Bericht zur Prüfung im Oktober 2001 über Schadenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Christian Hipp (Karlsruhe) und *Thomas Mack* (München)

Über die Gebiete Stochastische Grundlagen, Tarifierung, Risikoteilung, Reservierung und Solvabilität wurden insgesamt sieben Aufgaben gestellt. Die Zusatzaufgabe wurde nur gewertet, wenn eine der Aufgaben 1–6 nicht bearbeitet oder als nicht bearbeitet gekennzeichnet war. Als Hilfsmittel zugelassen waren die klassische Formelsammlung sowie ein Taschenrechner. Diese Klausur war auf eine Gesamtdauer von drei Stunden ausgelegt. Die angegebenen Punktzahlen pro Teilaufgabe geben einen Hinweis auf die Schwierigkeit und die voraussichtliche Lösungsdauer. Die Klausur wurde als bestanden gewertet, wenn 72 der 180 möglichen Punkte erreicht wurden. Von den 35 Teilnehmern haben 26 bestanden.

Aufgabe zu Grundlagen

Seien $0 < p, q < 1$, $p \neq q$ und $a, b > 0$ mit $a \neq b$, und sei Q die Faltung von Exp(a) und Exp(b). Berechnen Sie die Darstellung der Summenverteilung

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} R\{n\}Q^{*n}$$

als Phasentypverteilung, wobei

a) R die Faltung der Verteilungen $R_1\{k\} = p^{k-1}(1-p)$, $k = 1, 2, \ldots$ und $R_2\{k\} = q^{k-1}(1-q)$, $k = 1, 2, \ldots$ ist,

b) R die Faltung der Verteilungen $R_1\{k\} = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $R_2\{k\} = q^k(1-q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist.

c) Welche Veränderungen ergeben sich bei $p = q$ oder $a = b$?

(30 Punkte)

Lösung

P ist die Faltung von P_1 und P_2, wobei $P_i = \sum_{n=0}^{\infty} R_i\{n\}Q^{*n}$ ist. Die Schadenhöhenverteilung Q hat als Phasentypverteilung die Darstellung $\pi = (1, 0)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

a) P_i kann man darstellen durch eine Markov-Kette, bei der beim Übergang von Zustand 2 in den Zustand 0 mit Wahrscheinlichkeit p (bzw. q) neu im Zustand 1 begonnen wird, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ (bzw. $1 - q$) tritt Absorption ein. Somit hat P_1 die folgende Darstellung als Phasentypverteilung: $\pi = (1, 0)$ und

$$B_1 = \begin{pmatrix} -a & a \\ pb & -b \end{pmatrix}.$$

P_2 hat die entsprechende Darstellung mit q statt p in der B-Matrix B_2. Schließlich hat $P = P_1 * P_2$ die folgende Darstellung als Phasentypverteilung: $\pi = (1, 0, 0, 0)$ und

$$B_3 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ pb & -b & (1-p)b & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & qb & -b \end{pmatrix}.$$

b) Die mit den geänderten Schadenzahlverteilungen gebildeten Summenverteilungen P_i' stehen mit den in Teil a) betrachteten P_i in folgender Beziehung:

$$P_1' = (1 - p)\delta_0 + pP_1,$$
$$P_2' = (1 - q)\delta_0 + qP_2.$$

Somit lässt sich die Faltung $P_1' * P_2'$ darstellen als

$$P_1'*P_2' = (1 - p)(1 - q)\delta_0 + p(1 - q)P_1 + (1 - p)qP_2 + pqP_1*P_2.$$

Die übliche Darstellung einer Konvexkombination von Phasentypverteilungen ergibt dann folgende Darstellung der Faltung $P_1'*P_2'$ mit einem Zustandsraum mit 9 Elementen: $\pi = ((1 - p)(1 - q), (1 - q)p, 0, (1 - p)q, 0, pq, 0, 0, 0)$ und

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & C \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind B_1 und B_2 wie in a) definiert, und

$$C = \begin{pmatrix} (1 - p)b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es geht auch ökonomischer, auf einem Zustandsraum mit 7 Elementen:

$\pi = ((1 - p)(1 - q), pq, 0, (1 - q)p, 0, (1 - p)q, 0)$ und

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Gleichung $p = q$ gestattet eine weitere Reduktion der Darstellung: Wegen

$$P_1'*P_2' = (1 - p)^2\delta_0 + 2p(1 - p)P_1 + p^2P_1*P_1$$

gilt folgende Phasentypdarstellung auf einem 5-elementigen Zustandsraum:

$\pi = ((1 - p)^2; p^2, 0, 2p(1 - p), 0)$ und $B = B_3$ aus Teil a). Die Gleichung $a = b$ ergibt keine weitere Vereinfachung. Q ist dann allerdings eine Gamma(a,2)-Verteilung und nicht mehr Linearkombination zweier Exponentialverteilungen.

Aufgabe zur Tarifierung I

a) Geben Sie den natürlichen Parameter θ, die Normierungsfunktion $c(\theta)$, die natürliche Linkfunktion $g(\mu)$ und die Varianzfunktion $V(\mu)$ an für

1. die Poissonverteilung,
2. die Gammaverteilungen, und
3. die negative Binomialverteilung.

b) Beschreiben Sie die Auswahl relevanter Tarifierungsmerkmale, die auf dem Vergleich relativer Devianzen beruht.

c) In einem verallgemeinerten linearen Modell werden 4 Merkmale mit jeweils 4, 5, 6 und 8 Ausprägungen betrachtet. Es werden alle Haupteffekte und alle gemischten Effekte der Ordnung 2 berücksichtigt. Wie viele Parameter weist das Modell auf?

(30 Punkte)

Lösung

a) 1. Poi(λ) hat $\theta = \log(\lambda)$, $c(\theta) = \exp(\theta)$, $g(\mu) = \log(\mu)$ und $V(\mu) = \mu$.
   2. Gamma (a, b), a Skalenparameter, b Formparameter, hat $\theta = -b/a$, $c(\theta) = -\log(-\theta)$, $g(\mu) = -1/\mu$ und $V(\mu) = \mu^2$.
   3. NBin (r, p) wird nicht auf 0, 1, 2, ..., sondern auf den Zahlen 0, 1/r, 2/r, ... betrachtet. Die Verteilung hat $\theta = \log(p)$, $c(\theta) = -\log(1 - \exp(\theta))$, $g(\mu) = \log(\mu/(1+\mu))$ und $V(\mu) = \mu(\mu+1)$.

b) Man betrachtet geschachtelte Modelle $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n$, die jeweils ein weiteres Tarifierungsmerkmal berücksichtigen (also Modelle mit Haupteffekten) und vergleicht die relative Devianz (Devianzverbesserung pro zusätzlichen Parameter) aufeinanderfolgender Modelle M_i und M_{i+1}. Sobald die relative Devianz klein wird, verwirft man die nur in $M_{i+1}, \ldots, M_n$ vorkommenden Tarifierungsmerkmale. Dieses Verfahren wiederholt man für verschiedene Folgen geschachtelter Modelle (durch Veränderung der Reihenfolgen).

c) $1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 3 \times 4 + 3 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 7 = 151$.

Aufgabe zur Solvabilität

a) Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck a(t), der asymptotisch äquivalent ist zu

$$P^{*n}(t, \infty),$$

wenn P = Lognormal (μ, σ) gegeben ist.

b) Sei Q eine Phasentypverteilung mit Parametern π und B. Stellen Sie den Mittelwert von Q mit diesen Parametern dar, und geben Sie eine explizite Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Lundberg-Modell an, wenn die Parameter λ (Schadenfrequenz), c (Prämienrate) und obiges Q (als Schadenhöhenverteilung) gegeben sind.

c) Seien $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ die Ruinwahrscheinlichkeiten mit Parametern λ, c und Q = Exp(1) bzw. mit λ, c und Q = Pareto(a). Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten von $\psi_1(s)$ mit dem von $\psi_2(s)$ für $s \to \infty$.

Lösung

a) Mit R{n} = 1 erhält man aus dem Satz über die Tailwahrscheinlichkeit von Summenverteilungen mit subexponentieller Schadenhöhenverteilung:

$$P^{*n}(t, \infty) \approx nP(t, \infty).$$

Ferner gilt mit der Asymptotik der Tailwahrscheinlichkeit für die Normalverteilung:

$$P(t, \infty) = 1 - \Phi((\log(t) - \mu)/\sigma) \approx \frac{1}{(\log(t) - \mu)/\sigma}\varphi((\log(t) - \mu)/\sigma) \approx \frac{\sigma}{\log(t)}\varphi((\log(t) - \mu)/\sigma).$$

Damit erhalten wir als asymptotische Tailwahrscheinlichkeit

$$a(t) = \frac{n\sigma}{\log(t)}\varphi((\log(t) - \mu)/\sigma).$$

b)

$$\mu = -\pi^T B^{-1} 1,$$

$$\psi(s) = p(\pi^*)^T \exp(sB^*)1,$$

$$p = \lambda\mu/c, \pi^* = -\frac{1}{\mu}\pi^T B^{-1},$$

$$B^* = (b^*_{ij})$$

$$b^*_{ij} = b_{ij} + b_{i0} p \pi_j.$$

c) Wir betrachten nur $a > 1$ in Pareto(a) und die Fälle, in denen $c > \lambda\mu$ gilt. Dann ist

$$\psi_1(s) \approx C_1 \exp(-Rs),\ R \text{ Anpassungskoeffizient}$$

$$\psi_1(s) \approx C_2 s^{-(a-1)}.$$

Die Asymptotik für die Paretoverteilung ergibt sich daraus, dass Pareto(a) die Tailwahrscheinlichkeit t^{-a} hat, und die zugehörige Leiterhöhenverteilung hat Tailwahrscheinlichkeit $H(t, \infty) = (1/a)t^{-(a-1)}$.

Aufgabe zur Tarifkalkulation II

1. Um festzustellen, ob im letzten Jahr in seinem Pkw-Haftpflicht-Portefeuille eine zusätzliche Prämiendifferenzierung nach der Farbe möglich gewesen wäre, will der K-Betriebschef den beobachteten, pro Schaden bei DM 100000 kupierten mittleren Schadenbedarf aller hellfarbigen Pkw mit dem aller dunkelfarbigen Pkw vergleichen.

Begründen Sie, wieso das keine gute Vorgehensweise wäre, sowohl (a) verbal wie (b) an Hand eines kleinen konstruierten Zahlenbeispiels (mit Volumen und Schadenaufwand).

Geben Sie (c) Formeln für eine bessere Vergleichsmöglichkeit an, die ohne Prämien oder komplette Tarifkalkulation auskommt, und begründen Sie, wieso diese besser ist.

(5 + 5 + 10 = 20 Punkte)

2. In einem Verallgemeinerten Linearen Modell (GLM) mit logarithmischer Linkfunktion erhalten Sie beim Risikomerkmal „Geschlecht" für die beiden Ausprägungsklassen „männlich" (Standardklasse) und „weiblich" folgende Parameterschätzer für den linearen Prädiktor:

	df	estimate	std. error
Geschlecht = männlich	0	0	0
Geschlecht = weiblich	1	− 0,2	0,05

Ohne die Parameterschätzer für die anderen Merkmale (keine gemischten Effekte) zu kennen, ist es möglich, den Erwartungswertschätzer des GLM für „weiblich" als Rabatt gegenüber dem Erwartungswertschätzer für „männlich" auszudrücken. Berechnen Sie den Schätzer für diesen Rabatt und seinen Standardfehler.

(5 + 5 = 10 Punkte)

Lösung

1. (a) Eine unterschiedliche Bestandszusammensetzung der hellen bzw. dunklen Pkw bei den anderen Risikomerkmalen bewirkt scheinbare Unterschiede im univariaten Schadenbedarf, auch wenn diese nicht existieren: (b)

		Beamte	Nicht-Beamte	Gesamt
Helle Pkw	SB	500	600	580
	JE	1000	4000	5000
	Aufwand	0,5 Mio	2,4 Mio	2,9 Mio
Dunkle Pkw	SB	500	600	520
	JE	8000	2000	10000
	Aufwand	4,0 Mio	1,2 Mio	5,2 Mio

Obwohl die hellen Pkw sowohl innerhalb der Beamten als auch innerhalb der Nicht-Beamten den gleichen Schadenbedarf (SB) haben wie die dunklen Pkw, ist im Gesamt der SB der hellen Pkw erheblich höher, da dort relativ mehr Jahreseinheiten (JE) auf die schadenträchtigeren Nicht-Beamten entfallen. Dies wäre bei gleicher Verteilung der Jahreseinheiten auf Beamte und Nicht-Beamte nicht der Fall (d.h. 2000 : 8000 statt 8000 : 2000). Letzteres führt auf eine mögliche Lösung:

(c) Es gebe innerhalb der hellen bzw. dunklen Pkw je M Tarifzellen mit JE-Volumen $v_{h,m}$ bzw. $v_{d,m}$, $1 \le m \le M$. Dann ist $SB_{i\bullet} = \sum_{m=1}^{M} v_{i,m} SB_{i,m} \Big/ v_{i+}$ mit $v_{i+} = \sum_{m=1}^{M} v_{i,m}$ für $i \in \{h, d\}$ der beobachtete Schadenbedarf aller hellen bzw. aller dunklen Pkw. Um hierin Bestandsunterschiede zu eliminieren, kann man $v_{i,m}$ sowohl bei den hellen als auch bei den dunklen Pkw durch das zugehörige Gesamtvolumen v_{+m} ersetzen und statt der Schadenbedarfe $SB_{i\bullet}$ die modifizierten Größen $\tilde{SB}_i = \sum_{m=1}^{M} v_{+m} SB_{i,m} \Big/ v_{++}$ mit $v_{++} = \sum_{m=1}^{M} v_{+m}$ vergleichen. (Dies würde als Lösung bereits genügen.) In obigem Beispiel wäre dann $\tilde{SB}_h = \tilde{SB}_d$. Da hierbei etwaige Ausreißer bei den $SB_{i,m}$ verzerrend wirken können, ist es besser, zunächst diejenigen Gesamt-Schadenbedarfe zu ermitteln, die bei gleichen Schadenbedarfen $SB_{\bullet m}$ pro Teilzelle m nur durch die unterschiedliche Bestandszusammensetzung bedingt sind, d.h.

$$SB_i^{ges} = \sum_{m=1}^{M} v_{i,m} SB_{\bullet m} \Big/ v_{i+} \quad \text{mit} \quad SB_{\bullet m} = \sum_{i} v_{i,m} SB_{i,m} \Big/ v_{+m}$$

zu berechnen, und dann das Verhältnis $SB_{i\bullet}/SB_i^{ges}$ als die Zahl anzusehen, die ausschließlich den Unterschied beim Schaden wiedergibt, d.h. um Bestandsunterschiede bereinigt ist. (Das ist die „individuelle Umgewichtung" des GDV.) SB_i^{ges} kann auch als der a priori erwartete Schadenbedarf der hellen bzw. dunklen Pkw interpretiert werden. Endgültige Gewissheit gibt natürlich erst ein Test auf Signifikanz des Risikomerkmals Farbe.

Bemerkung (nicht klausurrelevant): Die mit v_{i+} gewichtete Summe der Indizes $SB_{i\bullet}/SB_i^{ges}$ ergibt nicht den Wert 1, daher sollte bei weiteren Rechnungen mit den Indizes (z.B. bei Clusteranalysen) als Volumen $\tilde{v} = v_{i+} SB_i^{ges}$ verwendet werden.

2. Für jede Tarifgruppe (Beobachtung) i des Modells lautet der Erwartungswertschätzer wegen der logarithmischen Linkfunktion $\hat{\mu}_i = \exp\left(\sum_{j=1}^{J} x_{ij}\hat{\beta}_j\right)$ mit den Parameterschätzern $\hat{\beta}_j$ und den die Tarifgruppe beschreibenden Kovariablen (Merkmalsausprägungen) x_{ij}. Sei nun oBdA β_1 der Parameter für die Standardklasse inkl. der Ausprägung „männlich" (d.h. $x_{i1} = 1$ stets) und β_2 der Parameter für die Ausprägung „weiblich", dann ist $x_{i2} = 1$ für „weiblich" und $x_{i2} = 0$ sonst. Für zwei Tarifgruppen i (weiblich) und k (männlich), die in allen übrigen Merkmalsausprägungen bis auf das Geschlecht übereinstimmen, stimmen die linearen Prädiktoren $\Sigma x_{ij}\beta_j$ und $\Sigma x_{kj}\beta_j$ dann in allen Summanden außer dem zweiten überein. Also ist $\Sigma x_{ij}\beta_j - \Sigma x_{kj}\beta_j = \beta_2$ und daher $\hat{\mu}_i/\hat{\mu}_k = \exp(\hat{\beta}_2) = \exp(-0{,}2) = 0{,}82$. Der Rabatt beträgt also $r = 1 - \exp(\hat{\beta}_2) = 18\%$.

Im Folgenden schreiben wir einfach β statt β_2. Für den Schätzer $\hat{\beta}$ gilt also laut Voraussetzung $E(\hat{\beta} - \beta)^2 = (0{,}05)^2$. Der Rabattschätzer lautet $r(\hat{\beta}) = 1 - \exp(\hat{\beta})$, und gesucht ist $E(r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2$ bzw. die Wurzel daraus. Nach Taylor gilt

$$
\begin{aligned}
& r(\hat{\beta}) - r(\beta) \approx r'(\beta)(\hat{\beta} - \beta), \\
\Rightarrow\ & (r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2 \approx (r'(\beta))^2(\hat{\beta} - \beta)^2 \\
\Rightarrow\ & E(r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2 \approx (\beta))^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 \approx (r'(\hat{\beta}))^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 \\
& \qquad = (-\exp(\hat{\beta}))^2(0{,}05)^2 = (0{,}82)^2(0{,}05)^2 = (0{,}041)^2,
\end{aligned}
$$

d.h. der Standardfehler des Rabattsatzes $r(\hat{\beta}) = 0{,}18$ beträgt 0,041.

Statt der Herleitung über die Taylorapproximation konnte auch die Formel $\operatorname{Var}(r(\hat\beta)) \approx (r'(\hat\beta))^2 \operatorname{Var}(\hat\beta)$ unter Verweis auf den Transformationssatz für ML-Schätzer direkt verwendet werden.

Aufgabe zur Schadenreservierung

$C_{i,k}$ sei der Stand der Schadenzahlungen für Schäden von Anfalljahr i nach k Entwicklungsjahren, $1 \le i, k \le n$. Wie üblich, seien die Stände für das Abwicklungsdreieck $i + k \le n + 1$ bekannt.

a) Wie ist der Standardfehler s.e. $(\hat C_{i,n})$ eines Endstandschätzers $\hat C_{i,n}$ (unabhängig von der Schätzmethode!) definiert, und aus welchen beiden Komponenten setzt er sich zusammen? Geben Sie sowohl die Formel als auch die anschauliche Bezeichnung der beiden Komponenten an. (10 Punkte)

b) In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung wird vorgeschlagen, die Volatilität des Chain-Ladder-Endstandschätzers $\hat C_{n+1-k,n} = C_{n+1-k,k}\, \hat f_k \cdot \ldots \cdot \hat f_{n-1}$ für Anfalljahr $n+1-k$ (mit k bekannten Entwicklungsständen) folgendermaßen zu ermitteln: Für alle vorangehenden Anfalljahre $j = 1, \ldots, n-k$ sei

$$F_{j,k} := \frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} \cdot \frac{C_{j,k+2}}{C_{j,k+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{C_{j,n+1-j}}{C_{j,n-j}} \cdot \hat f_{n+1-j} \cdot \ldots \cdot \hat f_{n-1}$$

(mögliches Kürzen wurde zum Sichtbarmachen der Struktur unterlassen) das Produkt aller bekannten individuellen Abwicklungsfaktoren $C_{j,m+1}/C_{j,m}$ von Anfalljahr j ab Entwicklungsjahr k, ergänzt um die üblichen Chain-Ladder-Faktoren $\hat f_m$ für die noch unbekannten Entwicklungsjahre. Der gewichtete Mittelwert dieser $F_{j,k}$ ist gleich dem Produkt der Chain-Ladder-Faktoren:

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{j,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \cdot F_{j,k} = \hat f_k \cdot \hat f_{k+1} \cdot \ldots \cdot \hat f_{n-1} =: F_k$$

(wie man zeigen kann, was aber nicht Teil der Aufgabe ist). Durch Multiplikation des aktuellen Schadenstands $C_{n+1-k,k}$ mit jedem $F_{j,k}$, $1 \le j \le n-k$, erhält man $n-k$ Endstandschätzer $\hat C^{(j)}_{n+1-k,n} := C_{n+1-k,k} \cdot F_{j,k}$ für Anfalljahr $n-k+1$ zusätzlich zum Chain-Ladder-Schätzer $\hat C_{n+1-k,n} := C_{n+1-k,k} \cdot F_k$.

Schließlich wird die Streuung dieser Endstände (um den CL-Endstand)

$$\operatorname{Vol}\left(\hat C_{n+1-k,n}\right) := \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{j,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \left(\hat C^{(j)}_{n+1-k,n} - \hat C_{n+1-k,n}\right)^2 = \hat C^2_{n+1-k,k} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{j,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \left(F_{j,k} - F_k\right)^2$$

als Volatilität des Chain-Ladder Endstandschätzers $\hat C_{n+1-k,n}$ bezeichnet.

Kommentieren Sie $\operatorname{Vol}(\hat C_{n+1-k,n})$ im Vergleich zu $(\text{s.e.}(\hat C_{n+1-k,n}))^2$: Was soll Vol(.) schätzen? Ist Vol(.) ein für diesen Zweck sinnvoll konstruierter Schätzer? Kann man Vol(.) an Stelle von s.e. verwenden? (Hinweis: Schauen Sie den einfacheren Fall von $\operatorname{Vol}(\hat C_{n+1-k,k+1})$ an.) (20 Punkte)

Lösung

a) Der Standardfehler ist die Quadratwurzel eines Schätzers des (bedingten) mittleren quadratischen Fehlers (mit D = Dreieck der gegebenen Daten)

$$\operatorname{mse}(\hat C_{in}) = E((\hat C_{in} - C_{in})^2 \mid D) = \operatorname{Var}(C_{in} \mid D) + (\hat C_{in} - E(C_{in} \mid D))^2,$$

welcher aus den beiden Komponenten $\operatorname{Var}(C_{in} \mid D)$ = Zufallsfehler und $(\hat C_{in} - E(C_{in} \mid D))^2$ = Schätzfehler besteht. Der Zufallsfehler beschreibt die rein zufälligen Abweichungen des tatsächlichen Endstands C_{in} von der besten Prognose $E(C_{in} \mid D)$ und der Schätzfehler beschreibt die Tatsache, dass der verwendete Schätzwert $\hat{C}_{in}$ von der besten Prognose abweichen kann. Der Schätzfehler wird häufig zur leichteren Berechenbarkeit durch $\mathrm{Var}(\hat{C}_{in}) = E(\hat{C}_{in} - E(\hat{C}_{in}))^2$ ersetzt.

ɔ) Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir kurz $C^* := \hat{C}_{n+1-k,n}$, $C_j^* = \hat{C}^{(j)}_{n+1-k,n}$, $C_{+k} := \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}$.

Gemäß Voraussetzung ist $C* = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{j,k}}{C_{+k}} C_j^*$, d.h. der Chain-Ladder-Schätzer C^* ist das C_{jk}-gewichtete Mittel der Endstandschätzer C_j^*. Zu einem C_{jk}-gewichteten Mittel unabhängiger Summanden gehört die Varianzannahme $\mathrm{Var}(C_j^*) = \sigma^2/C_{jk}$ mit einem σ^2, das durch

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} \left(C_j^* - C* \right)^2$$

erwartungstreu geschätzt wird. Damit kann Vol in der Form $\mathrm{Vol}(C^*) = (n-k-1)\hat{\sigma}^2/C_{+k}$ geschrieben werden. Da außerdem die mittlere Varianz der C_j^* (gemäß obiger Varianzannahme)

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{j,k}}{C_{+k}} \mathrm{Var}\left(C_j^*\right) = (n-k)\sigma^2/C_{+k}$$

beträgt, ist $\mathrm{Vol}(C^*)$ ein Schätzer für die mittlere Varianz der C_j^* (bis auf den Bias $(n-k-1)/(n-k)$). Aber dies könnte nur dann auch als der Zufallsfehler von C^* angesehen werden, wenn die Cj^* nur die wahren Faktoren $C_{j,m+1}/C_{jm}$ enthielten, nicht aber auch die Schätzer $\hat{f}_m$.

$\mathrm{Vol}(C^*)$ ist auch um den Faktor $n-k-1$ größer als der Schätzfehler

$$\mathrm{Var}(C*) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}^2}{C_{+k}^2} \mathrm{Var}\left(C_j^*\right) = \sigma^2/C_{+k}.$$

Allerdings gilt all das bisher Gesagte nur bei unabhängigen C_j^*. Tatsächlich enthält aber jedes Paar von C_j^*, C_r^* $(j > r > 1)$ einen oder mehrere gleiche Faktoren $\hat{f}_m$, so dass die C_j^* positiv korreliert sind und man überhaupt nicht mehr sagen kann, was Vol schätzt. Dann gilt $E(\hat{\sigma}^2) < \sigma^2$ und entsprechend unterschätzt Vol die mittlere Varianz der Schätzer C_j^* mehr oder weniger.

Betrachtet man den Spezialfall $\mathrm{Vol}(\hat{C}_{n+1-k,k+1})$ anstatt $\mathrm{Vol}(\hat{C}_{n+1-k,n})$, d.h. nur die Volatilität im ersten noch nicht beobachteten Entwicklungsjahr, dann stecken in $C_j^* = \hat{C}^j_{n+1-k,k+1}$ noch keine $\hat{f}_m$, so dass die Unabhängigkeit der (entsprechend modifizierten) Summanden $C_j^* = C_{n+1-k,k} \frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}}$ als zutreffend angenommen werden kann. Für diesen Fall trifft also das oben Gesagte uneingeschränkt zu.

Genauer erhält man – dieser letzte Teil wurde nicht für die volle Punktzahl erwartet –

$$\mathrm{Vol}\left(\hat{C}_{n+1-k,k+1}\right) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{C_{+k}} \left(C_{n+1-k,k} \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - C_{n+1-k,k}\hat{f}_k \right)^2 = \hat{C}^2_{n+1-k,k}(n-k-1)\hat{\sigma}_k^2/C_{+k}$$

mit dem vom Chain-Ladder-Modell her bekannten

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k \right)^2.$$

Gemäß Chain-Ladder-Modell beträgt der Standardfehler für das erste nicht-beobachtete Entwicklungsjahr

$$\left(\mathrm{s.e.}\left(\hat{C}_{n+1-k,k+1}\right)\right)^2 = C^2_{n+1-k,k} \left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{C_{n+1-k,k}} + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{C_{+k}} \right),$$

wobei die Summanden den Zufalls- bzw. Schätzfehler darstellen. Ein Vergleich mit der Formel für Vol zeigt, dass selbst in diesem vergleichsweise regulären Fall Gleichheit nur in dem äußerst speziellen Fall gilt, wo $C_{n+1-k,k} = C_{+k}/(n-k-2)$.

Die beschriebene Schätzmethode wird in dem Buch „Versicherungsmathematische Anwendungen in der Praxis“ von Heep-Altiner und Klemmstein empfohlen.

Aufgabe zur Risikoteilung

1. Im Kollektiven Modell sei die Schadenhöhe X pro Schadenfall lognormal verteilt mit $\sigma = 2$ (Parameter wie in Formelsammlung). m: = $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ ist der Erwartungswert, $\Lambda(x; \mu, \sigma)$ die Verteilungsfunktion an der Stelle x.

a) Drücken Sie $\Lambda(x; \mu, \sigma)$ mit Hilfe der Standard-Normalverteilung Φ aus. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden > m ausfällt. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie den Prozent-Anteil am erwarteten Gesamtschaden, den der erwartete Gesamtbetrag aller Schäden > m ausmacht. (4 Punkte)

d) Berechnen Sie den Prozent-Anteil am erwarteten Gesamtschaden, den der erwartete Gesamtschaden des Rückversicherers unter einem unlimitierten Schadenexzedenten mit Priorität m ausmacht. (4 Punkte)

e) Berechnen Sie bei Poisson-verteilter Schadenzahl den Prozentanteil an der Varianz des Gesamtschadens, den die Varianz des Gesamtschadens des Rückversicherers unter einem unlimitierten Schadenexzedenten mit Priorität m ausmacht. (7 Punkte)

2. In einem Rückversicherungsvertrag wird vereinbart, dass der Rückversicherer von den ersten beiden Schäden des Erstversicherers nach Vertragsbeginn, die eine bestimmte Grenze a übersteigen, den größeren Schaden ganz bezahlt (und vom anderen nichts). Berechnen Sie den Erwartungsschaden des Rückversicherers unter der Annahme, dass die Schadenhöhen > a unabhängig pareto-verteilt sind mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - (x/a)^{-\alpha}$. (10 Punkte)

Lösung

1. Teilaufgabe

a) $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma) \Leftrightarrow \ln(X) \sim \text{Normal}(\mu, \sigma) \Leftrightarrow (\ln(X) - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$, also ist

$$\Lambda(x;\mu,\sigma) = P(X < x) = P(\ln(X) < \ln(x)) = P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{\sigma} < \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right).$$

b) $P(X > m) = 1 - \Lambda(m;\mu,\sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(m)-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84 = 16\%.$

Dabei wurde Teil a) und die Identität $\ln(m) = \mu + \sigma^2/2$ verwendet.

c) Der Gesamtschaden $S = X_1 + \ldots + X_N$ hat den Erwartungswert $E(S) = E(N)E(X) = E(N)m$.

Der Gesamtbetrag aller Großschäden beträgt $\tilde{S} = \sum_{n=1}^{N} X_n 1_{\{X_n > m\}}$ mit Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}) &= E(N)E(X \cdot 1_{\{X>m\}}) = E(N) \int_m^\infty x d\Lambda(x) \\ &= E(N) \cdot \exp(\mu + \sigma^2/2) \cdot (1 - \Lambda(m; \mu + \sigma^2, \sigma)) \\ &= E(N)m\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(m)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right) = E(N)m\left(1 - \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\right). \text{ (gemäß Formelsammlung)} \end{aligned}$$

Also ist $E(\tilde{S})/E(S) = 1 - \Phi(-\sigma/2) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 84\%.$

d) Der Rückversicherer übernimmt $S^* = \sum_{n=1}^{N} \max(X_n - m, 0)$ und es ist

$$E(S^*) = E(N)\,E(\max(X-m,0)) = E(N)\int_m^\infty (x-m)d\Lambda(x)$$
$$= E(N)\int_m^\infty x d\Lambda(x) - E(N)mP(X>m) = E(\tilde{S}) - E(S)P(X>m)$$

mit $E(\tilde{S})$ gemäß Teil c. Damit ist der gesuchte Prozentanteil

$$E(S^*)/E(S) = E(\tilde{S})/E(S) - P(X>m) = 84\% - 16\% = 68\%.$$

e) Im Poissonfall gilt

$$\mathrm{Var}(S) = E(N)E(X^2) = E(N)(\mathrm{Var}(X) + m^2) = E(N)m^2\exp(\sigma^2),\ \text{vgl. Formelsammlung.}$$

$$\mathrm{Var}(S^*) = E(N)E((\max(X-m,0))^2) = E(N)\int_m^\infty (x-m)^2 d\Lambda(x)$$
$$= E(N)\int_m^\infty x^2 d\Lambda(x) - 2E(N)m\int_m^\infty x d\Lambda(x) + E(N)m^2P(X>m).$$

Gemäß Formelsammlung ist

$$\int_m^\infty x^2 d\Lambda(x) = \exp(2\mu + 2\sigma^2)(1 - \Lambda(m;\mu + 2\sigma^2, \sigma))$$
$$= m^2\exp(\sigma^2)(1 - \Phi(-3\sigma/2)) = m^2\exp(\sigma^2)\Phi(3\sigma/2).$$

Damit ist der gesuchte Prozentanteil (unter Verwendung der Teile b) und c)

$$\frac{\mathrm{Var}(S*)}{\mathrm{Var}(S)} = \Phi\left(\frac{3}{2}\sigma\right) - \frac{2mE(\tilde{S})}{mE(S)\exp(\sigma^2)} + \frac{P(X>m)}{\exp(\sigma^2)}$$
$$= \Phi\left(\frac{3}{2}\sigma\right) - \exp(-\sigma^2)\left(2\frac{E(\tilde{S})}{E(S)} - P(X>m)\right)$$
$$= 0{,}99865 - e^{-4}(1{,}68 - 0{,}16) = 0{,}99865 - 0{,}02791 = 97\%.$$

2. Teilaufgabe

Abhängig von der Anzahl N der Schäden $> a$ beträgt der vom Rückversicherer zu bezahlende Schaden R

$R = 0$, falls $N = 0$,

$R = X_1$, falls $N = 1$,

$R = \max(X_1, X_2)$, falls $N > 1$.

Mit $p_n = P(N = n)$ wird also

$$E(R) = p_1E(X_1) + (1 - p_0 - p_1)E(\max(X_1, X_2)).$$

Laut Formelsammlung ist $E(X_1) = \alpha a/(\alpha - 1)$. Der Hauptteil der Aufgabe besteht darin, $E(\max(X_1, X_2))$ zu berechnen. Hierfür werden drei mögliche Ansätze vorgestellt.

a) Der Standardansatz benutzt die gemeinsame Dichte $f(x_1)f(x_2)$ der unabhängigen Schadenhöhen X_1 und X_2 mit $f(x) = F'(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha-1}$. Damit ist

$$E(\max(X_1,X_2)) = \int\int \max(x_1,x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int\int_{x_1>x_2} x_1f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 + \int\int_{x_2>x_1} x_2f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2$$

$$= 2\int\int_{x_1>x_2} x_1f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 = 2\int_a^\infty \left(\int_a^{x_1} f(x_2)dx_2\right)x_1f(x_1)dx_1$$

$$= 2\int_a^\infty F(x_1)x_1f(x_1)dx_1 = 2\int_a^\infty \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}\right)\times\frac{\alpha}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha-1}dx$$

$$= 2\alpha\int_a^\infty \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}-\left(\frac{x}{a}\right)^{-2\alpha}\right)dx = 2\alpha\left[\frac{a}{1-\alpha}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}-\frac{a}{1-2\alpha}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-2\alpha}\right]_a^\infty$$

$$= 2\alpha\left(\frac{a}{\alpha-1}-\frac{a}{2\alpha-1}\right) = \frac{2\alpha a(2\alpha-1-\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} = \frac{2\alpha^2a}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}.$$

(Bemerkung am Rande: Dies ist größer als $E(X_1) = \alpha a/(\alpha-1)$.)

b) Eleganter und einfacher erhält man die Verteilung von $\max(X_1, X_2)$ wie folgt:

$$P(\max(X_1, X_2) < x) = P(X_1 < x \text{ und } X_2 < x) = P(X_1 < x)P(X_2 < x) = (F(x))^2.$$

Damit wird $E(\max(X_1, X_2)) = \int_a^\infty x\,d(F(x))^2 = 2\int_a^\infty xF(x)f(x)dx$, und weiter wie bei a).

c) Bei der dritten Möglichkeit nehmen wir die Höhe des ersten Schadens zunächst als gegeben an:

$$E(\max(X_1,X_2)|X_1= x)= xP(X_2 \leq x)+E(X_2|X_2> x)P(X_2> x)$$

$$= x\int_a^x dF(x_2) + \int_x^\infty x_2dF(x_2) = x\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}\right)+x\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}$$

$$= x+\frac{x}{\alpha-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}. \quad \text{(gemäß Formelsammlung)}$$

Nun müssen wir dies noch über alle möglichen Höhen des ersten Schadens integrieren.

$$E(\max(X_1,X_2)) = \int_a^\infty E(\max(X_1,X_2)|X_1= x)f(x)dx = \int_a^\infty \left(x+\frac{x}{\alpha-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}\right)\frac{\alpha}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha-1}dx$$

usw. mit schließlich demselben Resultat wie bei a).

Zusatzaufgabe

a) Welche asymptotische Varianz hat der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter α der Gammaverteilung mit Dichte $p(x,\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x), \alpha,\beta$ unbekannt?

b) Berechnen Sie die asymptotische Varianz des nichtparametrischen Schätzers

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2, \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$

und geben Sie das Konfidenzintervall zum Niveau 0,99 an.
(30 Punkte)

Lösung

a) Wir berechnen zunächst die Kovarianzmatrix $\Sigma = \Lambda^{-1}$ des vollen Maximum-Likelihood-Schätzers (für α, β):

$$p(x,\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\exp(-\beta x), x > 0,$$

$$\log(p) = \alpha\log(\beta) - \log(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\log(x) - \beta x,$$

$$l_\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log(p) = \log(\beta) - \psi(\alpha) + \log(x), \psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x),$$

$$l_\beta = \frac{\partial}{\partial\beta}\log(p) = \frac{\alpha}{\beta} - x,$$

$$l_{\alpha\alpha} = -\psi'(\alpha), l_{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}, l_{\beta\beta} = -\frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$\lambda_{11} = -l_{\alpha\alpha} = \psi'(\alpha), \lambda_{12} = \lambda_{21} = -l_{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}, \lambda_{22} = -l_{\beta\beta} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\det(\Lambda)}\lambda_{22} = \frac{\alpha/\beta^2}{\psi'(\alpha)\alpha/\beta^2 - 1/\beta^2} = \frac{\alpha}{\psi'(\alpha) - 1}.$$

b) $H(P) = Var(P)$ hat Influenzfunktion $H'(P)(x) = (x - \mu(P))^2 - \sigma^2(P)$, also

$$\sigma_H^2(P) = E[H'(P)(X)^2] = \beta_4(P) - \sigma^4(P).$$

Das Konfidenzintervall hat die Form

$$C = [H(P_n) \pm n^{-1/2}\, u_{\alpha/2}\sigma_H(P_n)].$$

für $\alpha = 0{,}99$ ist $u_{\alpha/2} = 2{,}81$.