DAV - Prüfung 23. Oktober 2010

Klausur Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik 2010

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Bestand von internen Anwärtern und wählen aus diesem Bestand einen internen Anwärter des Alters x; er habe das Alter $x \in I\!N$, seine Ehefrau das Alter $y \in I\!N$. Der Anwärter unterliegt der Ausscheideordnung eines internen Anwärters, seine Ehefrau bis zum Tod ihres Mannes der Sterbetafel q_y^g, anschließend - als Witwe - der Witwensterbetafel q_y^w. Sei

K die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Ausscheiden wegen Fluktuation (Zufallsgröße),

M die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität (Zufallsgröße),

N die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod des Mannes (Zufallsgröße)und

J die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod der Ehefrau (Zufallsgröße).

1. Erläutern Sie die Erfüllungsbeträge

$$\begin{aligned} B &= v^{N+1}\, \mathrm{a}_{\overline{J-N|}}\, 1_{\{K \le M \le N < J\}}, \\ B_1 &= v^{N+1}\, \mathrm{a}_{\overline{J-N|}}\, 1_{\{K > M,\, M \le N < J\}}, \\ B_2 &= B + B_1 \end{aligned}$$

   Geben Sie B_2 explizit an.

2. Geben Sie die Realisierungen b_{kmnj}, $k, m, n, j = 0, 1, ...$ von B an.

3. Geben Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}B$ mit Hilfe der Realisierungen b_{kmnj}, $k, m, n, j = 0, 1, ...$ an.

4. Wie lautet die versicherungsmathematische Bezeichnung für $\mathcal{E}B$?

5. Zeigen Sie, dass für bel. k gilt:

$$P\{K = k\} = {}_k\hat{p}_x^a\, s_{x+k}$$

6. Zeigen Sie, dass für bel. $k \leq m$ gilt:

$$
\begin{aligned}
P\{M = m \,|\, K = k\} &= {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad m = k \\
&= {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+k+\frac{1}{2}} \;\; {}_{m-k-1}p^a_{x+k+1} \;\; i_{x+m} \qquad \text{f.} \quad m > k
\end{aligned}
$$

7. Zeigen Sie, dass für $k \leq m \leq n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
P\{N = n \,|\, M = m, K = k\} &= {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+n+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad n = m \\
&= {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \;\; {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1} \;\; q^i_{x+n} \quad \text{f.} \quad n > m
\end{aligned}
$$

8. Zeigen Sie, dass für bel. $k \leq m \leq n < j$ gilt:

$$
P\{J = j \,|\, N = n, M = m, K = k\} = {}_n p^g_y \;\; {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+n} \;\; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+n+\frac{1}{2}} \;\; {}_{j-n-1}p^w_{y+n+1} \;\; q^w_{y+j}
$$

9. Drücken Sie $\mathcal{E}B$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten

$$
P\{K = k\},\; P\{M = m \,|\, K = k\}, P\{N = n \,|\, M = m, K = k\} \quad \text{und}
$$

$$
P\{J = j \,|\, N = n, M = m, K = k\} \quad \text{aus.}
$$

10. Stellen Sie die gemäß 9. gewonnene Formel mit Hilfe der Ergebnisse von 5. bis 8. in versicherungsmathematischer Notation dar.

    Hinweis: Unterscheiden Sie sorgfältig die Fälle $n = m = k, n > m = k$, $n = m > k, n > m > k$!

11. Zeigen Sie, dass für beliebige vorgegebene $i = 0, 1, ...$ gilt:

$$
\sum_{j>i} {}_{j-i-1}p^w_{y+i+1} \;\; q^w_{y+j} \;\; \mathrm{a}_{\overline{j-i|}} = \mathrm{a}^w_{y+i+1}
$$

12. Stellen Sie $\mathrm{a}^{iw}_{x+k+1,\,y+k+1}$ (vgl. beiliegende Formelsammlung) als Summenformel dar und ändern Sie den Summationsindex in der Weise, dass er mit $k+1$ beginnt.

13. Setzen Sie die gewonnenen Ergebnisse in die Darstellung nach 10. ein und vereinfachen Sie entsprechend die Terme nach 10.

14. Stellen Sie $\mathrm{a}^{aiw}_{x+k+1,\,y+k+1}$ (vgl. beiliegende Formelsammlung) als Summenformel dar und ändern Sie den Summationsindex in der Weise, dass er mit $k+1$ beginnt.

    Hinweis: Das in der Formelsammlung auftretende n spielt im Zusammenhang mit unseren Betrachtungen keine Rolle. Wählen Sie als Summation anstatt $\sum_{k=0}^{n}$ die Summation $\sum_{k\geq 0}$.

15. Setzen Sie das in 14. gewonnene Ergebnis in die Darstellung nach 13. ein und vereinfachen Sie entsprechend den Ausdruck nach 13.

Aufgabe 2

Wir betrachten zum Stichtag einen Bestand von $n \in I\!N$ Rentnern mit Alter x_k, vollendeten Lebensjahren bis zum Tod N_k und Ansprüchen von jährlich vorschüssig zahlbaren Renten $R_k > 0$ $(k = 1, ..., n)$. Die Zufallsgrößen N_k können als unabhängig angesehen werden. Die Erfüllungsbeträge B_k der einzelnen Rentenverpflichtungen ergeben sich dann zu $B_k = R_k\ \mathrm{a}_{\overline{N_k+1}|}$, $k = 1, ...n$ mit Zins $i > 0$. Weiter seien $\mu_k := \mathcal{E}B_k$, und $\sigma_k^2 := var(B_k), k = 1, ...n$. Der Erfüllungsbetrag der Verpflichtung gegenüber dem Rentnerbestand stellt sich dann auf

$$B = \sum_{k=1}^{n} B_k.$$

Falls (1) die B_k f. s. gleichmäßig beschränkt sind und (2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \infty$ zutrifft, gilt der Zentrale Grenzwertsatz:

$$B \sim N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k,\ \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right) : B \text{ ist für große } n \text{ asymptotisch normal verteilt.}$$

Wir wollen im Folgenden davon ausgehen, dass n so groß ist, dass die Annahme, dass

$$B\ \sim\ N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$$

verteilt ist, zutrifft.

1. Geben Sie $\mu_k := \mathcal{E}B_k, \quad k = 1, ..., n$, an (sollte bekannt sein, braucht nicht abgeleitet zu werden).

2. Führen Sie Gründe dafür an, dass die Voraussetzung (1) des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt ist.

3. Zeigen Sie für $k = 1, 2, ..., n$, dass

$$\sigma_k^2 \;=\; \frac{R_k^2}{d^2}\,[A_{x_k}\,(v^2) - A_{x_k}^2\,(v)],$$

   mit $A_x(v)$: Einmalprämie eines x-Jährigen für eine lebenslänglich laufende Todesfallversicherung mit Versicherungssumme 1, auszahlbar zum Ende des Jahres des Todes, mit Diskontierungsfaktor v und $d = 1 - v$ (Diskont).

   Hinweis: Stellen Sie $\mathrm{a}_{\overline{N_k+1}|}$ durch v^{N_k+1} dar.

4. Welche Gründe können Sie dafür anführen, dass auch die Voraussetzung (2) des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt ist?

5. Drücken Sie $\mu := \mathcal{E}B$ durch die μ_k, $k = 1, ...n$ aus.

6. Drücken Sie $\sigma^2 := var(B)$ durch die σ_k^2, $k = 1, ...n$ aus. Begründung?

7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Rückstellung von $\mathcal{R} = \mathcal{E}B$ ausreicht, die Verpflichtung zu erfüllen? Begründung!

8. $B^{'} := \dfrac{B-\mu}{\sigma}$ ist die standardisierte Variable von B. Berechnen Sie $\mathcal{E}B^{'}$ und $var(B^{'})$.

9. Die Verteilungsfunktion von $B^{'}$ ist – für unsere Betrachtungen hinreichend genau – durch $P\{B^{'} \leq x\} = \Phi(x), x \in \mathbb{R}$ (Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung) gegeben. Stellen Sie Φ und $\varphi = \Phi^{'}$ im Koordinatenkreuz dar (Eine großzügige Darstellung genügt!)

10. Sie wählen als Rückstellung einen Betrag $\mathcal{R} = \mu + s$ mit Sicherungszuschlag s Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathcal{R}$ ausreicht?

11. Sie möchten die Rückstellung $\mathcal{R}$ so bestimmen, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha > 0,5$ ausreicht, die Verpflichtung zu erfüllen. Berechnen Sie die Rückstellung $\mathcal{R}$ und geben Sie den Sicherheitszuschlag an.

12. Welche Forderungen muss die Ihren Berechnungen zugrunde liegende Sterbetafel mindestens erfüllen, damit die oben vorgenommenen Berechnungen sinnvoll sind?

1.

B : Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1, unter der Bedingung, dass er vor Eintritt der Invalidität durch Fluktuation ausscheidet und vor seiner Ehefrau stirbt, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt seines Todes, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes der Ehefrau.

B_1 : Anwartschaft eines internen Anwärters auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1, falls er durch Invalidität aus dem Bestand der internen Anwärter ausscheidet und vor seiner Ehefrau stirbt, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt seines Todes, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes der Ehefrau.

B_2 : Anwartschaft eines internen Anwärters (auch: externen Anwärters, also Aktiven) auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Witwenrente vom Jahresbetrag 1, gleichgültig, ob er zuvor durch Fluktuation oder durch Invalidität aus dem Bestand der internen Anwärter ausscheidet, zahlbar zum ersten Mal zum Beginn des Jahres nach Eintritt seines Todes, zum letzten Mal zum Beginn des Jahres des Eintritts des Todes der Ehefrau.

$$B_2 = v^{N+1} \, \mathrm{a}_{\overline{J-N}|} \, 1_{\{M \le N < J\}}$$

2.

$$\begin{aligned} b_{kmnj} &= v^{n+1} \, \mathrm{a}_{\overline{j-n}|} \quad \text{f.} \quad 0 \le k \le m \le n < j \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \sum_{k\ge 0} \sum_{m\ge 0} \sum_{n\ge 0} \sum_{j\ge 0} b_{kmnj} \; P\{B = b_{kmnj}\} \\ &= \sum_{k\ge 0} \sum_{m\ge k} \sum_{n\ge m} \sum_{j>n} v^{n+1} \, \mathrm{a}_{\overline{j-n}|} \, P\{K=k, M=m, N=n, J=j\} \end{aligned}$$

4.

$$\mathcal{E}B = \mathrm{a}_{xy}^{asiw}$$

5.

$$\begin{aligned} P\{K=k\} &= P\{K<k+1, K\geq k\} \\ &= P\{K<k+1 \,|\, K\geq k\}\ P\{K\geq k\} \\ &= {}_k\hat{p}_x^a\ s_{x+k} \quad \text{f.} \quad k\geq 0 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} P\{M=m \,|\, K=k\} &= {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad m=k \quad \text{nach Richttafelmethode} \\ &= P\{M<m+1|M\geq m, M>k, K=k\}\, P\{M\geq m|M>k, K=k\} \\ &\quad\ P\{M>k|K=k\} \\ &= {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+k+\frac{1}{2}} \quad {}_{m-k-1}p^a_{x+k+1}\ i_{x+m} \quad \text{f.} \quad m>k \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} P\{N=n \,|\, M=m, K=k\} &= {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+n+\frac{1}{2}} \quad \text{f.} \quad n=m \\ &= P\{N<n+1, N\geq n,\ N>m \,|\, M=m, K=k\} \\ &= P\{N<n+1|N\geq n,\ N>m, M=m, K=k\} \\ &\quad\ P\{N\geq n|N>m, M=m, K=k\}\, P\{N>m|M=m, K=k\} \\ &= {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1}\ q^i_{x+n} \quad \text{f.} \quad n>m \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} P\{J=j \,|\, N=n, M=m, K=k\} &= P\{J<j+1, J\geq j, J>n \,|\, N=n, M=m, K=k\} \\ &= P\{J<j+1,\ |\ J\geq j, J>n, N=n, M=m, K=k\} \\ &\quad\ P\{J\geq j \,|\, J>n, N=n, M=m, K=k\} \\ &\quad\ P\{J>n \,|\, N=n, M=m, K=k\} \\ &= {}_np^g_y\ {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+n}\ {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+n+\frac{1}{2}}\ {}_{j-n-1}p^w_{y+n+1}\ q^w_{y+j} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} P\{K=k\} \sum_{m\geq 0} P\{M=m|K=k\} \sum_{n\geq 0} P\{N=n|M=m, K=k\} \\ &\quad \sum_{j\geq 0} P\{J=j,\ |\ N=n, M=m, K=k\}\, b_{kmnj} \\ &= \sum_{k\geq 0} P\{K=k\} \sum_{m\geq k} P\{M=m \,|\, K=k\} \\ &\quad \sum_{n\geq m} P\{N=n \,|\, M=m, K=k\}\, v^{n+1} \\ &\quad \sum_{j>n} P\{J=j \,|\, N=n, M=m, K=k\}\ \mathrm{a}_{\overline{j-n|}} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq k}\sum_{n\geq m}\sum_{j>n} f_{kmn}\, F_{nj}\ v^{n+1}\ \mathrm{a}_{\overline{j-n}|} \quad \text{(vgl. 1.9)}\\
&\quad \text{mit}\\
f_{kmn} &= P\{K=k\}\, P\{M=m|K=k\}\, P\{N=n|M=m,K=k\}\\
&= s_{x+k}\ {}_k\hat{p}^a_x\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+m+\frac{1}{2}} \quad \text{f.}\quad n=m=k\\
&= s_{x+k}\ {}_k\hat{p}^a_x\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1}\ q^i_{x+n} \quad \text{f.}\quad n>m=k\\
&= s_{x+k}\ {}_k\hat{p}^a_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{m-k-1}p^a_{x+k+1}\ i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+m+\frac{1}{2}} \quad \text{f.}\quad n=m>k\\
&= s_{x+k}\ {}_k\hat{p}^a_x\ {}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{m-k-1}p^a_{x+k+1}\ i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1}\ q^i_{x+n} \quad \text{f.}\quad n>m>k\\
&\quad \text{und}\\
F_{nj} &= P\{J=j|N=n,M=m,K=k\} \quad \text{(vgl. 1.8)}\\
&= {}_np^g_y\ {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+n}\ {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+n+\frac{1}{2}}\ {}_{j-n-1}p^w_{y+n+1}\ q^w_{y+j}
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
\sum_{j>k} {}_{j-k-1}p^w_{y+k+1}\ q^w_{y+j}\ \mathrm{a}_{\overline{j-k}|} &= \sum_{j>k} {}_{j-k-1}p^w_{y+k+1}\ (1-p^w_{y+j})\ \mathrm{a}_{\overline{j-k}|}\\
&= \sum_{j>k} {}_{j-k-1}p^w_{y+k+1}\ \mathrm{a}_{\overline{j-k}|} - \sum_{j>k} {}_{j-k-1}p^w_{y+k+1}\ p^w_{y+j}\ \mathrm{a}_{\overline{j-k}|}\\
&= \sum_{j\geq k} {}_{j-k}p^w_{y+k+1}\ \mathrm{a}_{\overline{j+1-k}|} - \sum_{j>k} {}_{j-k}p^w_{y+k+1}\ \mathrm{a}_{\overline{j-k}|}\\
&= \mathrm{a}_{\overline{1}|} + \sum_{j>k} {}_{j-k}p^w_{y+k+1}\ \underbrace{\underbrace{(\mathrm{a}_{\overline{j+1-k}|} - \mathrm{a}_{\overline{j-k}|})}_{\sum_{i=0}^{j-k} v^i - \sum_{i=0}^{j-k-1} v^i}}_{v^{j-k}}\\
&= 1 + \sum_{j>k} v^{j-k}\ {}_{j-k}p^w_{y+k+1}\\
&= \sum_{j\geq k} v^{j-k}\ {}_{j-k}p^w_{y+k+1}\\
&= \sum_{j\geq 0} v^{j}\ {}_{j}p^w_{y+k+1}\\
&= \mathrm{a}^w_{y+k+1}
\end{aligned}$$

12.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}^{iw}_{xy} &= \sum_{k\geq 0} v^k \; {}_kp^i_x \; {}_kp^g_y \; L^{iw}_{x+k,y+k} \\
&\quad \text{mit} \quad L^{iw}_{xy} = q^i_x \; {}_{\frac{1}{2}}p^g_y \, v^{\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}} \\
&\quad \text{und} \quad \mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \; {}_kp^i_x \; {}_kp^g_y \; q^i_{x+k} \; {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+k+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+k+1} \quad \text{lt. Formelsammlung}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}^{iw}_{x+k+1,\, y+k+1} &= \sum_{n\geq 0} v^n \; {}_np^i_{x+k+1} \; {}_np^g_{y+k+1} \; L^{iw}_{x+k+1+n,\, y+k+1+n} \\
&= \sum_{n\geq 0} v^{n+1} \; {}_np^i_{x+k+1} \; {}_np^g_{y+k+1} \; q^i_{x+k+1+n} \; {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k+1+n} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+k+1+n+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+k+1+n+1} \\
&= \sum_{n\geq k+1} v^{n-k} \; {}_{n-k-1}p^i_{x+k+1} \; {}_{n-k-1}p^g_{y+k+1} \; q^i_{x+n} \; {}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+n} \; {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+n+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+n+1}
\end{aligned}
$$

13.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B \;=\;& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+k}\ {}_{k}p^{g}_{y}\ \mathrm{a}^{w}_{y+k+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ \sum_{n>k} v^{n-k}\ q^{i}_{x+n}\ {}_{n-k-1}p^{i}_{x+k+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}} \\
& {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+n+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+n}\ \underbrace{{}_{n}p^{g}_{y}}_{{}_{n-k-1}p^{g}_{y+k+1}\ {}_{k+1}p^{g}_{y}}\ \mathrm{a}^{w}_{y+n+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ \sum_{m>k} v^{m-k}\ i_{x+m}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}} \\
& q^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+m+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+m}\ {}_{m}p^{g}_{y}\ \mathrm{a}^{w}_{y+m+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ \sum_{m>k} v^{m-k}\ i_{x+m}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}} \\
& {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ \sum_{n>m} v^{n-m}\ q^{i}_{x+n}\ {}_{n-m-1}p^{i}_{x+n+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+n+\frac{1}{2}} \\
& {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+n+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+n}\ \underbrace{{}_{n}p^{g}_{y}}_{{}_{n-m-1}p^{g}_{y+m+1}\ {}_{m+1}p^{g}_{y}}\ \mathrm{a}^{w}_{y+n+1} \\
=& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}q^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p^{g}_{y}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+k}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+k+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{w}_{y+k+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+1}p^{g}_{y}\ \mathrm{a}^{iw}_{x+k+1\,,\,y+k+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ \sum_{m>k} v^{m-k}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ i_{x+m} \\
& q^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ \underbrace{{}_{m}p^{g}_{y}}_{{}_{k+1}p^{g}_{y}\ {}_{m-k-1}p^{g}_{x+k+1}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{g}_{y+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{w}_{y+m+\frac{1}{2}}\ \mathrm{a}^{w}_{y+m+1} \\
+& \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ s_{x+k}\ {}_{k}\hat{p}^{a}_{x}\ \sum_{m>k} v^{m-k}\ i_{x+m}\ {}_{m-k-1}p^{a}_{x+k+1}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{a}_{x+k+\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}} \\
& \underbrace{{}_{m+1}p^{g}_{y}}_{{}_{k+1}p^{g}_{y}\ {}_{m-k}p^{g}_{y+k+1}}\ \mathrm{a}^{iw}_{x+m+1\,,\,y+m+1}
\end{aligned}
$$

14.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}^{aiw}_{xy} &= \sum_{k\geq 0} v^k \;{}_kp^a_x \;{}_kp^g_y \; i_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k} \; v^{\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^{iw}_{x+k+\frac{1}{2},\,y+k+\frac{1}{2}} \\
&\quad \text{mit} \quad \mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2},\,y+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} \left[{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^{iw}_{x+\frac{1}{2},\,y+\frac{1}{2}} + {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^w_{x+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+1} \right] \\
&= \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \;{}_kp^a_x \;{}_kp^g_y \; i_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k} \;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+k+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^{iw}_{x+k+1\,,\,y+k+1} \\
&+ \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \;{}_kp^a_x \;{}_kp^g_y \; i_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k} \;{}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+k+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+k+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+k+1} \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{a}^{aiw}_{x+k+1\,,\,y+k+1} &= \sum_{m\geq 0} v^m \;{}_mp^a_{x+k+1} \;{}_mp^g_{y+k+1} \; i_{x+k+1+m} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k+1+m} \; v^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \mathrm{a}^{iw}_{x+k+1+m+\frac{1}{2},\,y+k+1+m+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m\geq k+1} v^{m-k-1} \;{}_{m-k-1}p^a_{x+k+1} \;{}_{m-k-1}p^g_{y+k+1} \; i_{x+m} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+m} \; v^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \mathrm{a}^{iw}_{x+m+\frac{1}{2},\,y+m+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m\geq k+1} v^{m-k} \;{}_{m-k-1}p^a_{x+k+1} \;{}_{m-k-1}p^g_{x+k+1} \; i_{x+m} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+m} \\
&\quad {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+m+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^{iw}_{x+m+1\,,\,y+m+1} \\
&+ \sum_{m\geq k+1} v^{m-k} \;{}_{m-k-1}p^a_{x+k+1} \;{}_{m-k-1}p^g_{y+k+1} \; i_{x+m} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+m} \\
&\quad {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+m+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+m+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+m+1}
\end{aligned}
$$

15.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \;{}_k\hat{p}^a_x \;{}_kp^g_y \; s_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^g_{y+k} \;{}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+k+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^w_{y+k+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^w_{y+k+\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \;{}_k\hat{p}^a_x \;{}_kp^g_y \; s_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}i_{x+k+\frac{1}{2}} \;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+k+\frac{1}{2}} \; p^g_{y+k} \; \mathrm{a}^{iw}_{x+k+1\,,\,y+k+1} \\
&+ \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \;{}_k\hat{p}^a_x \;{}_{k+1}p^g_y \; s_{x+k} \;{}_{\frac{1}{2}}p^a_{x+k+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^{aiw}_{x+k+1\,,\,y+k+1} \\
&= \mathrm{a}^{asiw}_{xy}
\end{aligned}
$$

1. $$\mu_k = \mathcal{E} B_k = R_k \, \mathrm{a}_{x_k} \quad \text{mit}$$

   a_x: Barwert eines x-jährigen Mannes für eine lebenslänglich vorschüssig zahlbare Rente des Betrages 1.

2. In der Praxis kann man davon ausgehen, dass es nicht beliebig hohe Renten gibt, d.h. man kann davon ausgehen, dass es eine obere Schranke R für die Renten gibt. Damit gilt für beliebiges k:

   $$B_k = R_k \, \mathrm{a}_{\overline{N_k+1}|} = \frac{R_k}{d}\,(1 - v^{N_{k+1}}) \leq \frac{R_k}{d} \leq \frac{R}{d}$$

3. Sei für ein Alter x $B^{'} = R^{'} \, \mathrm{a}_{\overline{N+1}|}$ mit

   $R^{'}$: Jahresrente des x-Jährigen

   N : Anzahl der vollendeten Lebensjahre bis zum Tode.

   Dann folgt:

   $$\mathrm{a}_{\overline{N+1}|} = \sum_{k=0}^{N} v^k = \frac{1 - v^{N+1}}{1 - v} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d}\, v^{N+1}$$

   mit v^{N+1}: Erfüllungsbetrag einer lebenslänglich laufenden, zum Ende des Jahres des Todes auszahlbaren Todesfallversicherung des Betrages 1 mit Verteilung $P\{v^{N+1} = v^{n+1}\} = P\{N = n\} = {}_n p_x \; q_{x+n}$, mit q_x, $x = 0, 1, ...$: einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines Mannes des Alters x. Es folgt:

   $$\begin{aligned} \mathcal{E}\, v^{N+1} &= \sum_{n \geq 0} v^{n+1} \; P\{v^{N+1} = v^{n+1}\} \\ &= \sum_{n \geq 0} v^{n+1} \; {}_n p_x \; q_{x+n} \\ &= A_x = A_x(v) \\ \mathcal{E}\, v^{2(N+1)} &= A_x(v^2) \end{aligned}$$

   Es folgt nach dem Verschiebungssatz:

   $$var(v^{N+1}) = A_x(v^2) - A_x^2(v)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
var\,(\mathrm{a}_{\overline{N+1}|}) &= \frac{1}{d^2}\,var(v^{N+1}) \\
&= \frac{1}{d^2}\,\left[A_x(v^2) - A_x^2(v)\right] \\
var\,(R\mathrm{a}_{\overline{N+1}|}) &= \frac{R^2}{d^2}\,\left[A_x(v^2) - A_x^2(v)\right]
\end{aligned}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 < \infty \quad \text{würde als notwendige Bedingung erfordern:}$$

$$\lim_{k\to\infty}\ \sigma_k^2 = 0$$

Nun gilt in praxi: $R_k > 0\,\forall\ k \Longrightarrow R_k \geq 1ct.\,\forall\ k$; die Renten eines Bestandes sind also nach unten beschränkt. Zudem gilt:

$$A_{x_k}(v^2)\ -\ A^2_{x_k}(v) > 0 \quad \text{mit} \quad x_k\ \in\ \mathbb{Z}$$

Nun liegen die Alter x_k in praxi zwischen 10 und 150 Jahren, sodass

$$A_{x_k}(v^2)\ -\ A^2_{x_k}(v)$$

für bel. n nur endlich viele unterschiedliche Werte annimmt, mithin auch ein Minimum > 0. Damit ist also

$$\lim_{k\to\infty}\ \sigma_k^2 = 0$$

widerlegt, mithin auch

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 < \infty$$

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 = \infty$$

5.

$$\mu = \mathcal{E}B = \mathcal{E}\sum_{k=1}^{n} B_k = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}B_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \, \mathrm{a}_{x_k} :$$

Barwert der Gesamtverpflichtung des Rentnerbestandes.

6.

$$\sigma^2 = var(B) = var\left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right) = var\left(\sum_{k=1}^{n} R_k \, \mathrm{a}_{\overline{N_k+1|}}\right)$$

Wegen der Unabhängigkeit der N_k und damit der Unabhängigkeit der $\mathrm{a}_{\overline{N_k+1|}}$ bzw. B_k folgt

$$\sigma^2 = var\left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} var(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

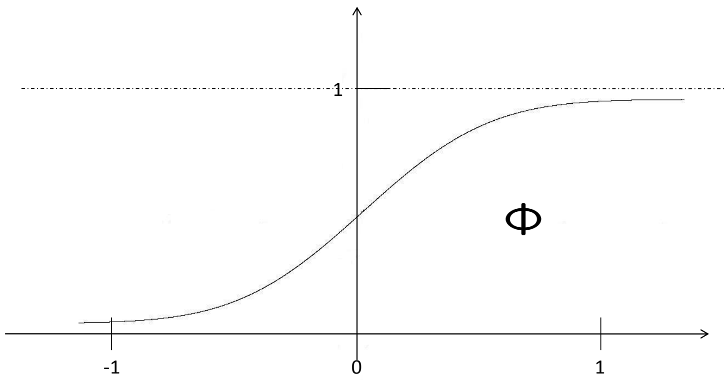
7. Die Verteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist symmetrisch bezüglich $\mu = \mathcal{E}B$. Also ist

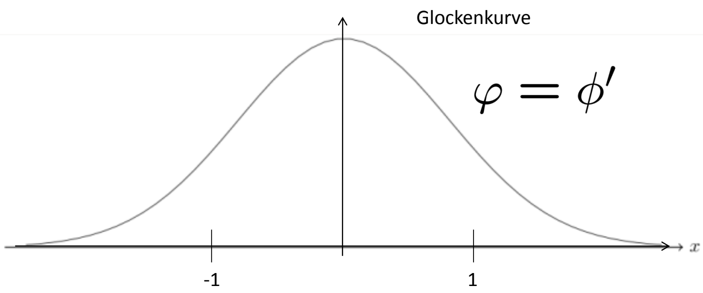
$$P\{\mathcal{R} \leq \mu\} = P\{\mathcal{R} \leq \mathcal{E}B\} = 0,5$$

8.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B' &= \mathcal{E}\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma}\left(\mathcal{E}B - \mu\right) \\
&= 0 \quad \text{wg.} \quad \mathcal{E}B = \mu \\
var(B') &= var\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\, var(B) \\
&= 1 \quad \text{wg.} \quad var(B) = \sigma^2
\end{aligned}$$

9.





10.

$$
\begin{aligned}
P\{B \leq \mathcal{R}\} &= P\left\{B \leq \mu + s\right\} \\
&= P\left\{B - \mu \leq s\right\} \\
&= P\left\{\frac{B-\mu}{\sigma} \leq \frac{s}{\sigma}\right\} \\
&= P\left\{B' \leq \frac{s}{\sigma}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{s}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

11. Sei $\Phi^{-1} : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von Φ.

$$
\begin{aligned}
& P\{B \le \mathcal{R}\} \overset{!}{=} \alpha \\
\Rightarrow \quad & P\left\{B' \le \frac{\mathcal{R}-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{\mathcal{R}-\mu}{\sigma}\right) = \alpha \\
& \Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\mathcal{R}-\mu}{\sigma}\right)\right] = \frac{\mathcal{R}-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{R} = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)
\end{aligned}
$$

Damit stellt sich der Sicherheitszuschlag zum Barwert $\mathcal{E}B = \mu$ auf $\sigma\Phi^{-1}(\alpha)$.

12. Die den Berechnungen zugrunde liegende Sterbetafel darf zumindest keine Sicherheitszuschläge für die Bestandgröße enthalten. Unseren Betrachtungen liegt eine unverfälschte Sterbetafel zugrunde. Ansonsten sind in $\mathcal{E}B$ ihrer Höhe nach unbekannte Sicherheitszuschläge enthalten.

Klausur PM Spezialwissen 2010

Aufgabe 3

Der Verein „Dreimal Würfeln hält jung (DWhj)“ e.V. beschäftigt sich intensiv mit der Erfindung und dem Test von Karten- und Brettspielen. Zur Deckung der nicht unerheblichen Auslagen des Vorstandes für Getränke während seiner Vereinstreffen und des vereinseigenen E-Mail Services „Das Spiel der Woche“ wird von den Mitgliedern ein jährlich am 1. Januar vorschüssig zahlbarer Beitrag von 410 Euro erhoben. Die Beitragspflicht endet bei Beendigung der Mitgliedschaft, spätestens jedoch nach 6 Mitgliedsjahren. Die Mitgliedschaft ist lebenslänglich, kann jedoch jederzeit durch das Mitglied für beendet erklärt werden. Wer vorsätzlich gegen irgendeine Spielregel verstößt (Umsturz von Spielfiguren, Knicken von Spielkarten, Zersägen von Würfeln), wird unverzüglich aus dem Verein ausgeschlossen. Das Ende der Mitgliedschaft tritt erfahrungsgemäß unabhängig vom Alter, Geschlecht, Neigung zur Spielsucht u.ä. und der Vereinszugehörigkeitsdauer des Mitgliedes ein. Mit dem Vereinsvermögen kann eine Verzinsung von 1,0 % p.a. erzielt werden.

In den letzten fünf Kalenderjahren nahm der Mitgliederbestand folgende Entwicklung:

2006		**2007**		**2008**		**2009**		**2010**	
1.1.	50	1.1.	54	1.1.	45	1.1.	40	1.1.	45
18.1.	-2	15.7.	-9	1.8.	-15	1.2.	+5	11.6.	+5
25.5.	+6			10.10.	+10			13.11.	-5
31.12.	54	31.12.	45	31.12.	40	31.12.	45	31.12.	45

Der Vereinsvorsitzende bittet Sie um aktuarielle Unterstützung bei der Beantwortung folgender Fragen:

1. Wie hoch setzt man vernünftigerweise die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Mitglied den Verein verlässt?

2. Wie wird sich die Anzahl der Mitglieder in den kommenden drei Jahren unter Verwendung des Ergebnisses gemäß Frage 1 voraussichtlich entwickeln?

3. Wie hoch ist der Barwert der künftigen Beiträge für ein Mitglied, das am 1. Januar 2011 sein drittes Jahr der Mitgliedschaft vollendet?

<u>Lösungen</u>

zu 1. Zum Ansatz einer Wahrscheinlichkeit für das Verlassen des Vereins werden zunächst die Ausscheidehäufigkeiten aus dem vorliegenden Material ausgewertet. Hierbei ergibt sich folgendes:

q^{2006}=1-(1-2/50) = 2/50=0,04

q^{2007}=1-(1-9/54)=9/54=0,1667

q^{2008}=1-(1-15/45)=30/45=0,3333

$q^{2009}=0$

$q^{2010}=1-(1-5/50)=5/50=0,1$

Die durchschnittliche Ausscheidehäufigkeit betrug 12,8 % p.a. Ein Trend lässt sich nicht zuverlässig erkennen. Die Ausscheidewahrscheinlichkeit könnte beispielsweise auf einen Wert zwischen 10 % und 15 % p.a. festgesetzt werden.

zu 2. Vor dem Hintergrund der Erfahrungen der letzten Jahre wird ein jährlicher Zugang von 5 Personen unterstellt. Bei einer Ausscheidewahrscheinlichkeit von 12,5 % ergibt sich folgende Entwicklung:

2011 (45+5)*0,875=44
2012 (44+5)*0,875=43
2013 (43+5)*0,875=42
2014 (42+5)*0,875=41
2015 (41+5)*0,875=40

zu 3. Das Mitglied hat noch drei Beiträge zu zahlen und zwar in ½, 1 ½, und 2 ½ Jahren. Der Barwert beträgt bei Zins 2 % und einer Ausscheidewahrscheinlichkeit von 10 % p.a.

$410 € *[1+(0,875*v)+(0,875*v)^2]$
$=410 € * [1+0,8663+0,7505]=1.073 €$

Aufgabe 4

Die Firma „Spreegurke GmbH“, eine überregional tätiges Gurkenzüchterunternehmen für Gurken der Premiumklasse, möchte zur Verbesserung der Motivation ihrer Arbeitnehmer in den Bereichen Anbau, Ernte, Weiterverarbeitung, Verpackung und Versand eine unmittelbare Pensionszusage für ihre 300 Arbeitnehmer (Jahreslohnsumme 6,0 Mio. €) einführen. Es handelt sich um einen dienstzeitabhängigen Leistungsplan, der bei Erwerbsminderung und Alter Rentenleistungen in Höhe von 0,2 % des Lohnes pro Dienstjahr vorsieht. Die Hinterbliebenen erhalten 60 % der Rente des Arbeitnehmers. Das Unternehmen hat hohen Investitionsbedarf hinsichtlich klimatisierter Gurkenlagerhallen und Gurkentransportfahrzeuge, sowie von Gurkenverarbeitungs- und Verpackungsmaschinen. Der junge Controller des Unternehmens (Ehegatte der jüngsten Enkelin des Firmengründers) belästigt Sie mit folgenden Fragestellungen:

1. Welche Methode und welche Prämissen empfehlen Sie uns für den Ausweis der Pensionsverpflichtungen in unserer Handelsbilanz?

2. Wie sollten wir methodisch unsere Pensionszusage bei der Kalkulation unserer Preisangebote für Gurkensalat in Ansatz bringen?

3. Wie entwickelt sich planmäßig die Höhe der Pensionsrückstellung von Jahr zu Jahr dem Grunde und der Höhe nach?

4. Unter welchen Bedingungen halten Sie das Vorhaben meiner Geschäftsführung, die Pensionszusage einzuführen, betriebswirtschaftlich für richtig?

5. Welche Alternativen haben wir hinsichtlich des Durchführungsweges und wie lassen sich diese betriebswirtschaftlich beurteilen?

6. Wann macht eine Rückdeckungsversicherung Sinn?

Lösung

zu 1. Es kommt darauf an, den durch die Pensionszusagen verursachten Aufwand verursachungsgerecht auf die Zeiträume zu verteilen, in denen die Gegenleistung durch den begünstigten Arbeitnehmer erbracht wird. Darüber hinaus sind das Vorsichtsprinzip und das Imparitätsprinzip zu beachten.

Bei der hier vorgesehenen Leistungszusage erfüllt das Teilwertverfahren, das eine Gleichverteilung des Aufwandes aus der Pensionszusage über die aktive Dienstzeit bewirkt, die handelsrechtlichen Anforderungen. Dafür spricht im Übrigen, dass auch für steuerliche Zwecke auf das Teilwertverfahren gemäß § 6a EStG abgestellt wird.

Die Prämissen umfassen die biometrischen Rechnungsgrundlagen einschließlich Altersgrenze und Fluktuationsannahmen, die Annahmen über die künftige dynamische Entwicklung der Anwartschaften und Renten, der Rechnungszins und ggf. die Berücksichtigung zwingend anfallender Nebenkosten.

Hinsichtlich der biometrischen Rechnungsgrundlagen kann auf allgemein anerkannte Rechnungsgrundlagen wie die RICHTTAFELN 2005 G von Klaus Heubeck zurückgegriffen werden. Sofern ausnahmsweise spezifische Kenntnisse über das Risikoverhalten des zu bewertenden Bestandes vorliegen, kommt ggf. eine Modifikation der Tafeln in Betracht; dies wird bei einer neu erteilten Pensionszusage eher nicht der Fall sein. An die Stelle expliziter Annahmen über Fluktuationswahrscheinlichkeiten kann das auch für die steuerliche Bewertung maßgebende Verfahren der Definition eines Mindestalters für den Finanzierungsbeginn treten. Die Altersgrenze kann mit Blick auf die in der gesetzlichen Rentenversicherung in Frage kommenden Altersgrenzen festgesetzt werden.

Soweit das Unternehmen sich bestimmten Anpassungsverpflichtungen nicht entziehen kann, sind diese mit einem angemessen vorsichtigen Schätzwert in Ansatz zu bringen. Der Rechnungszins könnte an den Renditen risikoarmer Kapitalanlagen mit Anlagehorizonten, die den Verpflichtungen entsprechen, orientiert werden.

Sachgerecht wäre im Übrigen die Einbeziehung der zumindest in der Rentenlaufzeit anfallenden Kosten für Administration und Insolvenzsicherung.

zu 2: Entsprechend der für die Kostenrechnung geforderten Korrespondenz zwischen Leistung (Arbeitsleistung des Berechtigten) und Gegenleistung (Lohn und Versorgungsleistung des Unternehmens) bietet sich eine mit realistischen Prämissen ermittelte versicherungstechnische Bruttoprämie als Methode zur Ermittlung der Kosten der Pensionszusage an.

zu 3: Nach einer Faustformel belaufen sich die Kosten eines Endgehaltsplanes bei 3 % Realzins auf etwa 1 % der Entgelte für ein Rentensystem mit einer jährlichen Rentensteigerung um je 0,1 % des letzten Entgeltes. Dies führt bei der hier vorgesehenen Rentensteigerung von 0,25 % pro Dienstjahr zu einem geschätzten Kostensatz von 2,5 %. Aus Vorsichtsgründung und mit Blick auf einen möglicherweise geringeren Realzins kommt ein Ansatz von rd. 3,0 % der Entgelte in Betracht.

zu 4: Die nach steuerlichen Grundsätzen ermittelte Pensionsrückstellung würde bei stabilen Bestandsverhältnissen bis auf rd. 100 % der Entgeltsumme ansteigen. Je nach Auswahl der Prämissen für die handelsrechtliche Bewertung kann der Wert für die handelsrechtliche Pensionsrückstellung durchaus 150 % der Entgeltsumme erreichen.

zu 5: Die Frage läuft darauf hinaus, ob die Erteilung einer Pensionszusage effizienter ist als die ansonsten notwendigen Leistungen an die Berechtigten, um eine identische Gegenleistung erwarten zu können. Für die Pensionszusage spricht deren lohnsteuerliche Förderung. Diese lohnsteuerliche Förderung macht die Versorgungszusage für den Berechtig deutlich wertvoller als ein vergleichbarer Barlohnzuschlag. In eine ähnliche Richtung geht die Beobachtung, dass der über die betriebliche Altersversorgung dem Begünstigten gut gebrachte Zins in der Regel die Renditen von privaten Anlagen des Arbeitnehmers übersteigt, so dass für den vorsorgewilligen Arbeitnehmer die Versorgungszusage auch deshalb einem entsprechenden Lohnzuschlag überlegen ist. Ebenfalls für eine Pensionszusage spricht ein dauerhaft im Unternehmender zu unterstellender Kapitalbedarf. Hier könnten die für die Erfüllung der Pensionszusage erforderlichen Mittel in der Zeit vom Empfang der Gegenleistung durch den Arbeitnehmer bis zur Auszahlung der Rente im Unternehmen verbleiben und insoweit die Aufnahme von Fremdmitteln entbehrlich machen.