Bericht zur Prüfung im Oktober 2002 über Schadenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

Über die Gebiete Stochastische Grundlagen, Tarifierung, Risikoteilung, Reservierung und Solvabilität wurden insgesamt sieben Aufgaben gestellt. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der Aufgaben 1–6 nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet war. Als Hilfsmittel zugelassen waren die klassische Formelsammlung sowie ein Taschenrechner. Diese Klausur war auf eine Gesamtdauer von drei Stunden ausgelegt. Die angegebenen Punktzahlen pro Teilaufgabe geben einen Hinweis auf die Schwierigkeit und die voraussichtliche Lösungsdauer. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 72 der 180 möglichen Punkte erreicht wurden. Von den 35 Teilnehmern haben 25 die Klausur bestanden.

1. Aufgabe zu Grundlagen (30 Punkte)

Seien X, Y und Z stochastisch unabhängige Zufallsvariable, X mit einer Exponentialverteilung mit Parameter α, und Y, Z mit einer Exponentialverteilung mit Parameter 1. Dann sind die Zufallsvariablen $V = X + Y$ und $W = X + Z$ stochastisch abhängig. Berechnen Sie

1. die Tailwahrscheinlichkeiten $P\{V > t \text{ und } W > t\}$, und
2. den Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit
$$\lim_{t \to \infty} \frac{P\{V > t \text{ und } W > t\}}{P\{V > t\}}$$
für $\alpha < 1$.
3. Welchen Wert erhält man für den Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit im Falle $\alpha > 2$?

Lösung

1. Es gilt
$$\begin{aligned}
P\{V > t \text{ und } W > t\} &= P\{X + Y > t \text{ und } X + Z > t\} \\
&= \int_0^t P\{Y > t - x \text{ und } Z > t - x\}\alpha e^{-\alpha x}dx + P\{X > t\} \\
&= \int_0^t P\{Y > t - x\}P\{Z > t - x\}\alpha e^{-\alpha x}dx + e^{-\alpha t} \\
&= \int_0^t e^{-2(t-x)}\alpha e^{-\alpha x}dx + e^{-\alpha t} \\
&= e^{-2t}\alpha \int_0^t e^{(2-\alpha)x}dx + e^{-\alpha t} \\
&= e^{-2t}\frac{\alpha}{2-\alpha}\left(e^{(2-\alpha)t} - 1\right) + e^{-\alpha t} \\
&= \frac{\alpha}{2-\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-2t}\right) + e^{-\alpha t}, \alpha \neq 2.
\end{aligned}$$
2. Analog gilt für $\alpha \neq 1$
$$P\{V > t\} = \int_0^t e^{-(t-x)}\alpha e^{-\alpha x}dx + e^{-\alpha t} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-t}) + e^{-\alpha t}.$$
Für $\alpha < 1$ ist damit
$$P\{V > t \text{ und } W > t\} \sim \frac{2}{2-\alpha}e^{-\alpha t}, t \to \infty,$$

und

$$P\{V > t\} \sim \frac{1}{1-\alpha} e^{-\alpha t}, t \to \infty .$$

Daraus ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P\{V > t \text{ und } W > t\}}{P\{V > t\}} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}.$$

3. Für $\alpha > 2$ wird

$$P\{V > t \text{ und } W > t\} \sim \frac{\alpha}{\alpha - 2} e^{-2t}$$

und

$$P\{V > t\} \sim \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{-t}$$

und damit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P\{V > t \text{ und } W > t\}}{P\{V > t\}} = 0.$$

Anmerkung: Der Limes ist ebenfalls Null, wenn $1 \leq \alpha \leq \infty$.

2. Aufgabe zur Solvabilität (30 Punkte)

Sei $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (1/2, 1/2, 0)$ und B die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Beschreiben Sie die Markov-Kette auf dem Zustandsraum $\{0, 1, 2\}$ mit Startvektor π und nichttrivialem Teil der Intensitätsmatrix B.
2. Welche Summenverteilung hat als verallgemeinerte Phasentypverteilung die Parameter π und B?
3. Für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ im Lundberg Modell mit Parametern λ (Schadenfrequenz), c (Prämienrate) und Q (Schadenhöhenverteilung) bei Startkapital s gibt es eine Darstellung der Form

   $$\psi(s) = p\pi^T \exp(Bs)1.$$

   Hierbei ist $p = \lambda\mu/c$ mit μ = Erwartungswert von Q, π und B sind die Parameter der Phasentypverteilung Q. Geben Sie eine Schadenhöhenverteilung Q an, für die diese Darstellung gilt mit $\pi = (1/2, 1/2)$ und

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p/2 & -1 + p/2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

1. Die Markov-Kette startet in 0 oder 1, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Der Zustand 0 ist absorbierend. Im Zustand 1 verweilt die Kette eine Zeit T_1 mit Verteilung Exp(1), danach springt sie in den Zustand 2. Dort verweilt sie eine Zeit $T_2 \sim$ Exp(2), und danach springt sie nach 0 oder 1, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Im Zustand 1 beginnt die oben beschriebene Wanderung aufs Neue.
2. $P = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} Q^{*k}$

   mit $Q = \text{Exp}(1) * \text{Exp}(2)$. Q hat die Phasentyp-Darstellung $\pi = (1, 0)$ und

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

ferner hat

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} Q^{*k}$$

die Darstellung $\pi = (1, 0)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 + 2 \times \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Sind π_0 und B_0 die Phasentyp-Parameter der gesuchten Schadenhöhenverteilung Q, dann gilt die angegebene Darstellung mit $p = \lambda\mu/c$,

$$\pi = -\frac{1}{\mu}(B'_0)^{-1}\pi_0$$

und

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + pb_{i0}^{(0)}\pi_j,\ i, j = 1, 2.$$

Gilt $\pi = (1/2, 1/2)$, dann ergibt sich B_0 zu

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und π_0 aus der Gleichung

$$\pi_0 = -\mu B'_0 \pi = -\mu \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann muss $\mu = 2$ sein, $\pi_0 = (1, 0)$, und dies ist auch zulässig: $Q = \mathrm{Exp}(1)^{*2}$ hat Mittelwert $\mu = 2$.

3. Aufgabe zur Tarifierung I (30 Punkte)

a) Von einer Verteilung P wird eine exponentielle Familie P_θ, $\theta \in \Theta$, erzeugt durch die Dichten (bezüglich P)

$$p(x, \theta) = \exp(\theta x - c(\theta)).$$

Geben Sie die Varianzfunktionen der exponentiellen Familien an, die durch folgende Verteilungen erzeugt werden:

1. die Normalverteilung N(0, 1);
2. die Poissonverteilung Poi(1);
3. die Exponentialverteilung Exp(1);
4. die Poissonsche Summenverteilung PSV(λ, Q) mit der Gamma-Verteilung Gamma(a, b) als Schadenhöhenverteilung.

b) Welche Linkfunktion wird in der Praxis bevorzugt, und welcher Grund spricht für diese Linkfunktion?

c) Geben Sie eine Normierung an, mit der man bei kreuzklassifizierten Daten die Überparametrisierung vermeiden kann.

Lösung

a) Ist $p(x, \theta) = \exp(\theta x - c(\theta))$ die P-Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_θ, so gilt

$$c(\theta) = \log\int \exp(\theta x) P(dx).$$

1. $P = N(0, 1)$:

$$c(\theta) = \log(\exp(\theta^2/2)) = \theta^2/2,$$
$$c'(\theta) = \theta,\ c''(\theta) = 1,$$
$$V(\mu) = 1.$$

2. $P = \mathrm{Poi}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \log(\exp(\lambda(e^{\theta} - 1))) = \lambda(e^{\theta} - 1), \\ c'(\theta) &= \lambda e^{\theta},\ c''(\theta) = \lambda e^{\theta}, \\ V(\mu) &= \mu. \end{aligned}$$

3. $P = \mathrm{PSV}(\lambda, \mathrm{Gamma}(a, b))$:

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \log\left(\exp\left(\lambda \left(\frac{a}{a-\theta}\right)^{b} - \lambda\right)\right) = \lambda\left(\frac{a}{a-\theta}\right)^{b} - \lambda, \\ c'(\theta) &= \lambda b a^{b}(a - \theta)^{-b-1} = \mu, \\ c''(\theta) &= \lambda b(b+1)a^{b}(a-\theta)^{-b-2} = \lambda b(b+1)a^{b}(\mu\lambda^{-1}b^{-1}a^{-1})^{\frac{b+2}{b+1}}, \\ V(\mu) &= K\mu^{\gamma},\ 1 < \gamma < 2,\ K > 0. \end{aligned}$$

b) Die Log-Linkfunktion. Sie führt zu einer multiplikativen Tarifstruktur. Sind $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ Parameter (Haupteffekte) für die Ausprägungen der Merkmale 1, …, n, so bedeutet

$$\log(\mu) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}$$

dasselbe wie

$$\mu = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(a_{i_j}\right).$$

c) Die Überparameterisierung kann man vermeiden durch Einführung eines Kontrastes und dadurch, dass alle Parameter, die einen Index 1 enthalten, Null gesetzt werden.
Alternativ kann man einen Kontrast einführen und jeden Parameter, der einen Index 1 enthält, so festlegen, dass die Summe über jeweils einen Index Null wird. Also bei Haupteffekten:

$$a_1 = -\sum_{2}^{n} a_j,$$

bei gemischten Effekten der Ordnung 2

$$b_{1j} = -\sum_{i=2}^{m} b_{ij},$$

$$b_{i1} = -\sum_{j=2}^{n} b_{ij},\ i, j \neq 1,$$

$$b_{11} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{m} b_{ij}$$

und so weiter.

4. Aufgaben zur Tarifkalkulation II

Ein Tarif (z.B. in KH) verwendet 2 Risikomerkmale A und B mit I bzw. K Ausprägungsklassen. Als Daten liegen pro Zelle (i, k), $1 \leq i \leq I$, $1 \leq k \leq K$, die Schadenzahl n_{ik} und das Volumen v_{ik} der Risiken im letzten Jahr vor. Sie wollen zur Schätzung der Erwartungswerte $E(N_{ik})$ der zugehörigen Schadenzahlvariablen N_{ik} ein kreuzklassifiziertes Ausgleichsverfahren anwenden.

a) (4 Punkte) Aus welchen beiden Hauptgründen wendet man solche Verfahren an anstatt $E(N_{ik})$ innerhalb jeder Zelle getrennt zu schätzen?

b) (11 Punkte) Nehmen Sie an, die N_{ik} seien unabhängig und poissonverteilt. Stellen Sie die Likelihoodfunktion für das multiplikative kreuzklassifizierte Modell auf und leiten Sie daraus die Likelihood-Gleichungen für die Parameterschätzer her.

c) (3 Punkte) Wie kann man die in b) erhaltenen Likelihood-Gleichungen numerisch lösen, ohne spezielle Software zu benutzen?

d) (6 Punkte) Geben Sie für das verwendete Modell die Testgröße eines Anpassungstestes an, und beschreiben Sie, wie man damit die Anpassungsgüte prüfen kann.

e) (6 Punkte) Woran kann es liegen, wenn der Anpassungstest ablehnt? Nennen Sie alle möglichen Ursachen!

Lösungen zur Tarifkalkulation II

a) Angesichts vieler schwach besetzter Zellen (d.h. kleines v_{ik}) möchte man die Schadenerfahrung benachbarter Zellen mit einbeziehen und außerdem die Anzahl der zu schätzenden Parameter reduzieren.

b) Das kreuzklassifizierte multiplikative Modell lautet $E(N_{ik}) = v_{ik}x_iy_k$ mit unbekannten Parametern x_i, y_k. Damit lautet die Likelihoodfunktion L der Daten im Poissonfall

$$L = \prod_{i,k} P(N_{ik} = n_{ik}) = \prod_{i,k} (\exp(-v_{ik}x_iy_k) \cdot (v_{ik}x_iy_k)^{n_{ik}}/n_{ik}!),$$

$$\ln(L) = \sum_{i,k} (-v_{ik}x_iy_k + n_{ik}\ln(v_{ik}x_iy_k) - \ln(n_{ik}!)).$$

Um die Likelihoodfunktion zu maximieren, werden die partiellen Ableitungen nullgesetzt:

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial x_i} = \sum_k (-v_{ik}y_k + n_{ik}/x_i), 1 \le i \le I,$$

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial y_k} = \sum_i (-v_{ik}x_i + n_{ik}/y_k), 1 \le k \le K.$$

Dies ergibt unmittelbar als Likelihoodgleichungen die berühmten Marginalsummenbedingungen für die Parameterschätzer $\hat{x}_i$, $\hat{y}_k$:

$$\sum_k v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k = \sum_k n_{ik}, 1 \le i \le I, \quad \text{und} \quad \sum_i v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k = \sum_i n_{ik}, 1 \le k \le K.$$

Oder in anderer Schreibweise

$$\hat{x}_i = \sum_k n_{ik} \Big/ \sum_k v_{ik}\hat{y}_k \quad \text{und} \quad \hat{y}_k = \sum_i n_{ik} \Big/ \sum_i v_{ik}\hat{x}_i.$$

c) Man kann die Likelihoodgleichungen iterativ lösen, indem man zunächst in den Gleichungen für $\hat{x}_i$ alle $\hat{y}_k = 1$ setzt, dann die resultierenden Werte für $\hat{x}_i$ in die Gleichungen für $\hat{y}_k$ einsetzt, die resultierenden $\hat{y}_k$ wieder in die Gleichungen für $\hat{x}_i$ usw. Diese Iteration konvergiert rasch gegen die gesuchten Parameterschätzer, die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig sind, aber stets zu denselben geschätzten Schadenhäufigkeiten $\hat{x}_i\hat{y}_k$ führen.

d) Als Testgröße kann hier der klassische Chi-Quadrat-Anpassungstest verwendet werden:

$$T = \sum_{i,k} \frac{(n_{ik} - v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k)^2}{v_{ik}\hat{x}_i\hat{y}_k},$$

der unter der Nullhypothese der gemachten Annahmen eine Chi-Quadrat-Verteilung mit IK-(I + K − 1) = (I − 1)(K − 1) Freiheitsgraden hat. Man wird also die Anpassungsgüte akzeptieren, wenn T unter dem (z.B.) 95%-Quantil der genannten Chi-Quadrat-Verteilung liegt.

e) Wenn der Anpassungstest ablehnt, kann jede der in der Nullhypothese steckenden Annahmen falsch sein, d.h. die Poisson-Annahme, die Unabhängigkeit oder die multiplikative Kreuzklassifikation.

5. Aufgaben zur Schadenreservierung

1. (6 Punkte) Ein Abwicklungsdreieck für ein nicht proportionales Rückversicherungsgeschäft mit 8 Anfalljahren hat folgende Schadenstände in den ersten beiden Entwicklungsjahren:

Anfalljahr:	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Entw. Jahr:	120	0	50	150	0	200	80	100
2. Entw. Jahr:	400	250	150	400	350	550	300	X

Die Schadenreservierungsaktuare wollen das Chain Ladder Verfahren anwenden, um den Stand X von Anfalljahr 8 nach dem 2. Entwicklungsjahr zu schätzen. Der Junior-Aktuar errechnet

$$(400 + 250 + 150 + 400 + 350 + 550 + 300)/(120 + 0 + 50 + 150 + 0 + 200 + 80)*100 = 400$$

als Schätzwert für X. Der Senior-Aktuar meint, dies würde den Erwartungswert von X in diesem Fall überschätzen und entspräche auch nicht dem Geist des Chain Ladder Verfahrens. Was ist seine Begründung? Wie lautet sein alternativer Schätzwert?

2. Seien $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ die üblichen Bezeichnungen für Zuwachs bzw. Stand von Anfalljahr i nach k Entwicklungsjahren. Alle Stände C_{ik} seien positiv.

a) (12 Punkte) Beweisen Sie, dass die folgenden Modellklassen (A) und (B) identisch sind:

(A) Es gibt Parameter $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ mit $f_k = E(C_{i,k+1})/E(C_{ik})$ für $k = 1, \ldots, n-1$.

(B) Es gibt Parameter $x_i > 0$ und y_k, $1 \leq i, k \leq n$, mit $y_1 + \ldots + y_n = 1$ und $E(S_{ik}) = x_i y_k$.

b) (5 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Modellklasse (A) enthält das Chain Ladder Modell.
(ii) Modellklasse (A) ist identisch mit dem Chain Ladder Modell.
(iii) Modellklasse (A) ist eine echte Teilmenge des Chain Ladder Modells.
(iv) Keine der Aussagen (i)–(iii) ist richtig.

Begründen Sie Ihre Antwort.

c) (5 Punkte) Skizzieren Sie eine Vorgehensweise, wie man innerhalb von Modell (B), d.h. ohne den Weg über die f_k, zu vernünftigen Schätzern für die Parameter x_i und y_k kommen kann. Nennen Sie insbesondere etwa dazu nötige Zusatzvoraussetzungen.

d) (2 Punkte) Wie lauten auf Basis vernünftiger Schätzer $\hat{x}_i$, $\hat{y}_k$ in Modell (B) die Schätzer für die Schadenreserve R_i und den Endstand C_{in} von Anfalljahr i?

Lösungen zur Schadenreservierung

1. An der Tatsache, dass ein beliebig hoher Abwicklungsfaktor einen Anfangsstand 0 nicht auf einen positiven Stand bringt, sieht man, dass in Anfalljahren mit Vorjahresstand 0 die Veränderung offenbar nicht durch einen Abwicklungsfaktor bewirkt wird. Daher sollten diese Jahre auch bei der Schätzung des Abwicklungsfaktors nicht verwendet werden, zumal diese Anfalljahre einseitig nur zu einer Erhöhung des Zählers, aber nicht des Nenners führen und somit auf den Faktor der Jahre mit positiven Anfangsstand erhöhend wirken. Im Geist des Chain Ladder Verfahrens ist ein gewichtetes Mittel der Einzel-Abwicklungsfaktoren $C_{i,k+1}/C_{ik}$, bei dem das Gewicht proportional zum Vorjahresstand ist. Für Anfalljahre mit Vorjahresstand 0 ist das Gewicht also 0, d.h. sie gehen nicht in die Mittelung ein. Der richtige Chain Ladder Schätzwert für den ersten Abwicklungsfaktor beträgt daher $[120*(400/120) + 50*(150/50) + 150*(400/150) + 200*(550/200) + 80*(300/80)]/[120 + 50 + 150 + 200 + 80] = 3$ woraus sich 300 als Schätzer für X ergibt. Auch eine Regression des zweiten Entwicklungsjahres gegen das erste, bei der die Chain Ladder der Regressionsgeraden durch den Ursprung entspricht, zeigt deutlich, dass die Anfalljahre 2 und 5 nicht zu dieser Regression passen.

2a) Wiederholte Anwendung von (A) ergibt $E(C_{in}) = E(C_{ik}) f_k \cdot \ldots \cdot f_{n-1}$ für $k = 1, \ldots, n$, letzteres mit der üblichen Konvention, dass ein leeres Produkt gleich 1 ist. Damit wird für $k > 1$ $E(S_{ik}) = E(C_{ik}) - E(C_{i,k-1}) = E(C_{in})[(f_k \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1}]$. Somit folgt (B) mit $x_i = E(C_{in}) > 0$ und $y_k = (f_k \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1}$ d.h. insbesondere $y_n = 1 - (f_{n-1})^{-1}$. Für $k = 1$ ist $E(S_{i1}) = E(C_{i1}) = E(C_{in})(f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1}$, d.h. $y_1 = (f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1})^{-1}$. Und man sieht sofort, dass $y_1 + \ldots + y_n = 1$ erfüllt ist. Also sind mit (A) auch alle Bedingungen (B) erfüllt.

Sei nun (B) erfüllt. Wegen $E(C_{ik}) = E(S_{i1}) + \ldots + E(S_{ik}) = x_i(y_1 + \ldots + y_k)$ folgt $\frac{E(C_{i,k+1})}{E(C_{ik})} = \frac{x_i(y_1 + \ldots + y_{k+1})}{x_i(y_1 + \ldots + y_k)} = \frac{y_1 + \ldots + y_{k+1}}{y_1 + \ldots + y_k} =: f_k$. Also ist auch (A) erfüllt.

2b) Die Grundannahme des Chain Ladder Modells lautet $E(C_{i,\,k+1} \mid C_{i1}, \ldots, C_{ik}) = C_{ik}f_k$. Erneute Erwartungswertbildung ergibt $E(C_{i,\,k+1}) = E(C_{ik})f_k$. Daher erfüllt das Chain Ladder Modell die Bedingung der Modellklasse (A), d.h. (i) ist richtig und (iii) sowie (iv) sind falsch. Dass auch (ii) falsch ist, folgt z.B. aus der Tatsache, dass es in (B) Modelle mit global unabhängigen S_{ik} gibt, während im Chain Ladder Modell $S_{i,\,k+1}$ und S_{ik} nicht unabhängig sind.

2c) Modell (B) ist ein kreuzklassifiziertes multiplikatives Modell, wie sie auch bei den Ausgleichsverfahren der Tarifkalkulation verwendet werden. Speziell hat hier jede Zelle (i, k) dasselbe Volumen $v_{ik} = 1$. Um die Ausgleichsverfahren der Tarifkalkulation einsetzen zu können, muss man lediglich noch die globale Unabhängigkeit der S_{ik} annehmen und – soweit Verteilungen mit positivem Träger eingesetzt werden sollen – auch $S_{ik} > 0$. Dann können die Parameter x_i, y_k wie bei der Tarifkalkulation mit dem Maximum-Likelihood-Verfahren geschätzt werden. Als verteilungsfreie Möglichkeit stehen das Marginalsummenverfahren oder das (gewichtete) Kleinste-Quadrate-Verfahren (Bailey/Simon, de Vylder) zur Verfügung.

2d) $\hat{R}_i = \hat{S}_{i,n+2-i} + \ldots + \hat{S}_n = \hat{x}_i(\hat{y}_{n+2-i} + \ldots + \hat{y}_n)$, $\hat{C}_{in} = C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i$, aber nicht $\hat{C}_{in} = \hat{x}_i$, denn letzteres schätzt den unbedingten Erwartungswert $E(C_{in})$ anstatt den bedingten Erwartungswert $E(C_{in} \mid D)$, gegeben das Abwicklungsdreieck D.

6. Aufgaben zur Risikoteilung

1. Die Schadenhöhe X sei pareto-verteilt mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - (x/b)^{-\alpha}$ für $x > b > 0$.

a) (12 Punkte) Berechnen Sie speziell für $a = 9$, $b = 3$ und $\alpha = 2$ folgende vier Erwartungswerte:

$$E(X \mid X > a), \quad E(X \cdot 1_{\{X>a\}}), \quad E(\max(X - a, 0)), \quad E(X - a \mid X > a).$$

Dabei ist $1_{\{X>a\}}$ die Indikatorfunktion der Menge $\{X > a\}$, d.h. ist $= 1$ für $X > a$ und $= 0$ sonst.

b) (4 Punkte) Welcher der obigen Erwartungswerte ist die mittlere Großschadenhöhe, wenn die Schäden größer a als Großschäden bezeichnet werden, und welcher die mittlere Überschadenhöhe (über der Priorität a)?

c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Überschadenhöhe über der Priorität $a > b$ als Funktion von a und den Pareto-Parametern α und b.

2. (10 Punkte) X und Y seien unabhängige, identisch exponential verteilte Schadenhöhen, d.h. mit Verteilungsfunktion $F(z) = 1 - \exp(-\beta z)$. Berechnen Sie $E(\min(X, Y))$.

Lösungen zur Risikoteilung

1a) $$E(X|X > a) = \int_a^\infty x\mathrm{d}F(x)/(1 - F(a)) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} = 18 \text{ gemäß Formelsammlung,}$$

$$E(X \cdot 1_{\{X>a\}}) = \int_a^\infty x\mathrm{d}F(x) = E(X|X > a) \cdot (1 - F(a)) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = 2,$$

$$E(\max(X - a, 0)) = \int_a^\infty (x - a)\mathrm{d}F(x) = \int_a^\infty x\mathrm{d}F(x) - a(1 - F(a))$$

$$= (E(X|X > a) - a)(1 - F(a)) = \frac{a}{\alpha - 1}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = 1,$$

$$E(X - a|X > a) = \int_a^\infty (x - a)\mathrm{d}F(x)\Big/(1 - F(a)) = E(\max(X - a, 0))\Big/(1 - F(a)) = \frac{a}{\alpha - 1} = 9.$$

1b) $E(X \mid X > a)$ ist die mittlere Großschadenhöhe, $E(X - a \mid X > a)$ die mittlere Überschadenhöhe.

1c) Ist $Y = X - a \mid X > a$ die Überschadenhöhe, so gilt nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit für die Verteilungsfunktion von Y für $y > 0$

$$P(Y < y) = P(X - a < y | X > a) = P(a < X < a + y)/P(X > a)$$
$$= \frac{F(a+y) - F(a)}{1 - F(a)} = \frac{1 - F(a) - (1 - F(a+y))}{1 - F(a)} = 1 - \frac{((a+y)/b)^{-\alpha}}{(a/b)^{-\alpha}} = 1 - \left(\frac{a+y}{a}\right)^{-\alpha}$$

und $P(Y < y) = 0$ für $y \leq 0$, d.h. die Überschadenhöhe hat eine Nullpunkt-Pareto-Verteilung.

2. Mit der Dichte $f(z) = \beta e^{-\beta z}$ wird

$$E(\min(X, Y)) = \int\int \min(x, y) f(x) f(y) dx\, dy = 2 \int\int_{x<y} x f(x) f(y) dx\, dy = 2 \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(y) dy\right) x f(x) dx$$
$$= 2 \int_0^\infty (1 - F(x)) x f(x) dx = 2 \int_0^\infty e^{-\beta x} x \beta e^{-\beta x} dx = \int_0^\infty x 2\beta e^{-2\beta x} dx = \frac{1}{2\beta},$$

gemäß Formelsammlung, da das letzte Integral gerade der Erwartungswert einer Exponentialverteilung mit Parameter 2β ist.

Dasselbe Ereignis kann man etwas rascher bekommen über die Verteilung von $\min(X, Y)$:

$$P(\min(X, Y) > z) = P(X > z \text{ und } Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-\beta z} e^{-\beta z} = e^{-2\beta z},$$

d.h. $\min(X, Y)$ ist exponential verteilt mit Parameter 2β.

Zusatzaufgabe) (30 Punkte)

Betrachten Sie für das einfache Credibility-Modell die Daten $X_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, N$. Der Credibility-Schätzer für Vertrag j hat die Form

$$\hat{\mu}_j = z\bar{X}_j + (1 - z)m,$$

wobei die Größen z und m aus den Daten hergeleitet werden:

$$m = \frac{1}{nN} \sum_{ij} X_{i,j}$$

$$z = \frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2},$$

und τ^2, σ^2 wiederum aus

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i,j} - X_j)^2,$$

$$\tau^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (X_j - m)^2 - \sigma^2/n.$$

Hier ist $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i,j}$. Zeigen Sie: hält man alle Beobachtungen $X_{i,j}$ $(i, j) \neq (1, 1)$, bis auf eine fest und lässt man $X_{1,1} = x$ gegen Unendlich konvergieren, dann konvergiert z gegen Null.

Erläutern Sie, warum dieses Phänomen bei der Tarifierung erneuerter Verträge unerwünscht ist.

Lösung

Man fasst die Größen σ^2 und τ^2 als Funktionen von x auf. Beides sind Polynome in x vom Grade ≤ 2. Also

$$\sigma^2(x) = Ax^2 + Bx + C,$$
$$\tau^2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Es wird gezeigt, dass $A > 0$ und $a = 0$ und damit

$$z = z(x) = \frac{\tau^2(x)}{\tau^2(x) + \sigma^2(x)/n} \to 0, x \to \infty.$$

Bei $\sigma^2(x)$ kommen quadratische Terme nur vor im Summanden

$$\frac{1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i,1} - \overline{X_1}\right)^2 = \frac{1}{N}\frac{1}{n-1}\left(x - \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o(x^2)$$

$$= x^2\left[\frac{1}{N}\frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{N}\frac{1}{n^2}\right] + o(x^2),$$

also $A = 1/(Nn)$. Die Funktion $\tau^2(x)$ ist Differenz von

$$\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(\overline{X_j} - m\right)^2 =: I$$

und $\sigma^2(x)/n$. Der zweite Term hat den Faktor $1/(Nn^2)$ bei x^2. Der erste ist

$$I = \frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{x}{Nn}\right)^2 + \frac{1}{N-1}\left(\frac{x}{n} - \frac{x}{Nn}\right)^2 + o(x^2) = x^2\left[\frac{1}{N^2n^2} + \frac{1}{N^2n^2}(N-1)\right] + o(x^2),$$

also

$$a = \frac{N}{N^2n^2} - \frac{1}{Nn^2} = 0$$

Das Phänomen $z \to 0$ ist unerwünscht, weil Großschäden hierbei auf alle Risiken gleichmäßig – und damit möglicherweise nicht risikoadäquat – verteilt werden. Dies kann zu unerwünschten Kündigungen von Versicherungsverträgen durch die Versicherungsnehmer führen, die keine oder nur geringe Schäden erlebt haben.