Bericht über die Prüfung im Oktober 2003 über Mathematik der Schadenversicherung (Spezialwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

Die Prüfung im Spezialwissen Schadenversicherungsmathematik fand am 18. Oktober 2003 mit 42 Kandidaten statt. Die Aufgaben waren in 3 Stunden zu lösen, und jede Aufgabe war mit einer maximalen Punktzahl gekennzeichnet. Insgesamt waren 180 Punkte zu erreichen, und mit 72 Punkten wurde die Klausur als bestanden bewertet. Die Verfasser haben alle Aufgaben gestellt und die Klausuren korrigiert. Leider haben nur 27 der Kandidaten die Klausur bestanden.

1. Aufgabe (30 Punkte)

a) Seien X, Y, Z stochastisch unabhängig mit Verteilung $Exp(1)$. Sei

$$U = \min(X, Y)$$

und

$$V = \min(X, Z).$$

Die Zufallsvariablen U, V sind dann stochastisch abhängig mit Randverteilung $Exp(2)$. Zeigen Sie, dass (U, V) die Kopula

$$\begin{aligned} C(u,v) &= u + v - 1 + (1-u)(1-v)^{1/2}, \ v \le u \\ &= u + v - 1 + (1-v)(1-u)^{1/2}, \ u \le v \end{aligned}$$

besitzt, und dass

$$\lim_{u\to\infty} P(U > u \mid V > u) = 0. \tag{1}$$

Welche Interpretation gibt man der Beziehung (1) ? (20 Punkte)

b) Sei $P = (1-p)\delta_0 + pExp(a),\ Q = (1-q)\delta_0 + qExp(b)$. Stellen Sie $P * Q$ als verallgemeinerte Phasentypverteilung auf einem möglichst kleinen Zustandsraum dar. (10 Punkte)

Lösung:
a) Wir stellen zunächst $P(U \le u, V \le v)$ für $u \le v$ dar als

$$\begin{aligned} &P(U \le u, V \le v) = \\ &\quad = 1 - P((U > u \text{ oder } V > v) \\ &\quad = 1 - P(U > u) - P(V > v) + P(U > u \ \&\ V > v) \\ &\quad = 1 - e^{-2u} - e^{-2v} + P(X > v \ \&\ Y > u \ \&\ Z > v) \\ &\quad = 1 - e^{-2u} - e^{-2v} + e^{-2v}e^{-u}. \end{aligned}$$

Die Verteilung von U und V ist jeweils $Exp(2)$ mit Verteilungsfunktion $F(u) = 1 - e^{-2u}$ (was man z.B. an $P(U > u) = P(X > u \ \&\ Y > u) = P(X > u)^2 = \exp(-2u)$ ablesen kann). Die Kopula von (U, V) ist somit wegen $F^{-1}(u) = -\frac{1}{2}\log(1-u)$

$$\begin{aligned} C(u,v) &= P(U < F^{-1}(u), V < F^{-1}(v)) \\ &= 1 - (1-u) - (1-v) + (1-u)^{1/2}(1-v). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich die entsprechende Formel für $v \leq u$. Den Limes

$$\lim_{u \to \infty} P(U > u \mid V > u)$$

erhält man als

$$\begin{aligned}\lim_{u \to 1} P(F(U) > u \mid F(V) > u) \\ &= \lim_{u \to 1} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u} \\ &= \lim_{u \to 1} \frac{(1-u)^{3/2}}{1-u} = 0.\end{aligned}$$

Dieses asymptotische Verhalten nennt man *asymptotische Tail-Unabhängigkeit*: die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten großer Werte für U und V ist klein, zumindest von einer Ordnung, die kleiner als die Tailwahrscheinlichkeit von U ist.

b) Nach der binomischen Formel ist

$$P * Q = (1-p)(1-q)\delta_0 + p(1-q)Exp(a) + q(1-p)Exp(b) + pqExp(a) * Exp(b).$$

Es gab Lösungen mit Zustandsräumen mit 7, 5 und 3 Zuständen, von denen hier nur die minimale Lösung dargestellt werden soll. Der Startvektor ist

$$\pi = ((1-p)(1-q), q(1-p), p),$$

und der nicht-triviale Teil der Intensitätsmatrix ist

$$B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ aq & -a \end{pmatrix}.$$

Beim Start im Zustand 2 wechselt man in Zustand Null mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ (dies ergibt den Term $p(1-q)Exp(a)$), und mit Wahrscheinlichkeit q wechselt man in den Zustand 1 (dies ergibt den Term $pqExp(a) * Exp(b)$). Beim Start in Zustand 1 wechselt man mit Ablauf der Wartezeit sofort in den Zustand Null, dies ergibt den Term $q(1-p)Exp(b)$.

2. Aufgabe (30 Punkte)

a) Für welche Schadenhöhenverteilungen Q gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit im Lundberg-Modell die asymptotische Beziehung

$$\psi(s) \sim \frac{p}{1-p} H(s, \infty) \ ? \tag{2}$$

Hierbei ist $p = \lambda\mu/c$ und H die Integrierte-Tail-Verteilung mit Dichte

$$h(x) = (1/\mu)Q(x, \infty), \ x > 0.$$

(5 Punkte)

b) Ist s die für das Portefeuille gestellte Reserve und ε die tolerierte Ruinwahrscheinlichkeit, dann sollte, wenn die Approximation (2) genau genug ist, die Bestandsprämie c so gewählt werden, dass

$$\frac{p}{1-p} H(s, \infty) = \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass sich hieraus für c die Formel

$$c = \lambda\mu \frac{1+u}{u}$$

mit $u = \varepsilon / H(s, \infty)$ ergibt. (15 Punkte)

c) Welchen Sicherheitszuschlag $(c - \lambda\mu)/(\lambda\mu)$ erhält man mit der Methode in b), wenn $\varepsilon = 0,001,\ s = 20$ und $Q = Pareto(2)$ gesetzt werden? (10 Punkte)

Lösung:
a) Die asymptotische Beziehung gilt für alle Schadenhöhenverteilungen Q, für welche die zugehörige Leiterhöhenverteilung H subexponentiell ist. Dies ist der Fall für Pareto- und Lognormalverteilungen sowie für Weibull-Verteilungen mit Formparameter $\beta < 1$.

b) Mit $u = \varepsilon / H(s, \infty)$ und $p = \lambda\mu / c$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{p}{1-p} H(s, \infty) = \varepsilon$$

die äquivalenten Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu} &= u, \\ \frac{c}{\lambda\mu} - 1 &= \frac{1}{u}, \\ c &= \lambda\mu \left(1 + \frac{1}{u}\right) \\ &= \lambda\mu \frac{1+u}{u}. \end{aligned}$$

c) Der Mittelwert μ von Q ist 2. Für $s > 1$ ist daher

$$H(s, \infty) = \frac{1}{2} \int_s^\infty x^{-2} dx = \frac{1}{2} s^{-1}.$$

Für $s = 20$ wird dies zu $1/40$, und man erhält

$$u = \frac{\varepsilon}{H(s, \infty)} = 0,001 \times 40 = 0,04.$$

Der Sicherheitszuschlag $(c - \lambda\mu)/(\lambda\mu)$ ist nach Teil b) dasselbe wie $1/u$, also 25.

3. Aufgabe (30 Punkte)

Gegeben seien kreuzklassifizierte Daten X_{ij} mit Volumenmaßen $v_{ij},\ i = 1, ..., I,\ j = 1, ..., J$.
a) Bei gut besetzten Zellen, d.h. wenn $v_{ij} \geq 20$ für alle i, j ist, kann man von annähernd normalverteilten Beobachtungen ausgehen. Geben Sie hierfür eine mathematische Begründung an. (5 Punkte)

b) Für die Daten X_{ij} mit Volumenmaßen v_{ij} wird folgendes allgemeine Modell angenommen: die X_{ij} sind stochastisch unabhängig mit einer Normalverteilung mit Mittelwert μ_{ij} und Varianz σ^2/v_{ij}. Beschreiben Sie den Maxi-mum-Likelihood-Schätzer für $a_i,\ i = 1, ..., I$, in dem Modell $\mu_{ij} = \mu + a_i + b_j$.(10Punkte)

c) Beschreiben Sie das Verfahren, mit dem man das Modell $\mu_{ij} = \mu + a_i$ gegen das Modell $\mu_{ij} = \mu + a_i + b_j$ testen kann, welches auf dem F-Test basiert. Warum kann man hierbei den χ^2-Test nicht verwenden? (15 Punkte)

Lösung:
a) Volumenmaße geben immer an, wie viele Einzelschäden in den Klassen liegen, und dies wird durch unterschiedliche Größen repräsentiert: Prämiensumme, gesamte Versicherungssumme oder auch Zahl der Einzelschäden. Bei $v_{ij} \geq 20$ kann man vermuten, dass die Volumenmaße die Anzahl der Einzelschäden bezeichnen. Dann sind die Beobachtungen in den Zellen arithmetische Mittel von mindestens zwanzig unabhängigen, identisch verteilten Einzelschäden, und diese Mittel sind nach dem Zentralen Grenzwertsatz nahezu normalverteilt.

b) Der Maximum-Likelihood-Schätzer beruht auf der Maximierung der gemeinsamen Dichte

$$\prod_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/v_{ij}}} \exp\left(-\frac{v_{ij}}{2\sigma^2}(x_{ij} - \mu_{ij})^2\right),$$

was äquivalent ist zur Minimierung von

$$\sum_{ij} v_{ij} \left(x_{ij} - \mu_{ij}\right)^2.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist also dasselbe wie der Kleinste-Quadrate-Schätzer. Bei der Modellierung mit

$$\mu_{ij} = \mu + a_i + b_j$$

muss man, um die Parameter identifizieren zu können, normieren. Eine solche Normierungsmöglichkeit besteht in der Konvention $a_1 = b_1 = 0$. Geschätzt werden also die Parameter $\mu, a_2, ..., a_I,\ b_2, ..., b_J$. Die Normalengleichungen für $\mu,\ a_i$ und b_j lauten

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{ij} v_{ij}(x_{ij} - \mu - a_i - b_j), \\
0 &= \sum_{j} v_{ij}(x_{ij} - a_i - b_j),\ i = 2, ..., I, \\
0 &= \sum_{i} v_{ij}(x_{ij} - a_i - b_j),\ j = 2, ..., J.
\end{aligned}$$

Die Parameter $\mu,\ a_i$ und b_j müssen aus diesen Gleichungen numerisch (per Iteration) simultan berechnet werden, eine Auflösung der Gleichung nach den unbekannten Parametern a_i ist nicht möglich.

c) Für den F-Test berechnet man die Maximum-Likelihood-Schätzer $\mu^{(1)},\ a_i^{(1)}$ und $\mu^{(2)}$, $a_i^{(2)},\ b_j^{(2)}$ der beiden Modelle

$$\begin{aligned}
(1):&\ \ \mu_{ij} = \mu + a_i, \\
(2):&\ \ \mu_{ij} = \mu + a_i + b_j,
\end{aligned}$$

und betrachten die damit berechneten Schätzer der Mittelwerte $\mu_{ij}^{(1)} = \mu^{(1)} + a_i^{(1)}$ bzw. $\mu_{ij}^{(2)} = \mu^{(2)} + a_i^{(2)} + b_j^{(2)}$. Mit diesen Mittelwerten bildet man die Summen der Residuen-

Quadrate:

$$S_1 = \sum_{ij} v_{ij}(x_{ij} - \mu_{ij}^{(1)})^2,$$
$$S_2 = \sum_{ij} v_{ij}(x_{ij} - \mu_{ij}^{(2)})^2.$$

Der F-Test basiert auf der Testgröße

$$F = \frac{(S_1 - S_2)(IJ - I)}{S_1(J-1)}.$$

F hat eine F-Verteilung mit Freiheitsgraden $J-1$ und $IJ-I$. Ist der Wert für F größer als das obere $\alpha-$Quantil der F-Verteilung mit den angegebenen Freiheitsgraden, dann wird die Hypothese, dass das Modell (1) wahr ist, verworfen.
Den χ^2-Test kann man nicht verwenden, weil die Varianz σ^2 unbekannt ist: S_1/σ^2 ist zwar χ^2-verteilt mit $IJ-I$ Freiheitsgraden, aber eine Studentisierung (also das Ersetzen des unbekannten Parameters durch einen Schätzer) verändert die Verteilung stark: für $\widehat{\sigma}^2 = \frac{S_1}{IJ-I}$ (dies ist ein effizienter erwartungstreuer Schätzer) wird $S_1/\widehat{\sigma}^2$ eine Konstante, und benutzt man zur Schätzung von σ^2 eine zweite unabhängige Stichprobe, so ist $S_1/\widehat{\sigma}^2$ F-verteilt.

4. Aufgabe (30 Punkte)

(a) Sei $G(\mu, \alpha)$ die Gammaverteilung mit Erwartungswert μ und Formparameter α, d.h. Varianz μ^2/α. In einer Gruppe von n unabhängigen KH-Jahreseinheiten seien alle Risiken identisch gammaverteilt gemäß $G(\mu, \alpha)$. Welche Parameter hat in dieser Schreibweise die Gammaverteilung des Jahresgesamtschadens S und die des Schadenbedarfs Z dieser Risikogruppe? (4 Punkte)

(b) Sei Z_{ik} der Schadenbedarf von Zelle (i,k) mit v_{ik} Jahreseinheiten eines zweifach klassifizierten Tarifs, bei dem das erste Tarifmerkmal die Klassen $i = 1, ..., I$ und das zweite die Klassen $k = 1, ..., K$ hat. In dieser Situation wird häufig die Modellannahme $E(Z_{ik}) = x_i y_k$ mit unbekannten Parametern x_i, y_k gemacht. Zeigen Sie, dass einer dieser Parameter redundant ist, d.h. nicht geschätzt werden muss. (2 Punkte)

(c) Formulieren Sie die Parametrisierung der Erwartungswerte $E(Z_{ik}) = x_i y_k$ gemäß (b) unter Beibehaltung der Bezeichnungen um in ein eindeutig parametrisiertes Verallgemeinertes Lineares Modell (GLM) der Form

$$g\left(E(Z_{ik})\right) = \sum_{j=1}^{J} x_j^{(i,k)} \beta_j,$$

d.h. definieren Sie $g, J, x_j^{(i,k)}$ und β_j mittels der Bezeichnungen von (b) so, dass beide Modelle dieselbe Erwartungswertparametrisierung haben. (10 Punkte)

(d) In einem GLM ist die Varianz der Beobachtungen Z_{ik} weitgehend durch die Varianzfunktion V bestimmt. Wie lautet die vollständige Formel für $Var(Z_{ik})$ in Abhängigkeit von V, und wie lautet die Varianzfunktion V speziell im dem Fall, dass die Z_{ik} gammaverteilt sind? (4 Punkte)

(e) Welcher der vier folgenden Kleinste-Quadrate-Ansätze

1. $\sum_{i,k} v_{ik}\left(Z_{ik} - (x_i + y_k)\right)^2 \; = \min$

2. $\sum_{i,k} v_{ik}(Z_{ik} - x_i y_k)^2 \; = \min$

3. $\sum_{i,k} v_{ik}(Z_{ik} - x_i y_k)^2/(x_i y_k) \; = \min$

4. $\sum_{i,k} v_{ik}\left(\frac{Z_{ik}}{x_i y_k} - 1\right)^2 \; = \min$

entspricht am ehesten dem Gamma-GLM gemäß (c)-(d) und weshalb? (10 Punkte)

Lösung:

(a) Für den Gesamtschaden einer Jahreseinheit R mit Gammaverteilung $G(\mu, \alpha)$ gilt also $Var(R) = \mu^2/\alpha$. Daher gilt für den Formparameter der Gammaverteilung in dieser Schreibweise die Beziehung Formparameter $= E^2/Var$. Für den Jahresgesamtschaden S der Risikogruppe mit n iid Jahreseinheiten R gilt $E(S) = n\mu$ und $Var(S) = n\mu^2/\alpha$. Also ist der Formparameter gleich $(n\mu)^2/(n\mu^2/\alpha) = n\alpha$, d.h. die Verteilung von S ist $G(n\mu, n\alpha)$. Der Schadenbedarf $Z = S/n$ hat $E(Z) = \mu$ und $Var(Z) = \mu^2/(n\alpha)$, d.h. Formparameter $n\alpha$ und Verteilung $G(\mu, n\alpha)$.

(b) Wegen $x_i y_k = (x_i c)(y_k/c)$ sind die Parameter nur bis auf eine Konstante c eindeutig bestimmt. Man kann daher z.B. x_1 beliebig festsetzen oder die zusätzliche Bedingung $y_1 + ... + y_K = 1$ fordern oder wegen $x_i y_k = (x_I y_K)(x_i/x_I)(y_k/y_K)$ auf die $I + K - 1$ Parameter $x_1/x_I, ..., x_{I-1}/x_I, y_1/y_K, ..., y_{K-1}/y_K, x_I y_K$ umparametrisieren usw.

(c) Ausgehend von der eindeutigen Parametrisierung $E(Z_{ik}) = (x_I y_K)(x_i/x_I)(y_k/y_K)$ ergibt sich die vom GLM geforderte lineare Form durch Logarithmieren

$$ln(E(Z_{ik})) = ln(x_I y_K) + ln(x_i/x_I) + ln(y_k/y_K).$$

Nun ergibt sich die geforderte Form des GLM durch die Definitionen $g = ln, J = I + K - 1, \beta_1 = ln(x_I y_K), \beta_j = ln(x_{j-1}/x_I)$ für $2 \le j \le I, \beta_j = ln(y_{j-I}/y_K)$ für $I+1 \le j \le I+K-1$ sowie $x_j^{(i,k)} = 1$ falls $j = 1$ oder $j = i + 1$ oder $j = k + I$ und $x_j^{(i,k)} = 0$ sonst.

(d) Die Varianz hat die Form $Var(Z_{ik}) = \phi V(\mu)/v_{ik}$ mit einem unbekannten Parameter ϕ, und die zur Gammaverteilung gehörende Varianzfunktion lautet $V(\mu) = \mu^2$. Die Begründung steckt im Wesentlichen in Teilaufgabe (a) mit $\phi = 1/\alpha$.

(e) Der Ansatz (iv) passt am besten zum Gammamodell (c)-(d), denn er kann auch in der Form

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i,k} \frac{(Z_{ik} - x_i y_k)^2}{(x_i y_k)^2/(v_{ik}\alpha)} \; = \min$$

geschrieben werden, wobei (bei bekannten Parametern) jeder Summand das Quadrat einer Zufallsgröße mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 ist (letzteres wegen (d)). Man könnte auch kürzer sagen, dass obiger Ausdruck die Summe der Pearson-Residuenquadrate des Gamma-GLM ist. Sind die Z_{ik} annähernd normalverteilt – was zumindest in den stark besetzten Zellen mit $v_{ik}\alpha > 10$ der Fall ist – so ist jeder Summand als Quadrat einer approximativen Standard-Gaußvariablen annähernd chi-quadrat-verteilt mit 1 Freiheitsgrad, d.h. die Summe ist chi-quadrat-verteilt mit I+K Freiheitsgraden. Bei unbekannten Parametern verliert man so viele Freiheitsgrade wie Parameter zu schätzen sind, aber die Summe bleibt approximativ chi-quadrat-verteilt. Daher entspricht der Kleinste-Quadrate-Ansatz (iv) einer Minimum-Chi-Quadrat-Schätzung. Letztere ist in der Regel asymptotisch äquivalent zur Maximum-Likelihood-Schätzung, und diese wird beim GLM angewandt.

5. Aufgabe (30 Punkte)

Gegeben sei ein Teilportefeuille eines Erstversicherers mit den unabhängigen Risiken $i = 1, ..., I$ aus derselben Sparte. Für jedes Risiko i gelte im betrachteten Jahr das Kollektive Modell mit Schadenzahl N_i, Schadenhöhe $X_{i,n}$ des $n-$ten Schadens, Verteilungsfunktion F_i von $X_{i,n}$ und Gesamtschaden S_i.

(a) Wie ist der zu Risiko i gehörende Entlastungseffekt r_i definiert? (2 Punkte)

(b) Sei R_a der Gesamtschaden des Rückversicherers unter einer unlimitierten Schadenexzedenten-Rückversicherung (XL) des Teilportefeuilles mit Priorität a. Drücken Sie $E(R_a)$ mit Hilfe von r_i und $E(S_i)$ aus. (4 Punkte)

(c) Das Resultat von (b) ist die Grundformel der Exposure-Tarifierung. Wie kommt der Rückversicherer zu den für die Entgeltberechnung erforderlichen Schätzwerten für $E(S_i)$? (3 Punkte)

(d) Um r_i zu berechnen, müsste der Rückversicherer die Verteilungsfunktion F_i pro Risiko i kennen oder schätzen können. Dies ist wegen der geringen Schadenzahl pro Risiko nicht möglich. Welche vereinfachende Annahme macht man daher in der Sachversicherung, um für ähnliche Risiken (d.h. solche die sich im wesentlichen nur durch die Versicherungssumme unterscheiden) die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion F_i von der Versicherungssumme v_i zu modellieren, so dass man zur Schätzung von F_i die Einzelschäden aller ähnlichen Risiken heranziehen kann? Geben Sie die daraus resultierende Form der Abhängigkeit der Verteilungsfunktion F_i von der Versicherungssumme v_i explizit an. (5 Punkte)

(e) Wieso ist das Modell (d) der Sachversicherung für die Haftpflicht-Versicherung nicht geeignet? (4 Punkte)

(f) Welche von Riebesell schon 1936 vorgeschlagene Vorgehensweise wird in der deutschen Haftpflicht-Versicherung angewandt, um aus dem Schadenerwartungswert $b(v_0)$ für die Standard-Deckungssumme v_0 eines Risikos den Schadenerwartungswert $b(v)$ für beliebige höhere Deckungssummen v zu berechnen? Geben Sie die resultierende Beziehung zwischen $b(v)$ und $b(v_0)$ an. (4 Punkte)

(g) Welcher Teil von $b(v)$ steht dem Rückversicherer für die XL-Deckung oberhalb der Priorität $a < v$ gemäß (f) zu (mit Begründung)? (3 Punkte)

(h) Wird der relative Anteil des Rückversicherers an $b(v)$ gemäß (f) und (g) bei Inflation größer oder kleiner oder bleibt er gleich, wenn sich außer dem Inflationseinfluss nichts ändert? Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Lösung:

(a) Der Entlastungseffekt bei Schadengrenze a ist definiert durch $r_i(a) = E(min(X_i, a))/E(X_i)$, wobei hier und im Folgenden X_i identisch verteilt sei wie die $X_{i,n}$.

(b) Der Rückversicherer trägt von jedem Schaden $X_{i,n}$ den Betrag $max(X_{i,n} - a, 0)$. Wegen $E(X_i) = E(min(X_i, a)) + E(max(X_i - a, 0)$ ist

$$\begin{aligned} E(R_a) &= \sum_{i=1}^{I} E(N_i)E\left(\max(X_i - a, 0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{I} E(N_i)E(X_i)\left(1 - r_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{I} \left(1 - r_i(a)\right) E(S_i) \end{aligned}$$

(c) $E(S_i)$ ist die Schadenkomponente der Bruttoprämie b_i von Risiko i, die der Rückversicherer vom Erstversicherer (zumindest in geeigneter Gruppierung) genannt bekommt. Die zweite wesentliche Komponente von b_i ist der Kostensatz k des Erstversicherers, dessen Wert in der Regel dem Geschäftsbericht des Erstversicherers entnommen werden kann. Daher kann $E(S_i)$ durch $(1-k)b_i$ geschätzt werden, wobei der Rückversicherer noch eine Korrektur für bekannte Über- oder Untertarifierung des Teilportefeuilles anbringen kann. Statt des Kostensatzes kann die Schadenkomponente von b_i auch mit Hilfe der aus Markstatistiken evtl. bekannten Durchschnitts-Schadenquote für die betreffende Risikogruppe geschätzt werden.

(d) In der Sachversicherung nimmt man für ähnliche Risiken die Beziehung $X_i = v_i Y$ an, d.h. dass diese Risiken dieselbe Verteilungsfunktion G des Schadengrads $Y = X_i/v_i$ haben. (Dies rechtfertigt bei gleicher Schadenzahl auch die Verwendung desselben (Netto-) Prämiensatzes $E(Y) = E(X_i)/v_i$ für diese Risiken.) Die Verteilung G kann dann auf Basis aller beobachteten Schadengrade $X_{i,n}/v_i$ geschätzt werden. Damit ergibt sich für F_i als Abhängigkeit von v_i die Form $F_i(x) = P(X_i \leq x) = P(v_i Y \leq x) = P(Y \leq x/v_i) = G(x/v_i)$.

(e) In der Haftpflicht-Versicherung gibt es keinen risikospezifischen Höchstschaden v_i wie in der Sachversicherung, da die Höhe der möglichen Ansprüche Dritter in der Regel nicht durch Eigenschaften des Risikos begrenzt ist. Vielmehr wählen die Versicherungsnehmer ihre Deckungssume v_i eher aufgrund ihrer eigenen Risikoaversion unterschiedlich, selbst bei identischer äußerer Gefährdung. Dann ist aber der Schadengrad nicht mehr identisch verteilt.

(f) Riebesell empfahl, bei jeder Verdoppelung der Deckungssumme v_i die Nettoprämie (=Schadenerwartung) um einen festen, stets gleichen Zuschlagssatz $z \in (0;1)$, z.B. um 20%, zu erhöhen. (Der Wert $z = 100\%$ entspräche dem Modell (d) der Sachversicherung.) Damit ergibt sich ausgehend von der Schadenerwartung $b_0 = b(v_0)$ für die Standard-Deckungssumme v_0 folgende Formel für höhere Deckungssummen:

$$b(2v_0) = b_0(1+z),$$

$$b(2^k v_0) = b_0(1+z)^k,$$

$$b(tv_0) = b_0(1+z)^{ld(t)}$$

mit dem binären Logarithmus ld,

$$b(v) = b_0(1+z)^{ld(v/v_0)}.$$

(g) Haftpflichtversicherungen sind Erstrisiko-Deckungen, d.h. bei Deckungssumme v ist der Betrag $min(X,v)$ gedeckt, wenn X die Höhe der Ansprüche Dritter pro Schadenfall bezeichnet. Mit der Schadenzahl N ist also $b(v) = E(N)E(min(X,v))$. Bei XL-Deckung oberhalb von $a < v$ bleibt dem Erstversicherer der Teil $min(X,a)$ mit Erwartungswert $b(a)$. Also steht dem Rückversicherer der Teil $b(v) - b(a)$ zu.

(h) Der relative Anteil des Rückversicherers beträgt gemäß (f) und (g)

$$1 - \frac{b(a)}{b(v)} = 1 - (1+z)^{ld(a/v)} = 1 - \left(\frac{a}{v}\right)^{ld(1+z)}.$$

Er bleibt offensichtlich bei Inflation unverändert, wenn a, v und z gleich bleiben. Erhöht sich der Drittanspruch X inflationsbedingt von X auf $X(1+j)$, so ändert sich das Verhältnis der Erstrisiko-Schadenerwartungen von $b(a)/b(v)$ zu

$$\frac{b_j(a)}{b_j(v)} = \frac{E\left(\min\left(X(1+j), a\right)\right)}{E\left(\min\left(X(1+j), v\right)\right)} = \frac{b\left(a/(1+j)\right)}{b\left(v/(1+j)\right)} = (1+z)^{ld(a/v)},$$

d.h. dieses Verhältnis und damit auch der relative Anteil des Rückversicherers bleibt unverändert!

6. Aufgabe (30 Punkte)

$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ seien die üblichen Bezeichnungen für Zuwachs (S) bzw. Stand (C) des Schadenaufwands von Anfalljahr i in Entwicklungsjahr $k, 1 \leq i, k \leq n$. Sie wollen mit der Modellannahme $E(S_{ik}) = v_i m_k$ mit bekannten v_i und unbekannten m_k arbeiten.

(a) Geben Sie drei verschiedene Möglichkeiten an, welche Daten in der Praxis für v_i verwendet werden können. (3 Punkte)

(b) Ab jetzt wird stets dasselbe v_i zu Grunde gelegt. Geben Sie drei verschiedene erwartungstreue Schätzer für m_k an, die jeweils auf allen beobachteten Daten von Entwicklungsjahr k basieren. (4 Punkte)

(c) Wie kann man – zumindest bei genügend großem Abwicklungsdreieck – für festes k prüfen, welcher der 3 Schätzer von (b) besser zu den Daten passt? (8 Punkte)

(d) Geben Sie – ebenfalls unter Annahme eines genügend großen Abwicklungsdreiecks – eine stochastisch fundierte Möglichkeit an, mit der man für festes k prüfen kann, ob obiges Modell besser zu den Daten passt als das Chain Ladder Modell. (8 Punkte)

(e) Geben Sie zu obigem Modell $E(S_{ik}) = v_i m_k$ einen erwartungstreuen Schätzer für die Endstandsquote C_{in}/v_i an. (2 Punkte)

(f) Ihre Kollegen von der Tarifkalkulation benutzen ebenfalls dieses Modell bei der Tarifkalkulation im Longtailgeschäft. Damit schätzen sie wie in (e) für jedes Anfalljahr i die Endschadenquote $\hat{C}_{in}/v_i$ und – da kein Trend erkennbar – deren Mittelwert $\hat{q} = \sum_{i=1}^n \hat{C}_{in} \Big/ \sum_{i=1}^n v_i$. Zur Berechnung des Schwankungszuschlags brauchen Ihre Kollegen auch einen Schätzer a^2 für die mittlere quadratische Abweichung der wahren Schadenquote $C_{n+1,n}/v_{n+1}$ des nächsten Anfalljahrs von $\hat{q}$. Dafür verwenden sie die Formel

$$a^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{v_{n+1}} \left(\frac{\hat{C}_{in}}{v_i} - \hat{q} \right)^2.$$

Erläutern Sie, wieso Ihre Kollegen damit die tatsächliche mittlere quadratische Abweichung unterschätzen. (5 Punkte)

Lösung:
(a) Da sich bei (z.B.) Verdoppelung von v_i der erwartete Schadenzuwachs $E(S_{ik})$ in jedem Entwicklungsjahr ebenfalls verdoppelt, misst v_i offenbar das unterschiedliche Volumen (Schadenexponierung) der Anfalljahre. Als Volumenmaß sind also das (Soll-)Prämienvolumen (bei nicht inflationsbereinigten S_{ik}) oder die Anzahl Policen (bei inflationsbereinigten S_{ik} und in etwa vergleichbar „großen" Policen) geeignet. Ebenso in Betracht kommen

auch die im ersten Entwicklungsjahr gemeldete Anzahl Schäden oder der Schadenaufwand $S_{i1} = C_{i1}$ des ersten Entwicklungsjahres.

(b) Gemäß Modellannahme $E(S_{ik}) = v_i m_k$ ist jede Zuwachsquote S_{ik}/v_i ein erwartungstreuer Schätzer für m_k. Damit der Schätzer für m_k auf allen beobachteten Daten von Entwicklungsjahr k beruht, kann jede Linearkombination der S_{ik}/v_i für $i = 1, ..., n+1-k$ mit bekannten Koeffizienten (mit Summe 1) verwendet werden, d.h. insbesondere

$$\hat{m}_k^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha \frac{S_{ik}}{v_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha \quad mit\ \alpha \in \{0;\ 1;\ 2\}$$

Hierbei ergibt $\alpha = 0$ das gewöhnliche Mittel der Zuwachsquoten, $\alpha = 1$ das Volumengewichtete Mittel; während $\alpha = 2$ das Resultat einer gewöhnlichen linearen Regression von S_{ik} gegen v_i durch den Ursprung ist.

(c) Unterschiedliche Gewichtung bei der Mittelbildung gemäß (b) entspricht unterschiedlichen Varianzannahmen, genauer sollte das Gewicht umgekehrt proportional zur Varianz sein, d.h. $Var(S_{ik}/v_i) = s_k^2 / v_i^\alpha$, wobei s_k^2 durch

$$\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2$$

erwartungstreu geschätzt werden kann. Hierbei sind

$$v_i^\alpha \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2$$

die entsprechend gewichteten Residuenquadrate, die – gegen i oder v_i aufgetragen – bei zutreffender Varianzannahme keinen Trend aufweisen sollten. Also plotte man diese Residuenquadrate (an denen sieht man es deutlicher als an den Residuen selbst) gegen i und v_i und entscheide sich für dasjenige α bzw. $\hat{m}_k^\alpha$, für das die Plots am gleichmäßigsten aussehen. Dies wird zugleich dasjenige Modell sein, für das die gewichts-normierte Summe

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{v_i^\alpha}{\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j^\alpha} \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2$$

der Residuenquadrate am kleinsten ist.
Dieser Ausdruck ist wegen

$$Var(\hat{m}_k^{(\alpha)}) = s_k^2 \Big/ \sum v_j^\alpha$$

(bis auf den Faktor $n-k$) zugleich ein Schätzer für den Schätzfehler $Var(\hat{m}_k^{(\alpha)})$, d.h. die Wahl des Schätzers mit dem kleinsten Schätzfehler ist ebenfalls eine zulässige Antwort.

(d) Die zu $E(S_{ik}) = v_i m_k$ analoge Formulierung der Annahme des Chain Ladder Modells lautet $E(S_{ik}) = C_{i,k-1}(f_k - 1)$. D. h. offenbar passt das Chain Ladder Modell dann besser zu den Daten, wenn der Schätzer für $f_k - 1$ genauer ist als der für m_k. Dies kann hier nicht durch den Schätzfehler $Var(\hat{m}_k)$ bzw. $Var(\hat{f}_k - 1)$ beantwortet werden, da die beiden Schätzer sehr verschiedene Größenordnung haben. Daher muss man die Variationskoeffizienten $Vko(\hat{m}_k)$ und $Vko(\hat{f}_k - 1)$ der Parameterschätzer mit einander vergleichen (Hierbei braucht man implizit den in (c) erwähnten Schätzer für s_k^2): Das Modell mit dem kleineren Variationskoeffizienten passt besser zu den Daten. Dieser Variationskoeffizient ist zugleich

die Inverse des Anpassungsmaßes R^2 bei Regression von S_{ik} gegen v_i bzw. gegen $C_{i,k-1}$ durch den Ursprung. Der Vergleich der $Vko(\hat{m}_k^{(\alpha)})$ ist auch eine zulässige Lösung von (c). Eine andere Möglichkeit des Vergleichs besteht – analog zum Modellvergleich bei der Tarifkalkulation – in der Konstruktion eines gemeinsamen Obermodells $E(S_{ik}) = v_i a_k + C_{i,k-1} b_k$ mit Signifikanztest der Parameter: Ist einer der beiden Parameter a_k und b_k signifikant und der andere nicht, so passt das zum signifikanten Parameter gehörige Teilmodell offenbar besser zu den Daten als das andere Teilmodell. Man wird also das Modell mit dem signifikanteren Parameter vorziehen.
Hier wurde auch öfters geantwortet, dass die Frage durch den Vergleich des linearen und des logarithmischen Plots der Schadenquotenstände gegen die Entwicklungsjahre k entschieden werden könne. Doch dies ist keine stochastisch fundierte Möglichkeit, und sie bezieht sich auch nicht auf festes k, sondern kann nur als Kriterium für das gesamte Abwicklungsdreieck dienen, da die Variationskoeffizienten der einzelnen Entwicklungsjahre nicht geeignet zu einem einzigen Maß zusammengefasst werden können.

(e) $\hat{C}_{in} \Big/ v_i = C_{i,n+1-i}/v_i + \hat{m}_{n+2-i} + ... + \hat{m}_n$

(f) Da in je zwei der verwendeten Endstandsschätzer $\hat{C}_{in} \Big/ v_i, 2 \leq i \leq n$, einer oder mehrere gleiche Schätzer $\hat{m}_k$ enthalten sind, sind die Endstandsschätzer positiv korreliert. Daher unterschätzt a^2 die tatsächliche mittlere quadratische Abweichung.

7. Zusatzaufgabe (30 Punkte)

a) Welche Funktion $V(s)$ wird durch die folgende Integro-Differentialgleichung

$$0 = \lambda E[V(s-X) - V(s)] + (c + rs)V'(s)$$

dargestellt? Welche Bedeutung haben die Parameter λ, c, r und die Zufallsvariable X? (4 Punkte)

b) Bekanntlich kann man Integro-Differentialgleichungen wie in a) vereinfachen, wenn die Verteilung von X eine Exponentialverteilung $Exp(\theta)$ ist, denn dann erfüllt

$$g(s) = E[V(s-X)]$$

die Differentialgleichung

$$g'(s) = \theta(V(s) - g(s)).$$

Wie lautet die entsprechende Differentialgleichung, wenn X eine Gamma (1,2)-Verteilung mit Dichte

$$h(x) = x \exp(-x), \ x > 0$$

besitzt? (8 Punkte)

c) Welche Funktion $V(s)$ erfüllt die Gleichung

$$V(s) = R\{1\}g(s) + \int_0^s g(y)) \left(a + b\frac{y}{s}\right) f(s-y)dy?$$

Welche Bedeutung hat hier R, a und b? (6 Punkte)

d) Kann man die Gleichung in c) wie in der Situation b) vereinfachen, wenn $g(y) = \exp(-y), \ y > 0$, gilt? (12 Punkte)

Lösung:
a) $V(s)$ ist die Ruinwahrscheinlichkeit (oder die Überlebenswahrscheinlichkeit) bei unendlichem Planungshorizont im Lundberg-Modell, bei dem stetig Prämie mit einer Rate c gezahlt wird, die mittlere Schadenanzahl ist λ, und X ist eine generische Schadenhöhe (d.h. die Schadenhöhen $X_1, X_2, ...$ haben dieselbe Verteilung wie X.) Hier wird die freie Reserve verzinst, und zwar mit einer konstanten Zinsrate r.

b) Für die Dichte $h(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, \\ h'(x) &= -x\exp(-x) + \exp(-x), \\ h''(x) &= x\exp(-x) - 2\exp(-x), \end{aligned}$$

und damit gilt für $h(x)$ die Differentialgleichung

$$h(x) + 2h'(x) + h''(x) = 0. \tag{3}$$

Für die Funktion

$$g(s) = E[V(s-X)] = \int_0^s h(s-x)V(x)dx$$

gilt

$$\begin{aligned} g'(s) &= \int_0^s h'(s-x)V(x)dx, \\ g''(s) &= h'(0)V(s) + \int_0^s h''(s-x)V(x)dx. \end{aligned}$$

Durch Kombination dieser Ableitungen und Verwendung von (3) erhält man

$$g(s) + 2g'(s) + g''(s) = h'(0)V(s) = V(s),$$

weil sich die Integranden mit (3) zu Null addieren.

c) Die Funktion $V(s), s \geq 0$, ist die "Dichte" einer Gesamtschadenverteilung (Anführungszeichen deshalb, weil die Gesamtschadenverteilung auch noch positive Masse in Null besitzt), welche mit der Panjer-Rekursion dargestellt ist. R ist die Schadenzahlverteilung, für welche die Rekursion

$$R\{n+1\} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) R\{n\},\ n \geq 0,$$

gilt. Die Funktion $g(s), s \geq 0$, ist die Dichte der Schadenhöhenverteilung.

d) Ja, und zwar deswegen, weil die Funktion

$$G(s) = \int_0^s g(x)U(s-x)dx$$

für beliebige stetige Funktion $U(s), s \geq 0$, die Differentialgleichung

$$G'(s) = U(s) - G(s)$$

erfüllt. Nach der Substitution $w = s - y$ lautet die Ausgangsgleichung

$$V(s) = R\{1\}g(s) + \int_0^s g(s-w)) \left(a + b - b\frac{w}{s}\right) f(w)dw, s > 0,$$

und diese kann man schreiben als

$$V(s) = R\{1\}g(s) + (a+b)\int_0^s g(s-w)f(w)dw - \frac{b}{s}\int_0^s g(s-w)wf(w)dw, s > 0.$$

Die beiden Integrale

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^s g(s-w)f(w)dw, \\ H(s) &= \int_0^s g(s-w)wf(w)dw, s \geq 0, \end{aligned}$$

erfüllen die Differentialgleichungen (siehe oben)

$$\begin{aligned} G'(s) &= f(s) - G(s) \\ H'(s) &= sf(s) - H(s), s \geq 0. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die gegebene Gleichung zu

$$V(s) = R\{1\}g(s) + (a+b)G(s) - \frac{b}{s}H(s).$$

Um die Differentialgleichungen zu lösen, verwendet man die Startwerte

$$G(0) = H(0) = 0,\ V(0) = R\{1\}g(0).$$