Bericht zur Prüfung im September 1997 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 22. bis 24. September 1997 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Grundlagenseminar der DGVM über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluß an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. 15 von 17 Teilnehmern haben die Prüfung mit Erfolg bestanden. Den erfolgreichen Teilnehmern wird ihre Prüfungsurkunde anläßlich der Mitgliederversammlung der DGVM bzw. der DAV am 30. April 1998 in Ulm überreicht werden.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt mußten mindestens 48 Punkte von 120 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 wurden maximal 18 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 30 Punkte, in Aufgabe 3 maximal 40 Punkte und in Aufgabe 4 maximal 30 Punkte erreicht.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Geben Sie, ausgehend von der allgemeinen Formel für Barwerte, jeweils eine Formel für folgende Verpflichtungen gegenüber einem am Bewertungsstichtag (31. 12.) x-jährigen Rentner an:

1. Zahlung eines Weihnachtsgeldes WR an den Rentner jeweils zum 1. 12. eines jeden Jahres, solange der Rentner den Zahlungstermin erlebt.
2. Zahlung eines Weihnachtsgeldes WW nach Tod des Rentners an seine Witwe jeweils zum 1. 12. eines jeden Jahres, solange die Witwe den Zahlungstermin jeweils erlebt.

Lösung:

Die allgemeine Formel für den Barwert einer Pensionsverpflichtung gegenüber einem x-jährigen Berechtigten (B_x) lautet:

$$B_x = \sum_{k \geq 0} v^k \, {}_kp_x \cdot {}_k\hat{L}_x$$

mit

$${}_k\hat{L}_x = {}_kL_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{h} {}_kL_x^{(i)} \, q_{x+k}^{(i)}$$

und

${}_kL_x^{(0)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters $x+k$ in der Hauptgesamtheit im Intervall $[x+k, x+k+1[$ verursacht werden, diskontiert auf den Zeitpunkt $x+k$.

${}_kL_x^{(i)}$: Erwartungswert der Leistungen, die durch das Ausscheiden im Intervall $[x+k, x+k+1[$ wegen der Ursache i $(1 \leq i \leq h)$ ausgelöst werden, diskontiert auf den Zeitpunkt $x+k$.

Für einen Rentnerbestand gilt: $h = 1$, $q_x^{(1)} = q_x$ für alle x.
Dann gilt für 1.:

$${}_kL_x^{(0)} = v^{\frac{11}{12}} \cdot WR \cdot {}_{\frac{11}{12}}p_{x+k} \text{ für alle k und}$$

$${}_kL_x^{(1)} = 0 \text{ für alle k.}$$

und für 2.:

$${}_{k}L_{x}^{(0)} = 0 \text{ für alle k und}$$

$${}_{k}L_{x}^{(1)} = h_{x+\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{11}{12} \cdot {}_{\frac{5,5}{12}}p_{y(x)+\frac{5,5}{12}}\, v^{\frac{11}{12}} + {}_{\frac{6}{12}}p_{y(x)+\frac{6}{12}} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-y(x)} v^{k}\, {}_{\frac{11}{12}}p_{y(x)+k} \cdot v^{\frac{11}{12}} \right] \mathrm{WW}.$$

Dabei ist berücksichtigt, daß im Todesjahr des Mannes in den Fällen, in denen der Tod vor dem 1. 12. des Jahres eintritt (Wahrscheinlichkeit 11/12) ein Weihnachtsgeld für die Witwe fällig wird. Die mittlere Zeit zwischen dem Tod des Mannes und dem 1. 12. beträgt für diese Fälle 5,5 Monate.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Die Versorgungsordnung einer Firma sieht die Zahlung von Alters-, Invaliden- und Witwen-/Witwerrenten vor. Die Höhe der Renten beträgt für jedes von höchstens 30 vollen Dienstjahren 0,5% des rentenfähigen Einkommens. Auf die Renten nach der Versorgungsordnung werden Renten aus einer Pensionskasse angerechnet. Die Pensionskasse zahlt keine Hinterbliebenenrenten. Alle Renten werden monatlich vorschüssig gezahlt.
Ein Anwärter auf Leistungen der Versorgungsordnung wurde am 1. 5. 1957 geboren und trat am 15. 9. 1979 in die Dienste der Firma ein. Sein rentenfähiges Einkommen am Bewertungsstichtag beläuft sich auf monatlich 5000 DM. Die Anwartschaft auf Alters- und Invalidenrente aus der Pensionskasse beträgt monatlich 500 DM.

1. Geben Sie in der Terminologie der Richttafeln eine Formel für den Teilwert der Verpflichtung aus der Versorgungsordnung zum 31. 12. 1997 an. Dabei soll als Altersgrenze die Vollendung des 65. Lebensjahres unterstellt werden. Werten Sie die Formel unter Verwendung der beigefügten Tabellenwerte aus.
2. Bestimmen Sie den Teilwert gemäß 1. ohne Berücksichtigung der Anrechnung der Rente aus der Pensionskasse.
3. Bestimmen Sie den Teilwert für eine Versorgungsanwartschaft in Höhe der Pensionskassenrente.
4. Vergleichen Sie den Teilwert gemäß 1. mit der Differenz der Teilwerte gemäß 2. und 3. und diskutieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

Das versicherungstechnische Alter am Stichtag (31. 12. 1997) des am 1. 5. 1957 geborenen Berechtigten beträgt 41 Jahre. Das Finanzierungsbeginnalter im Sinne von § 6a EStG ist das steuerlich vorgeschriebene Mindestalter 30, da das versicherungstechnische Alter am Beginn des Wirtschaftsjahres (22 Jahre) niedriger ist.
Der Leistungsverlauf wird nach der Rückrechnungsmethode, ausgehend von erreichbaren 42 vollen Dienstjahren im Alter 65, mit einem Beginnalter von 65 − 42 = 23 Jahren bestimmt. Durch die Anrechnung der Pensionskassenrente in Höhe von 500 DM mtl. oder 20 × 0,5% × 5000 DM beginnt die verbleibende Betriebsrentenanwartschaft am 21. Dienstjahr mit einem Monatswert von 0,5% × 5000 DM = 25 DM und steigt um diesen Betrag bis zum 30. Dienstjahr im Alter 53 einschließlich an. Die Witwenrentenanwartschaft beträgt für jedes Jahr vom Alter 23 bis 53 einschließlich monatlich 25 DM.
Damit ergibt sich für die gesuchten Teilwerte folgendes:

zu 1.:

Barwert der Leistungen im Alter 41:

$$12 \cdot \left[\frac{D_{44}^{a}}{D_{49}^{a}}\, {}^{(12)}\ddot{a}_{44}^{<aiA} \cdot 25 - \frac{D_{54}^{a}}{D_{41}^{a}}\, {}^{(12)}\ddot{a}_{54}^{<aiA} \cdot 25 + {}^{(12)}a_{41}^{aw} \cdot 17 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}_{41}^{<aw} \cdot 25 - \frac{D_{54}^{a}}{D_{41}^{a}}\, {}^{(12)}\ddot{a}_{54}^{<aw} \cdot 25 \right]$$

$$= 12 \cdot \left[\frac{7235,65}{8755,58} \cdot 55,887 \cdot 25 - \frac{3591,95}{8755,58} \cdot 48,268 \cdot 25 + 1,293 \cdot 17 \cdot 25 \right.$$

$$\left. + 21,166 \cdot 25 - \frac{3591,95}{8755,58} \cdot 16,509 \cdot 25 \right]$$

$$= \underline{18\,827}\,.$$

Barwert der Leistungen im Alter 30:

$$12 \cdot \left[\frac{D^a_{44}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{44} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{54} \cdot 25 + {}^{(12)}a^{aw}_{30} \cdot 6 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{30} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{54} \cdot 25\right]$$

$$= 12 \cdot \left[\frac{7235{,}65}{17149{,}9} \cdot 55{,}887 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{17149{,}9} \cdot 48{,}268 \cdot 25 + 0{,}779 \cdot 6 \cdot 25 + 18{,}829 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{17149{,}9} \cdot 16{,}509 \cdot 25\right]$$

$$= \underline{10055}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Teilwert von

$$18827 - 10055 \cdot \frac{a^a_{41,\overline{24}|}}{a^a_{30,\overline{35}|}} = 18827 - 10055 \cdot \frac{11{,}857}{14{,}329} = \underline{10507}\,.$$

Zu 2.:

Barwert der Leistungen im Alter 41:

$$12 \cdot \left[{}^{(12)}a^{aiA}_{41} \cdot 17 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{41} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{41}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{54} \cdot 25 + {}^{(12)}a^{aw}_{41} \cdot 17 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{41} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{41}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{54} \cdot 25\right]$$

$$= 12 \cdot \left[2{,}941 \cdot 17 \cdot 25 + 54{,}911 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{8755{,}58} \cdot 48{,}268 \cdot 25 + 1{,}293 \cdot 17 \cdot 25 + 21{,}166 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{8755{,}58} \cdot 16{,}509 \cdot 25\right]$$

$$= \underline{36444}\,.$$

Barwert der Leistungen im Alter 30:

$$12 \cdot \left[{}^{(12)}a^{aiA}_{30} \cdot 6 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{30} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aiA}_{54} \cdot 25 + {}^{(12)}a^{aw}_{30} \cdot 6 \cdot 25 + {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{30} \cdot 25 - \frac{D^a_{54}}{D^a_{30}} \cdot {}^{(12)}\ddot{a}^{aw}_{54} \cdot 25\right]$$

$$= 12 \cdot \left[1{,}644 \cdot 6 \cdot 25 + 45{,}471 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{17149{,}9} \cdot 48{,}268 \cdot 25 + 0{,}779 \cdot 6 \cdot 25 + 18{,}829 \cdot 25 - \frac{3591{,}95}{17149{,}9} \cdot 16{,}509 \cdot 25\right]$$

$$= \underline{19581}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Teilwert von

$$36444 - 19581 \cdot \frac{11{,}857}{14{,}329} = \underline{20241}\,.$$

Zu 3.:

Barwert der Leistungen im Alter 41:

$$12 \cdot 500 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{41} = 12 \cdot 500 \cdot 2{,}941 = \underline{17646}\,.$$

Barwert der Leistungen im Alter 30:

$$12 \cdot 500 \cdot {}^{(12)}a^{aiA}_{30} = 12 \cdot 500 \cdot 1{,}644 = \underline{9864}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Teilwert von

$$17646 - 9864 \cdot \frac{11{,}857}{14{,}329} = \underline{9484}\,.$$

Zu 4.:

Die Teilwertdifferenz 2. abzgl. 3. beträgt 20241 − 9484 = 10757 und ist damit größer als der Teilwert gemäß 1. in Höhe von 10507.

Die Differenz der Teilwerte für die Gesamtleistung einerseits und der anrechenbaren Rente aus der Pensionskasse andererseits ist daher nicht identisch mit dem Teilwert der Differenzleistung. Der Teilwert ist also in diesem Sinne nicht additiv. Ursache ist im vorliegenden Fall, daß bei Ansatz der Differenz der Teilwerte in der Zeit vor dem Alter 44 implizit negative Rentenanwartschaften bewertet werden, während bei Bewertung der verbleibenden Differenzleistung negative Rentenanwartschaften ausgenullt werden. Darüber hinaus wirkt sich der sogenannte Wartezeiteffekt aus, der darauf zurückzuführen ist, daß die Teilwertprämie auch von den hier unterschiedlichen fiktiven Leistungsverläufen beeinflußt wird, die die Zeit vor dem Bewertungsstichtag betreffen.

So ergeben sich bei der Differenzbetrachtung im Vergleich zur Bewertung der Differenzleistung ein nahezu identischer Barwert am Stichtag (36444 − 17646 = 18798 im Vergleich zu 18827), jedoch deutlich unterschiedliche Barwerte im Alter 30 (19581 − 9864 = 9717 im Vergleich zu 10055). Dies führt bei der Differenzbetrachtung zu einem geringeren Prämienabzug und damit zu einem höheren Teilwert.

Aufgabe 3 (40 Punkte)

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die Zahlungen von Renten mit „deterministischer Fälligkeit" erfolgen, d. h. also z. B. bei monatlich vorschüssiger Zahlungsweise, daß bei Eintritt eines Versorgungsfalles innerhalb eines Monats die 1. Zahlung zum Beginn des nächsten Monats erfolgt, wie im Formelwerk der „Richttafeln" von Heubeck vorgesehen.

1. Drücken Sie $a_x^{(t)}$ durch $\mathrm{a}_x^{(t)}$ aus.
2. Drücken Sie ${}^{(t)}a_x^{a}$ durch ${}^{(t)}\mathrm{a}_x^{a}$ aus (${}^{(t)}\mathrm{a}_x^{a}$: bis zur Altersgrenze laufende Aktivenrente, $\frac{1}{t}$ – vorschüssig zahlbar).
3. Bekanntlich gilt $\forall$ x und t

$$\mathrm{a}_x^{(t)} = \frac{l_x^a}{l_x}\left({}^{(t)}\mathrm{a}_x^{a} + {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{aiA}\right) + \frac{l_x - l_x^a}{l_x}\,{}^{(t)}\mathrm{a}_x^{i}$$

sowie analog für die nachschüssigen Rentenbarwerte

$$a_x^{(t)} = \frac{l_x^a}{l}\left({}^{(t)}a_x^{a} + {}^{(t)}a_x^{aiA}\right) + \frac{l_x - l_x^a}{l_x}\,{}^{(t)}a_x^{i}\,.$$

Zeigen Sie, daß hieraus folgt:

$${}^{(t)}a_x^{ai} = {}^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai}\,.$$

4. Zeigen Sie, daß dieses Ergebnis unter Benutzung des üblichen Ansatzes für ${}^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai}$ bzw. ${}^{(t)}a_x^{ai}$ sowie des Ansatzes

$${}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1}{2}\left({}^{(t)}\mathrm{a}_x^{i} + {}^{(t)}\mathrm{a}_{x+1}^{i}\right) - h^{(t)}$$

zu

$${}^{(t)}a_{x+\frac{1}{2}}^{i} = {}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i}$$

führt, und stellen Sie hieraus sowie auf der Basis des Richttafel-Ansatzes $h^{(t)} = \dfrac{1}{2\,t}$ die Größe ${}^{(t)}a_{x+\frac{1}{2}}^{i}$ mit Hilfe von ${}^{(t)}a_x^{i}$ und ${}^{(t)}a_{x+1}^{i}$ dar.

5. Zeigen Sie, daß mittels des Ansatzes

$$h^{(t)} = \frac{1}{2} - k^{(t)}$$

für beliebige t folgt:

$${}^{(t)}a_{x+\frac{1}{2}}^{i} = a_{x+\frac{1}{2}}^{i} = {}^{(t)}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i}$$

und damit ${}^{(t)}\mathrm{a}_x^{ai}$ von t unabhängig ist.

Lösung:

1. $\ddot{a}_x^{(t)} = a_x^{(t)} - \frac{1}{t}$.

2. ${}^{(t)}\ddot{a}_x^a = {}^{(t)}a_x^a - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\, v^n\, {}_np_x^a$.

3. Wegen $\ddot{a}_x^{(t)} = a_x^{(t)} - \frac{1}{t}$ und damit ${}^{(t)}\ddot{a}_x^i = {}^{(t)}a_x^i - \frac{1}{t}$ gilt

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^a + {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiA} = {}^{(t)}a_x^a + {}^{(t)}a_x^{aiA} - \frac{1}{t}. $$

Wegen ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiA} = {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} + v^n\, {}_np_x^a\, \ddot{a}_z^{(t)}$ und ${}^{(t)}a_x^{aiA} = {}^{(t)}a_x^{ai} + v^n\, {}_np_x^a\, a_z^{(t)}$ folgt:

$$ \begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} &= {}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiA} - v^n\, {}_np_x^a\, \ddot{a}_z^{(t)} \\ &= {}^{(t)}a_x^a - {}^{(t)}\ddot{a}_x^a + {}^{(t)}a_x^{ai} + v^n\, {}_np_x^a\, a_z^{(t)} - \frac{1}{t} - v^n\, {}_np_x^a\, \ddot{a}_z^{(t)} \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\, v^n\, {}_np_x^a + {}^{(t)}a_x^{ai} + \frac{1}{t}\, v^n\, {}_np_x^a + v^n\, {}_np_x^a\, \ddot{a}_z^{(t)} - \frac{1}{t} - v^n\, {}_np_x^a\, \ddot{a}_z^{(t)} \\ &= {}^{(t)}a_x^{ai}. \end{aligned} $$

4. Der übliche Ansatz lautet:

$$ {}^{(t)}a_x^{ai} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x^a\, v^{\frac{1}{2}}\, {}^{(t)}a^i_{x+k+\frac{1}{2}} \qquad (*) $$

mit

$$ {}^{(t)}a^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}^{(t)}a_x^i + {}^{(t)}a^i_{x+1}\right) - h^{(t)}. $$

Setzt man analog

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x^a\, v^{\frac{1}{2}}\, {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+k+\frac{1}{2}}, $$

dann folgt, da die beiden Gleichungen für alle x gelten, zunächst

$$ {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+\frac{1}{2}} = {}^{(t)}a^i_{x+\frac{1}{2}} \;\forall x $$

und hieraus

$$ \begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+\frac{1}{2}} = {}^{(t)}a^i_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left({}^{(t)}a_x^i + {}^{(t)}a^i_{x+1}\right) - h^{(t)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + {}^{(t)}\ddot{a}_x^i + \frac{1}{t} + {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+1}\right) - h^{(t)} \\ &= \frac{1}{2}\left({}^{(t)}\ddot{a}_x^i + {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+1}\right) + \frac{1}{t} - h^{(t)} \end{aligned} $$

und hieraus mit $h^{(t)} = \frac{1}{2\,t}$:

$$ {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}^{(t)}\ddot{a}_x^i + {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+1}\right) + \frac{1}{2\,t}. $$

5. Mit $h^{(t)} = \frac{1}{2} - k^{(t)}$ folgt wegen

$$ {}^{(t)}\ddot{a}_x^i = \ddot{a}_x^i + \hat{k}^{(t)} \quad \text{mit} \quad \hat{k}^{(t)} = 1 - k^{(t)} - \frac{1}{t}: $$

$$ \begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}^i_{x+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_x^i + \ddot{a}^i_{x+1}\right) + \underbrace{\hat{k}^{(t)} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + k^{(t)}}_{1 - k^{(t)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + k^{(t)}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_x^i + \ddot{a}^i_{x+1}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \ddot{a}^i_{x+\frac{1}{2}}, \end{aligned} $$

da bei jährlicher Zahlungsweise $h^{(t)} = \frac{1}{2}$ und damit $\frac{1}{t} - h^{(t)} = \frac{1}{2}$.

Wegen $a_x^i = \mathrm{a}_x^i - 1$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}
{}^{(t)}a^i_{x+\frac{1}{2}} &= a^i_{x+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{a}^i_x + \mathrm{a}^i_{x+1}) - \frac{1}{2} \\
&= \mathrm{a}^i_{x+\frac{1}{2}} \text{ wegen } h^{(t)} = \frac{1}{2} \text{ für } t = 1 \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{a}^i_x - k^{(t)} + \mathrm{a}^i_{x+1} - k^{(t)}) \underbrace{- \frac{1}{2} + k^{(t)}}_{-h^{(t)}} \\
&= \frac{1}{2}({}^{(t)}\mathrm{a}^i_x + {}^{(t)}\mathrm{a}^i_{x+1}) - h^{(t)} \\
&= {}^{(t)}\mathrm{a}^i_{x+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

woraus nach dem üblichen Ansatz (vgl. oben Gl. (*)) folgt:

$$ {}^{(t)}\mathrm{a}^{ai}_x = \mathrm{a}^{ai}_x \; \forall t. $$

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Ein Unternehmen erwägt die Einführung einer betrieblichen Pensionszusage und läßt sich von Ihnen die voraussichtliche Entwicklung der Rückstellungen bei unterschiedlichen Versorgungszusagen ausrechnen. Geben Sie für die folgenden bausteinartigen Zusagen die Formeln für die Anwartschaftsbarwerte für Aktive an, wobei Sie von folgender Bezeichnungsweise ausgehen können: Versicherungstechnisches Alter des Berechtigten zum Stichtag: x; Altersgrenze: z; $n = z - x$; Anzahl der (maßgebenden) Dienstjahre während der Aktivenzeit: $m = 0, 1, \ldots, n$. Die unterjährliche Zahlungsweise braucht nicht explizit angegeben zu werden, auch braucht das Abzugsglied $h^{(t)}$ $\left(\text{in den Richttafeln } \frac{1}{2t}\right)$ nicht explizit angegeben zu werden.

Betreffend den Berechtigten selbst:

1. An Leistungen sind vorgesehen
   - eine lebenslänglich laufende jährliche Rente ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver in Höhe von R_n bzw.
   - ab Ausscheiden nach vorzeitiger Invalidität nach $m < n$ Dienstjahren in Höhe von R_m.

2. An Leistungen sind vorgesehen
   - eine lebenslänglich laufende jährliche Rente ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver in Höhe von R_n bzw.
   - ab Ausscheiden nach vorzeitiger Invalidität nach $m < n$ Dienstjahren
     - in Höhe von $R_m^{(1)}$ bis zur Altersgrenze,
     - in Höhe von $R_m^{(2)}$ ab Erreichen der Altersgrenze (als Invalidenrentner).

Betreffend den Ehegatten (kollektive Methode!):

3. An Leistungen sind vorgesehen eine lebenslänglich laufende jährliche Ehegattenrente
   - nach Tod des Berechtigten als Aktiver nach m Dienstjahren in Höhe von R_m^{aaw},
   - nach Tod als Invalidenrentner bei Ausscheiden wegen Invalidität nach m Dienstjahren in Höhe von R_m^{aiw} und
   - nach Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver in Höhe von R_n^{aAw},

   wobei $m = 0, 1, \ldots, n$ die Anzahl der Dienstjahre des Berechtigten bis zum Ausscheiden aus dem Unternehmen durch Tod, Invalidität oder Erreichen der Altersgrenze darstellt.

4. An Leistungen sind vorgesehen eine lebenslänglich laufende jährliche Ehegattenrente
   - nach Tod des Berechtigten als Aktiver nach m Dienstjahren in Höhe von R^{aaw}_{m},
   - nach Tod als Invalidenrentner nach Ausscheiden wegen Invalidität nach m Dienstjahren und Tod als Invalidenrentner vor Erreichen der Altersgrenze in Höhe von $R^{aiw(1)}_{m}$,
   - nach Tod als Invalidenrentner nach Ausscheiden wegen Invalidität nach m Dienstjahren und Tod des Invaliden nach Erreichen der Altersgrenze in Höhe von $R^{aiw(2)}_{m}$, und
   - nach Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver in Höhe von R^{aAw}_{n}.

5. An Leistungen sind vorgesehen eine lebenslänglich laufende jährliche Ehegattenrente
   - nach Tod des Berechtigten als Aktiver nach m Dienstjahren
     - bis zum Erreichen des Alters des hinterbliebenen Ehegatten von z Jahren in Höhe von $R^{aaw(1)}_{m}$,
     - ab Erreichen des Alters des hinterbliebenen Ehegatten von z Jahren in Höhe von $R^{aaw(2)}_{m}$,
   - nach Tod als Invalidenrentner nach Ausscheiden wegen Invalidität nach m Dienstjahren und Tod als Invalidenrentner vor Erreichen der Altersgrenze
     - bis zum Erreichen des Alters des hinterbliebenen Ehegatten von z Jahren in Höhe von $R^{aiw(1)}_{m}$,
     - ab Erreichen des Alters des hinterbliebenen Ehegatten von z Jahren in Höhe von $R^{aiw(2)}_{m}$,
   - nach Tod als Invalidenrentner nach Ausscheiden wegen Invalidität nach m Dienstjahren und Tod als Invalidenrentner nach Erreichen der Altersgrenze in Höhe von $R^{aiw(2)}_{m}$, und
   - nach Tod nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver in Höhe von R^{aAw}_{n}.

Diese Aufgabe gilt als vollständig gelöst, wenn vier der fünf Teilaufgaben gelöst sind.

Lösung:

1. $$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \, R_k \, a^{i}_{x+k+\frac{1}{2}} + v^n \, {}_{n}p^{a}_{x} \, R_n \, a_z \, .$$

2. $$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \cdot \left[R^{(1)}_{k} \, a^{a}_{x+k+\frac{1}{2},\overline{n-k-\frac{1}{2}|}} + R^{(2)}_{k} \; {}_{n-k-\frac{1}{2}}a^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\right] + v^n \, {}_{n}p^{a}_{x} \, R_n \, a_z$$

   mit $$a^{i}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{i}_{x}$$

   und $${}_{n}a^{i}_{x} = a^{i}_{x} - a^{i}_{x\overline{n}|} = v^n \, {}_{n}p^{i}_{x} \, a_z \, .$$

3. $$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, q^{aa}_{x+k} \, h_{x+k+\frac{1}{2}} \, v^{\frac{1}{2}} \, R^{aaw}_{k} \, a_{y(x+k)+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \, R^{aiw}_{k} \, a^{iw}_{x+k+\frac{1}{2}} + v^n \, {}_{n}p^{a}_{x} \, R^{aAw}_{n} \, a^{w}_{z} \, .$$

4. $$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, q^{aa}_{x+k} \, h_{x+k+\frac{1}{2}} \, v^{\frac{1}{2}} \, R^{aaw}_{k} \, a_{y(x+k)+\frac{1}{2}}$$

   $$+ \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \cdot \left[R^{aiw(1)}_{k} \, a^{iw}_{x+k+\frac{1}{2},\overline{n-k-\frac{1}{2}|}} + R^{aiw(2)}_{k} \; {}_{n-k-\frac{1}{2}}a^{iw}_{x+k+\frac{1}{2}}\right] + v^n \, {}_{n}p^{a}_{x} \, R^{aAw}_{n} \, a^{w}_{z}$$

   mit $$a^{iw}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{i}_{x} \, q^{i}_{x+k} \, h_{x+k+\frac{1}{2}} \, v^{\frac{1}{2}} \, a_{y(x+k)+\frac{1}{2}}$$

   und $${}_{n}a^{iw}_{x} = a^{iw}_{x} - a^{iw}_{x\overline{n}|} = v^n \, {}_{n}p^{i}_{x} \, a^{w}_{z} \, .$$

5. $$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, q^{aa}_{x+k} \, h_{x+k+\frac{1}{2}} \, v^{\frac{1}{2}} \cdot \left[R^{aaw(1)}_{k} \, a_{y(x+k)+\frac{1}{2},\overline{z-y(x+k)-\frac{1}{2}|}} + R^{aaw(2)}_{k} \; {}_{z-y(x+k)-\frac{1}{2}}a_{y(x+k)+\frac{1}{2}}\right]$$

   $$+ \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{a}_{x} \, i_{x+k} \, v^{\frac{1}{2}} \, B^{iw}_{x+k+\frac{1}{2}} + v^n \, {}_{n}p^{a}_{x} \, R^{aAw}_{n} \, a^{w}_{z}$$

   mit $$B^{iw}_{x} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_{k}p^{i}_{x} \, q^{i}_{x+k} \, h_{x+k+\frac{1}{2}}$$

   $$\cdot \left[R^{aiw(1)}_{k} \, a_{y(x+k)+\frac{1}{2},\overline{z-y(x+k)-\frac{1}{2}|}} + R^{aiw(2)}_{k} \; {}_{z-y(x+k)-\frac{1}{2}}a_{y(x+k)+\frac{1}{2}}\right] + v^n \, {}_{n}p^{i}_{x} \, R^{aiw(2)}_{k} \, a^{w}_{z} \, .$$