Bericht zur Prüfung im September 1999 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 27. bis 29. September 1999 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Grundlagenseminar der DGVM über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluß an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. 21 von 27 Teilnehmern haben die Prüfung mit Erfolg bestanden. Den erfolgreichen Teilnehmern wird ihre Prüfungsurkunde anläßlich der Mitgliederversammlung der DGVM bzw. der DAV am 28. April 2000 in Hamburg überreicht werden.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt mußten mindestens 41 Punkte von 110 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 konnten maximal 30 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 20 Punkte, in Aufgabe 3 und 4 maximal 30 Punkte erreicht werden.

1. Aufgabe (30 Punkte)

i) Erweitern Sie das Bevölkerungsmodell und die Ausscheideordnung der Richttafeln 1998 um die Personengesamtheit „Vorgezogene Altersrentner" und um die altersabhängige Ausscheideursache „vorgezogene Inanspruchnahme von Altersruhegeld" für Aktive und Invalide. Bezeichnen Sie mit ${}^{u}z_x$ die unabhängige Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven (oder Invaliden), im Altersbereich $[x, x+1[$ wegen vorzeitiger Inanspruchnahme von Altersruhegeld auszuscheiden. Geben sie Formeln für alle (abhängigen) Ausscheidewahrscheinlichkeiten des Aktiven- und Invalidenbestandes an unter der Annahme, daß der Eintritt des Versorgungsfalles innerhalb eines Jahres gleichverteilt ist. Hinweis: Die Inanspruchnahme der regulären Altersrente soll entsprechend dem Modell der Richttafeln 1998 genau bei Vollendung des Endalters der Aktiven-/Invaliden-Ausscheideordnung erfolgen.
ii) Wie ändern sich die Formeln, wenn die Inanspruchnahme des Altersruhegeldes nur jeweils am Beginn eines Lebensalters erfolgen kann.
iii) Geben Sie jeweils die Formeln für die einjährigen Übergangswahrscheindlichkeiten vom Aktiven- und Invalidenbestand in den Bestand der vorgezogenen Altersrentner an.
iv) Es sei $z = 0{,}3$ für $60 \leq x < 65$. Bestimmen Sie unter Verwendung der nachstehend angegebenen Wahrscheinlichkeiten der Richttafeln und der in i) bis iii) abgeleiteten Formeln die Wahrscheinlichkeit für einen 60-jährigen Aktiven, im Alter 62 vorgezogenes Altersruhegeld zu beanspruchen.

Alter	q_x^{aa}	i_x
60	6,569	54,430
61	7,305	65,744
62	8,242	78,259

Lösung:

i) Die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten lauten:

a) Aktivenbestand	b) Invalidenbestand
${}^{v}i_x = i_x \cdot (1 - 0{,}5\ {}^{u}z_x)$	${}^{v}q_x^i = q_x^i \cdot (1 - 0{,}5\ {}^{u}z_x)$
${}^{v}q_x^{aa} = q_x^{aa} \cdot [1 - 0{,}5\ {}^{u}z_x]$	$z_x^i = {}^{u}z_x \cdot (1 - 0{,}5\ q_x^i)$
$z_x^{aa} = {}^{u}z_x \cdot [1 - 0{,}5 \cdot (i_x + q_x^{aa})]$	

ii) Falls Altersruhegeld nur am Beginn eines Lebensalters in Betracht kommt, gilt

a) Aktivenbestand	b) Invalidenbestand
${}^{v}i_x = i_x \cdot (1 - {}^{u}z_x)$	${}^{v}q_x^i = q_x^i$
${}^{v}q_x^{aa} = q_x^{aa} \cdot (1 - {}^{u}z_x)$	$z_x^i = {}^{u}z_x$
$z_x^{aa} = {}^{u}z_x$	

iii) Übergang vom Aktivenbestand in den Bestand der vorgezogenen Altersrentner

$$z_x^{aa} \cdot (1-q_x^r)/(1-0{,}5 \cdot q_x^r) + {}^{v}i_x \cdot 0{,}5 \cdot z_x^i/[1-0{,}5 \cdot (z_x^i + {}^{v}q_x^i)] \cdot (1-q_x^r)/(1-2/3 \cdot q_x^r)$$

Übergang vom Invalidenbestand in den Bestand der vorgezogenen Altersrentner

$$z_x^i \cdot (1-q_x^r)/(1-0{,}5 \cdot q_x^r)$$

iv)

x	**${}^{v}q_x^{aa}$ in 0/00**	**${}^{v}i_x$ in 0/00**
60	$6{,}569 \cdot (1 - 0{,}15) = 5{,}58365$	$54{,}430 \cdot (1 - 0{,}15) = 46{,}2655$
61	$7{,}305 \cdot (1 - 0{,}15) = 6{,}20925$	$65{,}744 \cdot (1 - 0{,}15) = 55{,}8824$
62	$8{,}242 \cdot (1 - 0{,}15) = 7{,}0057$	$78{,}259 \cdot (1 - 0{,}15) = 66{,}52015$
	z_x^{aa} in 0/00	
60	$300 \cdot (1 - 0{,}0305) = 290{,}850$	
61	$300 \cdot (1 - 0{,}03652) = 289{,}044$	
62	$300 \cdot (1 - 0{,}04325) = 287{,}025$	
	${}^{v}q_x^i$ in 0/00	**z_x^i in 0/00**
60	$27{,}556 \cdot (1 - 0{,}15) = 23{,}4226$	$300 \cdot (1 - 0{,}013778) = 295{,}866$
61	$25{,}857 \cdot (1 - 0{,}15) = 21{,}97845$	$300 \cdot (1 - 0{,}0129285) = 296{,}12145$
62	$24{,}204 \cdot (1 - 0{,}15) = 20{,}5743$	$300 \cdot (1 - 0{,}12102) = 296{,}3694$
	$1 - {}^{v}q_x^{aa} - {}^{v}i_x - z_x^{aa}$	**$1 - {}^{v}q_x^i - z_x^i$**
60	0,65730085	0,6807108
61	0,64886435	0,6819001
	$(1 - {}^{v}q_x^i - z_x^i)/[1 - 0{,}5 \cdot ({}^{v}q_x^i - z_x^i)]$	**$0{,}5 \cdot z_x^i \cdot [1 - 0{,}5 \cdot ({}^{v}q_x^i - z_x^i)]$**
60	0,8100272	
61	0,8108687	
62		0,1760899

Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus vier Komponenten:

$0{,}65730085 \cdot 0{,}64886435 \cdot 0{,}287025$
$+ 0{,}65730085 \cdot 0{,}0558824 \cdot 0{,}8108687 \cdot 0{,}2963694$
$+ 0{,}0462655 \cdot 0{,}8100272 \cdot 0{,}6819001 \cdot 0{,}2963694$
$+ 0{,}65730085 \cdot 0{,}64886435 \cdot 0{,}06652015 \cdot 0{,}1760899$
= 143,812 0/00

2. *Aufgabe* (20 Punkte)

Die Pensionsregelung der Firma ROINES sieht Invaliden-, Hinterbliebenen- und Altersrentenleistungen vor. Die Mitarbeiter können die Altersrente bereits bei Beendigung des Arbeitsverhältnisses mit Vollendung des 60. Lebensjahres in Anspruch nehmen. Die Invaliden-/Altersrente beträgt 10.000 DM/ Jahr, die Ehegattenrente beträgt 6.000 DM/Jahr. Aufgrund einer dauerhaft guten Auftragslage, die erfahrene Mitarbeiter erfordert, liegt es im Interesse der Firma, alle Mitarbeiter möglichst bis zum 65. Lebensjahr weiterzubeschäftigen. Um dies zu erreichen möchte sie den Mitarbeitern eine angemessene (d.h. der bisherigen Zusage wertgleiche) Aufstockung der Pensionsleistung gewähren, wenn diese die Inanspruchnahme der Altersrente über die Vollendung des 60. Lebensjahres hinaus aufschieben. Was schlagen Sie als Lösung vor (Verbale Darstellung mit Angabe der Formeln)? Gibt es eine Alternative zu ihrem favorisierten Vorschlag? Wenn ja, beschreiben Sie auch die Alternative.

Lösung:

Für die Erhöhung der Leistungen kommen beispielsweise folgende Ansätze und Teilaspekte in Betracht:

a) bei Hinausschieben des Altersrentenbezuges wird die Altersrente einschließlich der sich anschließenden Anwartschaft auf Ehegattenrente erhöht. Die Höhe der zugesagten Invalidenrente bleibt unverändert oder wird entsprechend erhöht.
b) die Neufestsetzung der Altersrente erfolgt nur für das Alter 65 oder wegen des gesetzlichen Hintergrundes (§ 6 BetrAVG) für jedes Alter zwischen 60 und 65; letzteres z.B. durch Herleitung eines versicherungsmathematischen Zuschlages für das Hinausschieben des Altersrentenbezuges.
c) Die Wertgleichheit der Zusagen wird auf den Barwert der ursprünglichen Zusage im Zeitpunkt der Änderung oder im Alter 60 bezogen oder auf die Jahresprämie der ursprünglichen Zusage. Alternativ kommt die verzinsliche Ansammlung der nicht abgerufenen Altersrentenzahlungen in Betracht mit Verrentung im hinausgeschobenen Zeitpunkt des Altersrentenbezuges.
d) Die Bewertung der ursprünglichen Zusage erfolgt unter der Annahme, daß alle Begünstigten die Altersrente im Alter 60 abrufen, oder unter Ansatz einer ggf. beobachteten Altersverteilung bei Abruf der Altersrente.
e) Die bei vorzeitigem Altersrentenbezug entsprechend früher einsetzende Anpassungsprüfungspflicht wird berücksichtigt oder nicht.

Formelelemente

Barwert der ursprünglichen Zusage

$10000 \cdot {}^{(12)}a_x^{aiA} + 6000 \cdot a_x^{aw}$, ermittelt für das Endalter 60

Barwert einer geänderten Zusage

– mit erhöhter Invaliden-, Alters- und Ehegattenrente, Altersgrenze 65

$R \cdot ({}^{(12)}a_x^{aiA} + 0{,}6 \cdot a_x^{aw})$, ermittelt für das Endalter 65

– mit unveränderter Invaliden-/Ehegattenrente im vorzeitigen Versorgungsfall

$10000 \cdot {}^{(12)}a_x^{aiA} + 6000 \cdot a_x^{aw} + R \cdot ({}^{(12)}a_{65}^{r} + 0{,}6 \cdot a_{65}^{rw}) \cdot D_{65}^{a}/D_x^{a}$

Fortsetzung des Prämienaufwandes

$${}^{(12)}P_x = B_x / {}^{(12)}a^a_{x,z-x}$$

mit B_x Barwert der Zusage im Eintrittsalter x nach den obigen Ansätzen.

Verrentung nicht gezahlter Altersrenten in Zusatzrente ZR ab Alter z.

$$ZR = K / ({}^{(12)}a^r_z + 0{,}6 \cdot a^{rw}_z)$$

In den Barwerten sind ggf. Erweiterungen der Ausscheideordnung (um vorzeitige Inanspruchnahme der Altersrente) und Rentenanpassungen bereits berücksichtigt.

3. Aufgabe (30 Punkte)

Gegenüber einem x-jährigen Aktiven besteht eine Pensionszusage auf eine $\frac{1}{t}$ – vorschüssig zahlbare Altersrente von jährlich R DM, lebenslänglich zahlbar ab Erreichen der Altersgrenze von $z > x$ Jahren, gleichgültig, ob der Berechtigte die Altersgrenze als Aktiver oder Invalider erreicht. Berechnen Sie den Leistungsbarwert dieser Zusage zum Alter x

1. auf der Basis der Aktivenausscheideordnung mit den Ausscheideursachen „Invalidität“ und „Tod als Aktiver“.
2. auf der Basis des Gesamtbestandes.
   Bemerkung: Beachten Sie, daß bei 2. der maßgebende Gesamtbestand sich aus dem Bestand der x-jährigen Aktiven entwickelt. Deshalb gehen Sie in folgenden Schritten vor:
   2.1 Geben Sie die Berechnungsvorschrift für die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten des Gesamtbestandes an, der sich aus einem Bestand von x-jährigen Aktiven entwickelt.
   2.2 Geben Sie auf dieser Basis den Barwert für die Altersrente an.
3. Zeigen Sie, daß die beiden Darstellungen des Barwerts dieser Zusage nach 1. und 2. identisch sind.
   Hinweis: Berechnen Sie unter Beachtung von $l^g_x = l^a_x$ die Größe $l^J_z = l^g_z - l^a_z$, die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, das Alter z als Invalider zu erreichen, indem Sie von der Beziehung

   $$l^J_{u+1} = l^J_u \, p^i_u + l^a_u \, i_u \; {}_{\frac{1}{2}}p^i_{u+\frac{1}{2}}, \qquad u = x, x+1, \ldots, z-1,$$

   ausgehen (Sie können sich l^J_z und damit auch die l^J_u als Anzahl der Invaliden vorstellen, die sich aus einem Bestand von x-jährigen Aktiven entwickeln) und drücken Sie den Barwert der Zusage zum Alter x mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten aus.

Lösung:

1. Mit $n = z - x$ gilt:

$$B_x = R\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp^a_x \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \, {}_{n-k-\frac{1}{2}}^{(t)}a^i_{x+k+\frac{1}{2}} + v^n \, {}_np^a_x \, {}^{(t)}a^r_z\right]$$

mit

$${}_{m-\frac{1}{2}}^{(t)}a^i_{u+\frac{1}{2}} = v^{m-\frac{1}{2}} \, {}_{m-\frac{1}{2}}p^i_{u+\frac{1}{2}} \, {}^{(t)}a^r_z, \qquad m = z - u$$

$$= v^{\frac{1}{2}} \, v^{m-1} \, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{u+\frac{1}{2}} \, {}_{m-1}p^i_{u+1} \, {}^{(t)}a^r_z$$

$$\Rightarrow B_x = v^n R\left[\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp^a_x \, i_{x+k} \, {}_{n-k-\frac{1}{2}}p^i_{x+k+\frac{1}{2}} + {}_np^a_x\right] {}^{(t)}a^r_z$$

$$\left(p^a_u = 1 - i_u - q^{aa}_u, \quad {}_kp^a_u = \prod_{j=0}^{k-1} p^a_{u+j}, \quad {}_kp^i_u = \prod_{j=0}^{k-1} p^i_{u+j} \right)$$

2.1 Ausgehend von $l_x^g = l_x^a$ gilt für u = x, x + 1, ..., z − 1:
Die Werte l_u^g, q_u^g, l_u^a seien bekannt. Es folgt:

$$l_{u+1}^g = l_u^g\,(1-q_u^g)$$

$$l_{u+1}^a = l_u^a\,(1-i_u-q_u^{aa})$$

$$q_{u+1}^g = \frac{l_{u+1}^a}{l_{u+1}^g}\, q_{u+1}^a + \frac{l_{u+1}^g - l_{u+1}^a}{l_{u+1}^g}\, q_{u+1}^i$$

mit q_u^a = Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters u, innerhalb eines Jahres zu sterben, sei es als Aktiver oder Invalider (Näherungsweise: $q_u^a = q_u^{aa} + i_u\,{}_{\frac{1}{2}}q_{u+\frac{1}{2}}^i$)

Unter Beachtung von $l_x^g = l_x^a$ und damit $q_x^g = q_x^a$ haben wir damit eine Rechenvorschrift zur Berechnung der Ausscheidewahrscheinlichkeit q_u^g des ab Alter x beginnenden Gesamtbestandes.

2.2

$$B_x = R\, v^n\, {}_np_x^g\, {}^{(t)}a_z^r$$

3. Unter Beachtung von $l_x^g = l_x^a$ gilt:

$$l_{x+1}^I = l_x^a\, i_x\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i$$

$$l_{x+2}^I = l_{x+1}^I\, p_{x+\frac{1}{2}}^i + l_{x+1}^a\, i_{x+1}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+1+\frac{1}{2}}^i$$

$$= l_x^a \left(i_x\, {}_{1+\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i + p_x^a\, i_{x+1}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+1+\frac{1}{2}}^i \right)$$

Annahme für beliebiges k:

$$l_{x+k}^I = l_x^a \sum_{j=0}^{k-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\, {}_{k-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i$$

Mit

$$l_{x+k+1}^I = l_{x+k}^I\, p_{x+k}^i + l_{x+k}^a\, i_{x+k}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+k+\frac{1}{2}}^i$$

und

$${}_{k-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i\, p_{x+k}^i = \frac{l_{x+k}^i}{l_{x+j+\frac{1}{2}}^i}\,\frac{l_{x+k+1}^i}{l_{x+k}^i} = {}_{k+1-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i$$

folgt:

$$l_{x+k+1}^I = l_x^a \left[\sum_{j=0}^{k-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\, {}_{(k+1)-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i + {}_kp_x^a\, i_{x+j}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+k+\frac{1}{2}}^i \right]$$

$$= l_x^a \sum_{j=0}^{(k+1)-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\, {}_{(k+1)-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i$$

d.h. die Annahme gilt auch für k + 1, damit also für alle k. Somit folgt:

$$l_z^I = l_x^a \sum_{j=0}^{n-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\, {}_{n-j-\frac{1}{2}}p_{x+j+\frac{1}{2}}^i$$

Nun gilt für B_x:

$$B_x = v^n\, R\, \frac{l_z^I + l_z^a}{l_x^a}\, {}^{(t)}a_z^{(r)} = v^n\, R\, \frac{l_z^g}{l_x^g}\, {}^{(t)}a_z^{(r)}$$

Der 2. Term dieser Gleichung entspricht der Lösung nach 1, der 3. Term der Lösung nach 2.2.

4. Aufgabe (30 Punkte)

Ein Unternehmen will an einen gerade eingestellten Mitarbeiter des (zum Beginn des Geschäftsjahres) versicherungstechnischen Alters x eine beitragsorientierte Pensionszusage erteilen, der Art, daß jeweils jährlich vorschüssig die Prämie P (fiktiv) einbehalten werden soll. Dabei sollen als vorzeitige Leistung bei Invalidität zum Ende des Jahres des Eintritts der Invalidität, falls der Invalide noch lebt, das Aktivendeckungskapital zum Ende des Jahres in eine Invalidenrente einschließlich eines Witwenrentenanspruchs vom Bruchteil w ($0 \leq w \leq 1$) dieser Invalidenrente umgerechnet werden. Falls der Invalide das Jahresende nicht erlebt, soll dieses Deckungskapital zum Ende des Jahres an die Erben ausgezahlt werden. Als vorzeitige Leistung bei Aktiventod soll das Aktivendeckungskapital zum Ende des Jahres, falls die Witwe das Ende des Jahres erlebt, zunächst durch Verrentung in eine fiktive Invalidenrente einschließlich einer Witwenrentenanwartschaft zum Bruchteil w dieser fiktiven Invalidenrente umgerechnet werden; die Witwe erhält dann eine Witwenrente vom Bruchteil w der fiktiven Invalidenrente. Falls die Witwe das Ende dieses Jahres nicht erlebt, soll keine Leistung fällig werden. Bei Erreichen der Altersgrenze z als Aktiver soll das angesammelte Deckungskapital in eine lebenslänglich laufende Altersrente mit einem Witwenrentenanspruch vom Bruchteil w dieser Rente umgerechnet werden. Die gewährten Renten sollen jeweils lebenslänglich jährlich vorschüssig bezahlt werden. Um sich ein Bild von den finanziellen Auswirkungen dieser Zusage zu machen, stellen Sie sich als versicherungsmathematischer Sachverständiger des Unternehmens die folgenden Fragen:

1. Wie entwickelt sich das Deckungskapital, ausgehend von ${}_0V_x = 0$, von Jahr zu Jahr? (Gehen Sie von den versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen aus)
2. Welcher Betrag steht beim Erreichen der Altersgrenze als Aktiver zur Verrentung zur Verfügung? (Geben Sie bitte einen geschlossenen Ausdruck an!)
3. Geben Sie die Risikoprämie ${}_mP_x^{Ri}$ des (m + 1)-ten Jahres für den Invaliditätsfall an.
4. Geben Sie in Abhängigkeit von ${}_mV_x$ (Aktivendeckungskapital nach m Jahren) und P die Risikoprämie ${}_mP_x^{Rq}$ des (m + 1)-ten Jahres für den Fall des Todes als Aktiver an.
5. Beschreiben Sie das mögliche Vorzeichenverhalten der Risikoprämie nach 4.
6. Welche Rückstellung ist zu bilden, wenn der Berechtigte nach der Hälfte seiner möglichen Dienstzeit ($\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$) zum Ende des Wirtschaftsjahres mit versicherungstechnischem Alter u mit gesetzlich unverfallbarem Anspruch aus dem Unternehmen ausscheidet?

Lösung:

1.

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x + P &= {}_m\hat{L}_x + v\, p^a_{x+m}\; {}_{m+1}V_x, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1 \\
{}_m\hat{L}_x &= {}_mL_x^{(0)} + i_{x+m}\; {}_mL_x^i + q^{aa}_{x+m}\; {}_mL_x^q \\
{}_mL_x^{(0)} &= 0 \\
{}_mL_x^i &= v\; {}_{m+1}V_x \\
{}_mL_x^q &= v\, w\, h_{x+m}\; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \frac{{}_{m+1}V_x}{a^i_{x+m+1} + w\, a^{iw}_{x+m+1}}\, a^w_{y(x+m)+1} \\
p^a_{x+m} &= 1 - i_{x+m} - q^{aa}_{x+m}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\; {}_mV_x + P = q^{aa}_{x+m}\; {}_mL_x^q + v(1 - q^{aa}_{x+m})\; {}_{m+1}V_x
$$

$$
= v \underbrace{\left[1 - \underbrace{q^{aa}_{x+m} \left(1 - w\, h_{x+m}\; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \frac{a^w_{y(x+m)+1}}{a^i_{x+m+1} + w\, a^{iw}_{x+m+1}} \right)}_{=:\, q'_{x+m}} \right]}_{=:\, p'_{x+m}} {}_{m+1}V_x
$$

$$\Rightarrow {}_mV_x + P = v\, p'_{x+m}\; {}_{m+1}V_x$$

$$\Rightarrow {}_{m+1}V_x = \frac{r({}_mV_x + P)}{p'_{x+m}}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

mit $\quad n = z - x$

2. Ausgehend von

$$v\, p'_{x+m}\; {}_{m+1}V_x = {}_mV_x + P \qquad \text{nach 1.}$$

erhalten wir wegen ${}_0V_x = 0$

$$v\, p'_x\; {}_1V_x = P$$

$$v\, p'_{x+1}\; {}_2V_x = {}_1V_x + P$$

$$\Rightarrow v^2\; {}_2p'_x\; {}_2V_x = v\, p'_x\, V_x + v\, p'_x\, P = P + v\, p'_x\, P$$

Allgemein:

$$v^m\; {}_mp'_x\; {}_mV_x = P \sum_{k=0}^{m-1} v^k\; {}_kp'_x = P\, a'_{x\overline{m}|}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n$$

(Nachweis durch vollständige Induktion)

$$\text{mit} \qquad a'_{x\overline{m}|} = \sum_{k=0}^{m-1} v^k\; {}_kp'_x$$

Es folgt:

$${}_mV_x = \frac{P\, a'_{x\overline{m}|}}{v^m\; {}_mp'_x} \qquad m = 0, 1, \ldots, n,$$

speziell also

$${}_nV_x = \frac{P\, a'_{x\overline{n}|}}{v^n\; {}_np'_x}$$

<u>Bem.</u>: Die direkte Berechnung ${}_0V_x \to {}_1V_x \to {}_2V_x$ führt zwar zum gleichwertigen, aber weniger eleganten Resultat

$${}_nV_x = P \sum_{k=1}^{n} \frac{r^k}{{}_kp'_{z-k}}$$

Schließlich kann man aus Gl. (1) noch ersehen, daß sich ein von der Prämie unabhängiger „Barwert" gemäß ${}_0B'_x = v^n\; {}_np'_x\; {}_nV_x = Pa'_{x\overline{n}|}$ angeben läßt, wodurch ebenfalls das gleiche Resultat erhalten wird.
Alle drei Wege sind in den Lösungen zu den Aufgaben eingeschlagen und beschrieben worden.

3. $${}_mP^{Ri}_x = i_{x+m}\,({}_mL^i_x - v_{m+1}\, V_x) = 0$$

4.
$$
\begin{aligned}
{}_mP_x^{Rq} &= q_{x+m}^{aa}\,({}_mL_x^{q} - v_{m+1}\,V_x)\\
&= v\,q_{x+m}^{aa}\left[w\,h_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\ \frac{a^{w}_{y(x+m)+1}}{a^{i}_{x+m+1}+w\,a^{iw}_{x+m+1}}-1\right]{}_{m+1}V_x\\
&= -v\,q'_{x+m}\ {}_{m+1}V_x\\
&= -q'_{x+m}\,({}_mV_x + P - {}_mP_x^{Rq})\\
&= -q'_{x+m}\,({}_mV_x + P) + q'_{x+m}\ {}_mP_x^{Rq}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ {}_mP_x^{Rq}\cdot(1-q'_{x+m}) = -q'_{x+m}\,({}_mV_x + P)
$$

$$
\Rightarrow\ {}_mP_x^{Rq} = -\frac{q'_{x+m}\,({}_mV_x + P)}{p'_{x+m}}
$$

5. Das Vorzeichen von ${}_mP_x^{Rq}$ hängt vom Vorzeichen von q'_{x+m} ab:

$$
\begin{aligned}
q'_{x+m} > 0 &\Rightarrow {}_mP_x^{Rq} < 0\\
q'_{x+m} < 0 &\Rightarrow {}_mP_x^{Rq} > 0
\end{aligned}
$$

wegen

$$
q'_{x+m} = q^{aa}_{x+m}\left(1 - w\,h_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\ \frac{a^{w}_{y(x+m)+1}}{a^{i}_{x+m+1}+w\,a^{iw}_{x+m+1}}\right)
$$

gilt:

$$
w\,h_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\ \frac{a^{w}_{y(x+m)+1}}{a^{i}_{x+m+1}+w\,a^{iw}_{x+m+1}}\
\begin{aligned}
&< 1 \Rightarrow {}_mP_x^{Rq} < 0\\
&> 1 \Rightarrow {}_mP_x^{Rq} > 0
\end{aligned}
$$

Bem.: Das Letztere ist der Fall für höhere w (w deutlich >100%) und jüngere Alter x + m, sodass in solchen Fällen mit zunehmendem Alter das Vorzeichen der Risikoprämie wechseln kann.

6. Es ist der Barwert B_u des unverfallbaren Anspruchs zu bilden:

$$
\begin{aligned}
m &= u - x\\
B_u &= \frac{1}{2}({}_mV_x + P\,a_u^{a})\\
&= \frac{P}{2}\left[\frac{a'_{x\overline{m}|}}{v^{m}\ {}_mp'_x} + a_u^{a}\right]\\
&= \frac{P}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{r^{k}}{{}_kp_{u-k}} + a_u^{a}\right]
\end{aligned}
$$