiden? Nennen Sie die beiden möglichen Entscheidungsprinzipien. (5 Punkte)

b) Sei nun Q_a der Selbstbehaltsschaden des EVU unter einer unlimitierten XL-RV mit Priorität a und sei $R_a := S - Q_a$. Geben Sie die aus dem Kollektiven Modell resultierende Größer-/Kleiner-Relation für die drei paarweisen Vergleiche der Variationskoeffizienten $Vko(Q_a)$, $Vko(R_a)$, $Vko(S)$ an (ohne Beweis). (3 Punkte)

c) Seien nun Q_a, R_a wie in b) und Q^*, R^* diejenige Quoten-RV mit $E(Q^*) = E(Q_a)$. Benutzen Sie das Ergebnis von b) um zu zeigen, dass dann $Var(Q_a) \leq Var(Q^*)$ gilt. (4 Punkte)

d) Geben Sie zur XL-RV Q_a, R_a (wie in b)) eine andere RV (Q, R) an, für die $E(Q) = E(Q_a)$ und $Var(Q) \leq Var(Q_a)$ gilt (mit Beweis). (5 Punkte)

e) Sei $Q_0 = c\,S$, $R_0 = (1-c)\,S$ eine feste Quoten-RV. Beweisen Sie, dass für jede andere RV-Form (Q, R) mit $Var(R) = Var(R_0)$ die Relation $Var(Q) \geq Var(Q_0)$ gilt. (8 Punkte)

f) Unter welchen Bedingungen ist gemäß e) im Varianzmodell die Quote die für den EVU optimale RV-Entscheidung (mit Beweis)? (5 Punkte)

Lösung:

Zu a)

Entweder gibt sich der EVU eine Obergrenze v_0 für $Var(Q_i)$ vor und wählt unter allen $(Q_i, b(Q_i))$ mit $Var(Q_i) \leq v_0$ diejenige RV-Form i, die den erwarteten Selbstbehaltsgewinn $b(Q_i) - E(Q_i)$ maximiert, oder er gibt sich einen Mindestgewinn e_0 vor und wählt unter allen $(Q_i, b(Q_i))$ mit $b(Q_i) - E(Q_i) \geq e_0$ diejenige RV-Form i, die $Var(Q_i)$ minimiert.

Zu b)

Es gilt $Vko(Q_a) \leq Vko(S) \leq Vko(R_a)$ (echte Ungleichheit bis auf extreme Fälle). Beweis siehe Buch „Schadenversicherungsmathematik“, Abschnitt 4.2.4.

Zu c)

Für jede Quoten-RV $Q = c\,S$, also auch für Q^*, gilt $Vko(Q) = Vko(S)$. Daher folgt aus b) $Vko(Q_a) \leq Vko(Q^*)$, und daraus wegen der Gleichheit $E(Q_a) = E(Q^*)$ des Nenners des Variationskoeffizienten schließlich das gewünschte $Var(Q_a) \leq Var(Q^*)$.

Zu d)

Die Risikoteilung $Q := E(Q_a|S)$, $R := S - Q = E(S|S) - E(Q_a|S) = E(R_a|S)$ leistet das Gewünschte, denn es gilt $E(Q) = E(E(Q_a|S)) = E(Q_a)$ und $Var(E(Q_a|S)) \leq Var(E(Q_a|S)) + E(Var(Q_a|S)) = Var(Q_a)$. Eine andere Lösung ist der Stop Loss, wobei der Beweis aber ebenfalls den obigen Beweisschritt enthält.

Zu e)

Wegen $Q + R = S = Q_0 + R_0$ gilt $Var(Q + R) = Var(Q_0 + R_0)$ und daher $Var(Q) + 2Cov(Q, R) + Var(R) = Var(Q_0) + 2Cov(Q_0, R_0) + Var(R_0)$, so dass angesichts von $Var(R) = Var(R_0)$ nur noch $Cov(Q, R) \leq Cov(Q_0, R_0)$ zu zeigen ist. Hierfür genügte der intuitive Hinweis, dass die Quoten-Teile $Q_0 = c\,S$ und $R_0 = (1-c)\,S$ „mehr" Kovarianz haben als andere Risikoteilungen. Der formale Beweis geht so:
Für jede andere RV-Form (Q, R) gilt $Var(Q) = Var(S - R) = Var(S) - 2 \cdot Cov(S, R) + Var(R)$. Hier setzen wir nun die stets gültige Ungleichung $Cov(S, R) \leq Sta(S) \cdot Sta(R)$ ein sowie aus der Voraussetzung $Var(R) = Var(R_0) = Var((1 - c)\,S)$ und $Sta(R) = Sta((1 - c)\,S)$. Damit wird

$$\begin{aligned}
Var(Q) &\geq Var(S) - 2 \cdot Sta(S) \cdot Sta(R) + Var(R)\\
&= Var(S) - 2 \cdot Sta(S) \cdot Sta((1 - c)\,S) + Var((1 - c)\,S)\\
&= Var(S) - 2\,(1 - c)\,Var(S) + (1 - c)^2\,Var(S)\\
&= c^2\,Var(S) = Var(c\,S) = Var(Q_0).
\end{aligned}$$

Zu f)

Wenn die RV-Pramie $b(R)$ bei allen RV-Formen nach dem (verallgemeinerten) Varianzprinzip bestimmt wird, d.h. $b(R) = E(R) + g(Var(R))$ mit einer monoton wachsenden Funktion g, dann ist die Quoten-RV die nach dem Varianzmodell für den EVU optimale RV-Form.
Begründung: Sei (Q, R) eine beliebige RV-Form und (Q_0, R_0) diejenige Quoten-RV mit $Var(R_0) = Var(R)$. Dann ist auch $g(Var(R_0)) = g(Var((R))$ und daher haben beide RV-Formen dasselbe erwartete Selbstbehaltsergebnis $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q) = b - E(R) - g(Var(R)) - E(Q) = b - E(S) - g(Var(R))$. Da aber die Quoten-RV gemäß e) die niedrigere Selbstbehaltsvarianz $Var(Q_0) \leq Var(Q)$ hat, wird sie gemäß Varianzprinzip für jedes Niveau e_0 des Selbstbehaltsergebnisses gegenüber (Q, R) bevorzugt.

7. Aufgabe (25 Punkte) Zusatzaufgabe, Phasentypverteilungen

a) Zeigen Sie: Mit den Parametern

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \pi = (1, 0)$$

wird die Summenverteilung

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} Q^{*n}$$

mit der Erlangverteilung $Q = Exp(2)*Exp(2)$ als Schadenhöhenverteilung dargestellt.

b) Sei $0 < a < 1$ und $Q = aExp(1) + (1-a)Exp(2)$. Stellen Sie die zweifache Faltung Q^{*2} sowie die Summenverteilung

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)p^{n-1}Q^{*n}$$

als Phasentypverteilung dar.

Lösung:

Zu a)

Der zugehörige Markov-Prozess startet in 1, wartet dort eine Zeit, welche Exp(2)-verteilt ist, und springt dann in den Zustand 2. Dort verweilt er wieder eine Zeit mit derselben Verteilung Exp(2), und danach gibt es zwei mögliche Fortsetzungen: entweder er springt zurück in Zustand 1, und die Wanderung beginnt auf's Neue, oder der Prozess endet im absorbierenden Zustand. Beides tritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 auf. Die Verteilung der Summe unabhängiger Wartezeiten ist die Faltung der Verteilungen der einzelnen Wartezeiten, und damit gilt

$$P = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q * P, \tag{1}$$

wobei $Q = Exp(2) * Exp(2)$ die Verteilung der Summe der ersten beiden Wartezeiten ist. Aus (1) kann man die Verteilung P mit momenterzeugenden Funktionen berechnen:

$$MEF_P(t) = \frac{1}{2}MEF_Q(t)MEF_P(t) + \frac{1}{2}MEF_Q(t)$$

oder

$$MEF_P(t) = \frac{MEF_Q(t)/2}{1 - MEF_Q(t)/2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} MEF_Q(t)^n.$$

Dies ist gerade die momentenerzeugende Funktion der Verteilung P in der Aufgabenstellung.

Zu b)

Die Verteilung Q hat die Darstellung als Phasentypverteilung mit Intensitätsmatrix und Startvektor gegeben durch

$$B^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \pi^0 = (a, 1-a).$$

Die zweifache Faltung von Q hat die Darstellung

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \pi = (a, 1-a, 0, 0).$$

Für die Darstellung B^*, π^* der Summenverteilung benutzt man am besten die Vorstellung, dass am absorbierenden Zustand ein Engel steht, der den Markov-Prozess mit Wahrscheinlichkeit p wieder starten und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ endgültig stoppen lässt. Dies führt zu Einträgen b^*_{ij} der 2×2 Intensitätsmatrix B^* nach folgender Formel:

$$b^*_{ij} = b^0_{ij} + p\pi^0_j b^0_{i0}.$$

Hierbei ist $b_{i0}^0 = -b_{i1}^0 - b_{i2}^0$ die Übergangsintensität von i zum absorbierenden Zustand 0. Die Summenverteilung hat dann die Darstellung

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 + ap & (1-a)p \\ 2ap & -2 + 2(1-a)p \end{pmatrix}, \pi^* = (a, 1-a).$$