Bericht zur Prüfung im September 1998 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 21. bis 23. September 1998 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl. Math. Hartmut Engbroks ein Grundlagenseminar der DGVM über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluß an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. 22 von 27 Teilnehmern haben die Prüfung mit Erfolg bestanden. Den erfolgreichen Teilnehmern wird ihre Prüfungsurkunde anläßlich der Mitgliederversammlung der DGVM bzw. der DAV am 30. April 1999 in Berlin überreicht werden.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt mußten mindestens 45 Punkte von 100 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 wurden maximal 20 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 30 Punkte, in Aufgabe 3 maximal 30 Punkte und in Aufgabe 4 maximal 20 Punkte erreicht.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

In der Firma Rein & Raus GmbH & Co. KG ist ein reger Personalwechsel zu beobachten. Der folgende Auszug aus der Datenliste der Belegschaft gibt insbesondere Auskunft über die Bestandsentwicklung im Jahre 1997 für die Arbeitnehmer, die am 1.1.1997 das versicherungstechnische Alter 30 haben:

Name	**Geburtsdatum**	**Eintrittsdatum**	**Austrittsdatum**
Bechermann, Karl	1.11.1966	1.08.1995	31.03.1997
Klemmgern, Steven	15.06.1967	1.02.1997	31.10.1997
Laune, Kurt	1.03.1967	1.02.1995	noch tätig
Löffelklau, Ludwig	17.01.1967	1.12.1996	30.11.1997
Meistermann, Michael	15.08.1966	1.07.1997	noch tätig
Penner, Charly	12.09.1996	1.01.1989	31.01.1997
Tüchtig, Gottlieb	13.11.1966	2.05.1997	noch tätig
Zocker, Eduard	15.07.1966	1.04.1997	30.04.1997

Sämtliche Austritte erfolgten aufgrund einer Kündigung des Arbeitsverhältnisses. Ermitteln Sie aus diesem Datenmaterial die partielle einjährige Fluktuationshäufigkeit für 30-jährige Aktive der Firma, und zwar alternativ

1. unter Verwendung der Standardformel ohne Berücksichtigung der tatsächlichen Verweildauer im Bestand und
2. indem Sie für jeden Kalendermonat Häufigkeiten herleiten, innerhalb eines Monats wegen Fluktuation auszuscheiden, und hieraus eine Jahresausscheidehäufigkeit ermitteln.

Lösung:

1. Der Anfangsbestand am 1.1.1997 umfaßt 4 Personen, der Endbestand am 31.12.1997 umfaßt 3 Personen. 5 Personen sind im Laufe des Jahres 1997 ausgeschieden. Damit ergibt sich nach der Standardformel für die einjährige partielle Fluktuationshäufigkeit

$$q = \frac{2 \cdot T}{B^A + B^E + T} = \frac{10}{4+3+5} = \frac{10}{12} = 0{,}8333$$

2. Für die einzelnen Kalendermonate ergibt sich folgendes:

Monat	Bestand am Beginn	Bestand am Ende	Fluktuationsfälle	Häufigkeit
Januar	4	3	1	0,25
Februar	4	4	0	0,00
März	4	3	1	0,25
April	4	3	1	0,25
Mai	3	4	0	0,00
Juni	4	4	0	0,00
Juli	5	5	0	0,00
August	5	5	0	0,00
September	5	5	0	0,00
Oktober	5	4	1	0,20
November	4	3	1	0,25
Dezember	3	3	0	0,00

Aus den monatlichen Ausscheidehäufigkeiten ergibt sich eine Verbleibehäufigkeit für das ganze Jahr von

$$0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}8 \times 0{,}75 = 0{,}253125$$

und damit eine Ausscheidehäufigkeit von $1 - 0{,}253125 = 0{,}746875$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Die Firma Plüsch & Brumm GmbH, die sich auf die Produktion von Teddybären spezialisiert hat, bereitet sich auf die für das Jahr 1999 von ihr erhoffte Möglichkeit vor, ihre betriebliche Altersversorgung als Beitragszusagen zu gestalten. Vorgesehen ist ein Sonderbeitrag in Höhe von 30.000 DM für jedes Belegschaftsmitglied zum 1. 1. 1999 aus Anlaß des 50. Jahrestages der Produktionsaufnahme ihres Spitzenmodells „Heidel-Bär" (mit lila Schnauze) sowie ein ab 1999 zunächst auf 5 Jahre befristeter jährlicher Beitrag in Höhe von 2% der Festgehälter, jeweils zum Jahresende. Sollte der neuentwickelte „Ara-Bär" (mit Turban) ein Erfolg werden, würde der jährliche Beitrag von 2% für die derzeit vorhandene Belegschaft jeweils bis zur Beendigung des Dienstverhältnisses auf Dauer zur Verfügung gestellt. Die Beiträge sollen professionell investiert werden, man erwartet eine Rendite von mindestens 6% p.a.
Herr Urs, ein Mitarbeiter der Firma, ist am 1. 1. 1999 48 Jahre alt und trat am 1. 3. 1982 in die Firma ein und leitet die Endkontrolle (Brummtest). Sein Festgehalt beträgt 8.000 DM monatlich.
Die Firma tritt an einige junge Aktuare mit folgenden Fragen heran:

1. Welche Invaliden- und Altersrentenanwartschaft könnte Herrn Urs am 1. 1. 1999 aus den vorgesehenen Beiträgen (einschließlich der erwarteten Zinsen) unverbindlich in Aussicht gestellt werden, wenn bei der Kalkulation Invaliden- und Altersrenten in gleicher Höhe angesetzt werden? Gehen Sie alternativ davon aus, daß der „Ara-Bär" ein Erfolg wird oder nicht.
2. Welchen Stand hätte die Anwartschaft auf Altersrente am 1. 1. 1999, wenn die Invalidenrente bis zur Altersgrenze (65) nur halb so hoch sein soll wie die Altersrente? Ein etwaiger Erfolg des „Ara-Bären" soll hier noch nicht berücksichtigt werden.
3. Welchen Stand hätte das Versorgungskonto für Herrn Urs am 31. 12. 1999, wenn tatsächlich 6% Zins erzielt werden und sein Konto um den zum 1. 1. 1999 zu ermittelnden einjährigen Risikobeitrag für alle bestehenden biometrischen Risiken belastet würde? Ein etwaiger Erfolg des „Ara-Bären" soll hier noch nicht berücksichtigt werden.
4. Welcher Teilwert im Sinne von § 6a EStG ergäbe sich am 31. 12. 1999 für Herrn Urs, wenn die Firma ihm statt der Beitragszusage eine „klassische" Leistungszusage auf Invaliden- und Altersrente (in jeweils gleicher Höhe) erteilt hätte und die Leistung in Höhe der Berechnungsergebnisse von i) (ohne „Ara-Bär"-Erfolg) festgesetzt wäre?
5. Vergleichen Sie den Stand des Versorgungskontos gemäß Ziffer iii) mit dem Teilwert gemäß Ziffer iv) und erklären Sie das Ergebnis.

Bitte unterstützen Sie die jungen Aktuare und formulieren Sie Antworten zu den Fragen unter Verwendung der beigefügten Tabellenwerte. Die einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit eines 48-jährigen beträgt 6,951 0/00 und die einjährige Aktivensterbewahrscheinlichkeit beträgt 3,049 0/00.

Lösung:

1. – „Ara-Bär" nicht erfolgreich:

$$R^{1/12} = \frac{30000 + 0{,}02 \cdot 12 \cdot 8000 \cdot \dfrac{N^a_{49} - N^a_{54}}{D^a_{48}}}{12 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{48}}$$

$$= \frac{30000 + 1920 \cdot \dfrac{47254{,}86 - 24640{,}15}{5556{,}42}}{12 \times 4{,}214}$$

$$= \frac{37814{,}43}{50{,}568} = \underline{\underline{747{,}79}}$$

– „Ara-Bär" erfolgreich:

$$R^{1/12} = \frac{30000 \cdot 1920 \cdot \dfrac{N^a_{49}}{D^a_{48}}}{12 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{48}}$$

$$= \frac{30000 + 1920 \dfrac{47254{,}86}{5556{,}42}}{12 \cdot 4{,}214} = \frac{46328{,}74}{50{,}568} = \underline{\underline{916{,}17}}$$

2. $$R^{1/12} = \frac{37814{,}43}{12 \cdot ({}^{(12)}a^{aiA}_{48} - 0{,}5\,{}^{(12)}a^{ai(65)}_{48})} = \frac{37814{,}43}{12 \cdot 3{,}585} = \underline{\underline{879{,}00}}$$

3. Kapital am Jahresbeginn — 30000 DM

Zins für ein Jahr 6% · 30000 — 1800 DM

Beitrag am Jahresende 1920 · — 1920 DM

Risikobeitrag Tod

$+ q^a_{48} \cdot 30000 \cdot 1{,}06 = 0{,}003049 \cdot 31800 =$ — 97 DM

Risikobeitrag Invalidität

$$- i_{48} \cdot \left[\left(\frac{{}^{(12)}a^i_{48} + {}^{(12)}a^i_{49}}{2} - \frac{1}{24}\right) \cdot R \cdot r^{1/2} - 30000 \cdot r\right]$$

$$= 0{,}006951 \cdot \left[\left(\frac{11{,}002 + 10{,}985}{2} - \frac{1}{24}\right) \cdot 12 \cdot 747{,}79 \cdot 1{,}06^{1/2} - 31800\right]$$

$= 0{,}006951\ [101181 - 31800]$ — 482 DM

Kapital am Ende — $\underline{\underline{33335 \text{ DM}}}$

4. $${}_mV_x = 12 \times 747{,}79 \cdot \left({}^{(12)}a^{aiA}_{49} - \frac{{}^{(12)}a^{aiA}_{31}}{a^a_{31\,\overline{34|}}} \cdot a^a_{49\,\overline{16|}}\right)$$

$$= 12 \cdot 747{,}79 \cdot \left(4{,}432 - \frac{1{,}736}{14{,}1536} \cdot 9{,}1059\right)$$

$$= \underline{\underline{29748}}$$

5. Der Teilwert geht von einer Verteilung der Belastungen durch gleichbleibende Jahresbeträge über die gesamte Dienstzeit aus. Am Bewertungsstichtag 31.12.1999 ist 18/34 der Dienstzeit bis zum Pensionierungsalter 65 vergangen. Demgegenüber folgt die Kapitalbildung im beitragsbezogenen Modell dem Beitragsverlauf; im vorliegenden Fall ist zum 31.12.1999 bereits fast 90% des Beitragsaufkommens erreicht.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Bekanntlich lautet der exakte Ausdruck für den Barwert einer lebenslänglich pro Zahlungsperiode $\frac{1}{t}$ vorschüssig zahlbaren Rente eines x-jährigen

$$a_x^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x$$

Hier bedeuten $t \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Perioden pro Jahr, $v = \frac{1}{1+i}$ der Diskontierungsfaktor mit Zins i p.a. und ${}_sp_x$ die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, das Alter $x + s$ *mit* $s \in \mathbb{R}_+$ zu erreichen.

1. Zeigen Sie, daß für beliebige x $a_x^{(t)}$ in der Form

$$a_x^{(t)} = L_x^{(t)} + v p_x a_{x+1}^{(t)}$$

   darstellbar ist und geben Sie $L_x^{(t)}$ (in exakter Form) an.

2. Zeigen Sie mittels der Interpolation

$$v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x = 1 - \frac{k}{t} + \frac{k}{t} v p_x, \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, t \text{ und alle } x,$$

   daß sich $a_x^{(t)}$ in der Form $a_x^{(t)} = a_x - k^{(t)}$ (mit $k^{(t)}$ also unabhängig von x) darstellen läßt, und geben Sie $k^{(t)}$ unter dieser Voraussetzung explizit an.

3. Zeigen Sie, daß das Ergebnis $a_x^{(t)} = a_x - k^{(t)}$ auch mittels der Interpolation

$$v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x = 1 - f\left(\frac{k}{t}\right) + v p_x f\left(\frac{k}{t}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, t$$

   mit

$$f\colon [0,1] \to [0,1]$$

   sowie

$$f(0) = 0$$

   und

$$f(1) = 1$$

   gewonnen werden kann, wobei f vom Zins abhängen darf. Geben Sie auch hier $k^{(t)}$ an.
   Bem.: f muß noch weitere Voraussetzungen erfüllen, die jedoch hier nicht interessieren.

4. Zeigen Sie, daß f gemäß

$$s \mapsto f(s) = \frac{s(1+i)}{1+is}, \quad s \in [0,1]$$

   die an die Funktion f gestellten Forderungen erfüllt, und geben Sie das zugehörige $k^{(t)}$ (als Summenausdruck) an.

5. Berechnen Sie unter Ansatz von f gemäß 4. und unter Ansatz der linearen Interpolation für die ${}_{\frac{k}{t}}p_x$ gemäß

$${}_{\frac{k}{t}}p_x = 1 - \frac{k}{t} + \frac{k}{t} p_x$$

   die hieraus resultierende Näherung für $v^{\frac{k}{t}}$. Interpretieren Sie den gewonnenen Ausdruck.

Lösung:

1.

$$
\begin{aligned}
a_x^{(t)} &= \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x \\
&= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x + \frac{1}{t} \sum_{k \geq t} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x \\
&= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x + \frac{1}{t} \sum_{k \geq t} v v^{\frac{k-t}{t}} p_x {}_{\frac{k-t}{t}}p_{x+1} \\
&= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x + v p_x \underbrace{\frac{1}{t} \sum_{k \geq t} v^{\frac{k-t}{t}} {}_{\frac{k-t}{t}}p_{x+1}}_{a_{x+1}^{(t)}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow a_x^{(t)} = L_x^{(t)} + v p_x a_{x+1}^{(t)}$$

$$\text{mit } L_x^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x$$

2.

$$
\begin{aligned}
a_x^{(t)} &= \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x \\
&= \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x \frac{1}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} v^{\frac{\lambda}{t}} {}_{\frac{\lambda}{t}}p_{x+k} \\
&= \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x L_{x+k}^{(t)} \qquad \text{nach 1}
\end{aligned}
$$

$$\text{mit } L_x^{(t)} = 1 - \frac{t-1}{2t} + v p_x \frac{t-1}{2t},$$

wie eine leichte Rechnung zeigt (vgl. auch Lösung zu 3.) Wir setzen

$$k^{(t)} = \frac{t-1}{2t}$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
a_x^{(t)} &= \sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x - k^{(t)} \underbrace{\left[\sum_{k \geq 0} v^k {}_kp_x - \sum_{k \geq 0} v^{k+1} {}_{k+1}p_x \right]}_{=1} \\
&= a_x - k^{(t)}.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
L_x^{(t)} &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} v^{\frac{k}{t}} {}_{\frac{k}{t}}p_x \\
&= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \left[1 - f\left(\frac{k}{t}\right) + v p_x f\left(\frac{k}{t}\right) \right] \\
&= \frac{1}{t} \left[t - (1 - v p_x) \sum_{k=0}^{t-1} f\left(\frac{k}{t}\right) \right] \\
&= 1 - (1 - v p_x) \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} f\left(\frac{k}{t}\right)
\end{aligned}
$$

Wir setzen $k^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} f\left(\frac{k}{t}\right)$ und erhalten damit

$$L_x^{(t)} = 1 - k^{(t)}(1 - vp_x)$$

und wie in der Lösung zu 2

$$a_x^{(t)} = a_x - k^{(t)}.$$

4. Bei $f(s) = \frac{s(1+i)}{1+is}$, $s \in [0, 1]$ gilt:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1+i}{1+i} = 1$$

sowie für $s \in [0, 1]$:

$$0 \le f(s) = \frac{s(1+i)}{1+is} = \frac{1+i}{\frac{1}{s}+i} \le 1 \quad \text{wg.} \ \frac{1}{s} \ge 1$$

$$\Rightarrow k^{(t)} = \frac{1+i}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{k}{t+ik}$$

Bem.: Dieses $k^{(t)}$ entspricht dem $k^{(t)}$ der „Richttafeln 1998" von Heubeck.

5.

$$\frac{k}{t}p_x = 1 - \frac{k}{t} + \frac{k}{t}p_x = \frac{t - k(1-p_x)}{t}$$

$$\begin{aligned} v^{\frac{k}{t}}\, \frac{k}{t}p_x &= 1 - \frac{k(1+i)}{t+ik} + vp_x \frac{k(1+i)}{t+ik} \\ &= \frac{t + ik - k - ik + kp_x}{t+ik} \\ &= \frac{t - k(1-p_x)}{t+ik} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^{\frac{k}{t}} = \frac{t}{t+ik}$$

$$\Rightarrow r^{\frac{k}{t}} = 1 + \frac{k}{t}i$$

Einfacher Zins für k Perioden: $r^{\frac{k}{t}}$ stellt also gerade den Wert dar, auf den der Betrag 1 bei einfacher Verzinsung nach k Perioden aufgelaufen ist.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

1. Ein Unternehmen möchte eine möglichst zutreffende Bewertung seiner Pensionsverpflichtungen durchführen und berücksichtigt damit bei der Bewertung neben den Invaliditäts- und Sterbewahrscheinlichkeiten von Aktiven noch deren Fluktuationswahrscheinlichkeiten. Dabei geht es davon aus, daß die i_x und q_x^{aa} (dort: q_x^a) der „Richttafeln" von Heubeck bei Vernachlässigung der Fluktuation zutreffend sind, und daß die Fluktuationswahrscheinlichkeiten s_x nur vom Alter x abhängen und unmittelbar als abhängige Wahrscheinlichkeiten im Unternehmen gemessen wurden, gegenüber denen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten der „Richttafeln" unabhängig sind. Beschreiben Sie die hier vorliegende zusammengesetzte Ordnung und geben Sie die Ausscheidewahrscheinlichkeiten dieses Modells an.

2. Die Zusage des Unternehmens sieht an Leistungen nach Ausscheiden bei Erreichen der Altersgrenze oder vorzeitiger Invalidität nach m Jahren eine dienstzeitabhängige lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Rente in Höhe von R_m vor. Bei Ausscheiden infolge Todes sind keine Leistungen vorgesehen. Bei Ausscheiden aus sonstigem Grunde (Fluktuation) bleibt die unverfallbare Anwartschaft nach dem Betriebsrentengesetz erhalten, d.h., nach Ausscheiden nach $m < n$ Jahren mit (i.d.R.) $m \geq 10$ stellt sich der verbleibende Anspruch auf den Bruchteil $\frac{m}{n}$ desjenigen Anspruchs, der bei Eintritt des Versorgungsfalles ohne Ausscheiden zu leisten wäre. Dabei stellt n die Anzahl der Jahre dar, die der Berechtigte vom Eintritt in das Unternehmen bis zum Erreichen der Altersgrenze zurücklegen kann. Geben Sie den unverfallbaren Anspruch bei Ausscheiden nach m Jahren für die Jahre $m + k$, $k = 0, 1, \ldots, n - m$ an.
3. Sei Ausscheideursache 1 die Invalidität und Ausscheideursache 2 die Fluktuation. Geben Sie die Erwartungswerte der Leistungen ${}_mL_x^{(0)}$, ${}_mL_x^{(1)}$ und ${}_mL_x^{(2)}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, für die beschriebene Zusage an (vgl. Abschn. 2.2 (Kapitel 2) des Ihnen zur Verfügung stehenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen", im folgenden zitiert mit „Math").
4. Geben Sie den Erwartungwert ${}_m\hat{L}_x$ der gesamten Leistung an, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x + m, x + m + 1]$ als Interner ausgelöst werden kann (vgl. Math. Gl. (2.2.1)).
5. Geben Sie den Barwert der Gesamtverpflichtung ${}_0B_x$ zum Alter x an (vgl. Math. Gl. (2.2.2)).

Bem.: Bei der Darstellung der verschiedenen Erwartungswerte wird eine sorgfältige Darstellung der dabei benutzten Wahrscheinlichkeiten erwartet.

Lösung:

1. Da die s_x unmittelbar als abhängige Wahrscheinlichkeit gemessen sind, gegenüber denen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten der „Richttafeln" unabhängig sind, sind diese zu modifizieren. Näherungsweise erhalten wir:

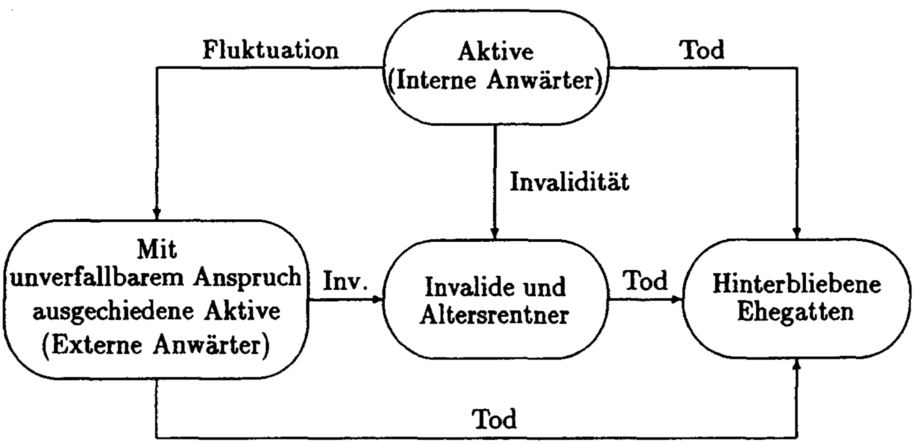
   $\hat{i}_x = i_x\left(1 - \frac{1}{2}s_x\right)$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres aus dem Aktivenbestand durch Invalidität auszuscheiden

   $\hat{q}_x^{aa} = q_x^{aa}\left(1 - \frac{1}{2}s_x\right)$: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben,

   sowie, da unmittelbar gemessen,

   s_x: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Fluktuation auszuscheiden.

   Insgesamt liegt als Modell eine zusammengesetzte Ordnung mit $h = 3$ vorzeitigen Ausscheideursachen $\hat{i}_x$, $\hat{q}_x^{aa}$ und s_x vor gemäß dem folgenden Bild:



Bem.: Wie üblich wird bei Ausscheiden durch Tod nicht unterschieden nach „Tod unter Hinterlassung eines Ehegatten" und „Tod ohne Ehegattenanspruch", so daß die Entscheidung, ob bei Tod eine Anwartschaft besteht, im Bestand „Hinterbliebene Ehegatten" fällt.

2. Bei Ausscheiden durch Fluktuation nach $m < n$ Jahren beträgt der Kürzungsfaktor $\frac{m}{n}$. Dieser Kürzungsfaktor ist auf die Rentenanwartschaft anzuwenden, die ohne Ausscheiden zu leisten wären, also auf die Rentenanwartschaft $R_m, R_{m+1}, \ldots, R_n$. Damit beträgt der unverfallbare Anspruch nach Ausscheiden nach m Jahren und Eintritt des Versorgungsfalles nach weiteren k Jahren, $k = 0, 1, \ldots, n - m$,

$$\frac{m}{n} R_{m+k} \quad \text{für } m \geq 10\,.$$

3.

$$\begin{aligned}
{}_mL_x^{(0)} &= 0 \text{ für } m < n \\
&= R_n a_z \text{ für } m = n \\
{}_mL_x^{(1)} &= R_m v^{\frac{1}{2}} a^i_{x+m+\frac{1}{2}} \text{ für } m < n \\
&= 0 \text{ für } m = n \\
{}_mL_x^{(2)} &= 0 \text{ für } m < 10 \\
&= v^{\frac{1}{2}} B_{x+m+\frac{1}{2}} \text{ für } 10 \leq m < n \\
&= 0 \text{ für } m = n
\end{aligned}$$

mit

$$B_{x+m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B_{x+m} + B_{x+m+1})$$

und

$$B_{x+m} = \frac{m}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \, {}_kp^a_{x+m} \, i_{x+m+k} \, v^{\frac{1}{2}} R_{m+k} \, a^i_{x+m+k+\frac{1}{2}} + v^{n-m} \, {}_{n-m}p^a_{x+m} R_n \, a_{x+n}\right]$$

sowie

$${}_kp^a_x = \prod_{j=0}^{k-1} p^a_{x+j}$$

und

$$p^a_x = 1 - i_x - q^{aa}_x$$

Bem.: Der Bestand der mit unverfallbarem Anspruch Ausgeschiedenen kennt nur noch zwei vorzeitige Ausscheideursachen, nämlich Invalidität und Tod.

4.

$${}_m\hat{L}_x = {}_mL_x^{(0)} + \hat{i}_{x+m} \, {}_mL_x^{(1)} + s_{x+m} \, {}_mL_x^{(2)}$$

5.

$$\begin{aligned}
{}_0B_x &= \sum_{m \geq 0} v^k \, {}_m\hat{p}^a_x \, {}_m\hat{L}_x \\
\text{mit } {}_m\hat{p}^a_x &= \prod_{j=0}^{m-1} \hat{p}^a_{x+j} \\
\text{und } \hat{p}^a_x &= 1 - \hat{i}_x - \hat{q}^{aa}_x - s_x\,.
\end{aligned}$$