DAV - Prüfung 20. Oktober 2007

Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Eine unverfallbare Zusage auf eine jährlich vorschüssig zu zahlende Alters- und lebenslänglich laufende Invalidenrente in Höhe von jährlich R an einen x-jährigen Aktiven mit $x < z$, z : Pensionsalter, ist nach internationalen Regeln, also auf der Basis einer zusammengesetzten Ausscheideordnung von drei Ursachen (Fluktuation, Invalidität und Tod als Aktiver) zu bewerten. In diesem Zusammenhang sollen folgende Fragen beantwortet werden:

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten.

2. Geben Sie, ausgehend von einem Bestand von internen Anwärtern (Aktivenbestand mit drei Ausscheideursachen), je eine graphische Darstellung der Ausscheide- und der Übergangswahrscheinlichkeiten an (gehen Sie davon aus, dass Aktivenbestand und Bestand der externen Anwärter (Zielgesamtheit bei Ausscheiden durch Fluktuation) übereinstimmende Ausscheidewahrscheinlichkeiten haben).

3. Diese Zusage stellt eine ungewisse Verbindlichkeit und damit eine Zufallsgröße dar. Geben Sie für diese Zufallsgröße „ungewisse Verbindlichkeit" ihre Realisierungen an.

4. Der Erfüllungsbetrag dieser Zusage stellt eine Zufallsgröße dar. Geben Sie für diese Zufallsgröße ihre Realisierungen an.

5. Seien, wie im Repetitorium besprochen, für einen x-jährigen Mann auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ folgende reellwertige stetige Zufallsgrößen definiert:

   X_1 : Alter bei Eintritt des Ereignisses „Fluktuation"

   X_2 : Alter bei Eintritt des Ereignisses „Invalidität"

   X_3 : Alter bei Eintritt des Ereignisses „Tod als Aktiver"

   Drücken Sie $\hat{q}_x^{asi}$, die Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres zunächst durch Fluktuation aus dem Bestand der internen Anwärter, dann noch im gleichen Jahr durch Invalidität aus dem Bestand der externen Anwärter und schließlich noch im gleichen Jahr aus dem Bestand der Invaliden durch Tod auszuscheiden, mit Hilfe der X_1, X_2, X_3 aus. Wie lautet diese Wahrscheinlichkeit nach RT-Annahmen?

6. Seien $L = [X_1]$, $M = [X_2]$, $N = [X_3]$ (Zur Erinnerung: $a \in R$, $[a] := c \in Z : c \leq a,\ c+1 > a$). Drücken Sie den Erfüllungsbetrag der Zusage mit Hilfe von L, M und N aus.

7. Geben Sie Erwartungswert und Varianz des Erfüllungsbetrags der Zusage mit Hilfe der Verteilung $P\{L = l, M = m, N = n\}$, $l, m, n \in N_0$ an.

Lösung:

1. Eine Ausscheidewahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit einer Person einer Gesamtheit an, innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls wegen einer oder mehreren Ursachen aus der Gesamtheit auszuscheiden.

   Eine Übergangswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit einer Person an, die zu Beginn eines bestimmten Zeitintervalls zu einer bestimmten Gesamtheit gehört, am Ende des Zeitintervalls zu einer bestimmten Gesamtheit zu gehören (es kann die gleiche oder eine andere sein; auch die Gesamtheit der Ausscheidenden wird dabei als eine Gesamtheit betrachtet).

   Bem.: Eine Sterbewahrscheinlichkeit ist sowohl Ausscheide- als auch Übergangswahrscheinlichkeit.

2.

3. (T, S) mit $T = (t_i, i \in \mathbb{N}), t_i < t_{i+1},\ t_i \in \mathbb{R}$ u. $S = (S_i, i \in \mathbb{N}), S_i \in \mathbb{R}$ stellt einen Zahlungsstrom dar.

   Die Realisierungen $u_m, m \in \mathbb{N}$ einer ungewissen Verbindlichkeit U ist die Menge aller Zahlungsströme $(T^{(m)}, S^{(m)})$, durch die eine ungewisse Verbindlichkeit erfüllt werden kann. Durch diese - abzählbare - Menge $(u_m, m \in \mathbb{N})$ zusammen mit den Wahrscheinlichkeiten $P_U(u_m) = P\{U = u_m\}, m \in \mathbb{N}$, den Wahrscheinlichkeiten also, mit der die einzelnen Realisierungen zu erwarten sind, ist die Verteilung der (diskreten) Zufallsgröße U definiert.

   Da die hier besprochene Zusage laufende Renten vorsieht, die zu einem Zeitpunkt beginnen und zu einem - späteren - Zeitpunkt endigen, empfiehlt es sich, eine Doppelindexierung vorzunehmen: m bedeute den Zeitpunkt der ersten Rentenzahlung, n den Zeitpunkt der letzten Rentenzahlung.

Konkret:

$$
\begin{aligned}
T^{(m,n)} &= I\!N_0,\ m,n \in I\!N_0 \\
S^{(m,n)} &= (S_j^{(m,n)}, j \in I\!N_0),\ m,n \in I\!N_0, \quad \text{mit} \\
S_j^{(m,n)} &= R \quad \text{f.} \quad m \leq j \leq n, \quad m = 1,...,z-x,\ n \in I\!N,\ m \leq n \\
&= 0 \quad \text{sonst} \\
u^{(m,n)} &= (I\!N_0, S^{(m,n)}), \quad m,n \in I\!N_0
\end{aligned}
$$

sind die Realisierungen von U gemäß Aufgabe.

4. Sei (T,S) ein Zahlungsstrom, dann heißt

$$B = \sum_i v^{t_i}\, S_i$$

der finanzmathematische Barwert des Zahlungsstroms (T,S) zum Zeitpunkt 0.

Seien $(T^{(m)}, S^{(m)})$, $m \in I\!N_0$, die Realisierungen einer ungewissen Verbindlichkeit, dann sind

$$b_m = \sum_i v^{t_i^{(m)}}\, S_i^{(m)}\, , m \in I\!N_0,$$

die Realisierungen des Erfüllungsbetrages der ungewissen Verbindlichkeit. Durch $(b_m, n \in I\!N_0)$ und die Wahrscheinlichkeiten $P_B\,(b_m) = P\{B = b_m\}, m \in I\!N_0$ ist die Verteilung P_B der (diskreten) Zufallsgröße B definiert.

Konkret, wobei, wie in Aufgabe 1.3 empfohlen, sich eine Doppelindexierung empfiehlt:

$$
\begin{aligned}
b_{mn} &= \sum_j v^j\, S_j^{(m,n)} \\
&= R\, v^m\, a_{\overline{n+1-m|}} \quad \text{f.} \quad m = 1,...,z-x,\ n \in I\!N,\ m \leq n \\
&= 0 \quad \text{sonst} \\
&\quad\ m,n \in I\!N_0
\end{aligned}
$$

sind die Realisierungen des Erfüllungsbetrages gemäß Aufgabe mit $(I\!N_0, S^{(m,n)})$ gemäß Aufgabe 1.3.

5.

$$\begin{aligned}\hat{q}_x^{asi} &= P\{X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq x+1 \,|\, X > x\} \\ &= P\{X_1 \leq X_2, X_2 \leq X_3, X_3 \leq x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}\end{aligned}$$

mit $X = min(X_1, X_2, X_3)$.

Nach RT-Annahmen:

$$\hat{q}_x^{asi} = s_x \ {}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}} \ {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}},$$

da nach dem Lemma der Doppelübergang f. s. gleichzeitig stattfindet, d.h. nach (zusätzlichen) RT-Annahmen in der Mitte des Jahres.

6. Seien $\hat{L} = L - x = [X_1] - x, \hat{M} = M - x = [X_2] - x$ und $\hat{N} = N - x = [X_3] - x$ mit der Bedeutung:

$\hat{L}$: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Ereignisses „Fluktuation“
$\hat{M}$: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Ereignisses „Invalidität“
$\hat{N}$: Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Ereignisses „Tod“

Zudem sei z das Pensionsalter, damit $\hat{n} := z - x$ die Anzahl der Jahre bis zum Erreichen des Pensionsalters.

Zunächst: Der Anspruch ist unabhängig von der Fluktuation, wie sich aus dem Text ergibt. Damit spielen für die Festlegung des Anspruchs lediglich die drei Größen $\hat{M}, \hat{N}$, und $\hat{n}$ eine Rolle.

Fallunterscheidungen	Anspruch
$\hat{M} \leq \hat{N} < \hat{n}$	Invalidenrente (Ende vor dem Pensionsalter) (auch Invalidenrente der Summe 0 für den Fall $\hat{M} = \hat{n} - 1$)
$\hat{M} < \hat{n} \leq \hat{N}$	Invalidenrente (Ende nach dem Pensionsalter)
$\hat{N} \leq \hat{M} < \hat{n}$	0
$\hat{N} < \hat{n} \leq \hat{M}$	0
$\hat{n} \leq \hat{M} \leq \hat{N}$	Altersrente
$\hat{n} \leq \hat{N} \leq \hat{M}$	Altersrente

Zusammengefasst:

Auf $\{\hat{M} \leq \hat{N}, \hat{M} < \hat{n}\}$	besteht Anspruch auf eine lebenslänglich laufende Invalidenrente
Auf $\{\hat{n} < \hat{M}, \hat{n} \leq \hat{N}\}$	besteht Anspruch auf eine lebenslänglich laufende Altersrente
Auf $\{\hat{N} \leq \hat{M}, \hat{N} < \hat{n}\}$	besteht kein Anspruch

Damit lautet der Erfüllungsbetrag B:

$$\begin{aligned}
B &= Rv^{\hat{M}+1}\, \mathrm{a}_{\overline{\hat{N}-\hat{M}|}} \;=\; R\left(\mathrm{a}_{\overline{\hat{N}+1|}} - \mathrm{a}_{\overline{\hat{M}+1|}}\right) \\
&= R \sum_{k=\hat{M}+1}^{\hat{N}} v^k = R \sum_{k \geq 0} v^k \; 1_{\{\hat{M}+1 \leq k \leq \hat{N}\}} \quad \text{auf} \quad \{\hat{M} \leq \hat{N}, \hat{M} < \hat{n},\} \\
&= Rv^{\hat{n}}\, \mathrm{a}_{\overline{\hat{N}+1-\hat{n}|}} = R\left(\mathrm{a}_{\overline{\hat{N}+1|}} - \mathrm{a}_{\overline{\hat{n}|}}\right) \\
&= R \sum_{k=\hat{n}}^{\hat{N}} v^k = R \sum_{k \geq 0} v^k \; 1_{\{\hat{n} \leq k \leq \hat{N}\}} \quad \text{auf} \quad \{\hat{n} \leq \hat{M}, \hat{n} \leq \hat{N}\} \\
&= 0 \quad \text{auf} \quad \{\hat{N} \leq \hat{M}, \hat{N} < \hat{n}\}
\end{aligned}$$

Geschlossene Darstellung:

$$\begin{aligned}
B &= R\left[v^{\hat{M}+1}\, \mathrm{a}_{\overline{\hat{N}-\hat{M}|}} \quad 1_{\{M < \hat{n},\, \hat{M} \leq \hat{N}\}} + v^{\hat{n}}\, \mathrm{a}_{\overline{\hat{N}+1-\hat{n}|}} \quad 1_{\{\hat{n} \leq \hat{M},\, \hat{n} \leq \hat{N}\}}\right] \\
&= R \sum_{k=min\,(\hat{M}+1,\, \hat{n})}^{\hat{N}} v^k \qquad {}^{1} \\
&= Rv^{min(\hat{M}+1, \hat{n})}\, \mathrm{a}_{\overline{\hat{N}+1-min(\hat{M},\, \hat{n}-1)|}}, \quad \text{falls} \quad \mathrm{a}_{\overline{k|}} := 0 \quad \text{f.} \quad k \leq 0.
\end{aligned}$$

[1] bei üblicher Konvention: $\sum_{k=i}^{j} v_k = 0 \quad \text{f.} \quad j < i$

7.

a) Erwartungswert

Seien $b_{mn}, m, n \geq 0$, die Realisierungen von B, also:

$$\begin{aligned}
b_{mn} &= Rv^{m+1}\, \mathrm{a}_{\overline{n-m|}} \quad \text{f.} \quad m < \hat{n}, m \leq n \\
&= Rv^{\hat{n}}\, \mathrm{a}_{\overline{n+1-\hat{n}|}} \quad \text{f.} \quad m \geq \hat{n}, n \geq \hat{n} \\
&= 0 \quad \text{f.} \quad n \leq m, n < \hat{n}
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}B &= \sum_{l,m,n\geq 0} b_{mn}\; P\{L = l, M = m, N = n\} \\
&= \sum_{m,n\geq 0} b_{mn}\; P\{M = m, N = n\} \quad \text{mit} \\
& \quad P\{M = m, N = n\} = \sum_{l} P\{L = l, M = m, N = n\} \\
&= R\left[\sum_{m=0}^{\hat{n}-1} \sum_{n\geq m} v^{m+1}\; \mathrm{a}_{\overline{n-m|}}\, P\{M = m, N = n\} + \sum_{m\geq\hat{n}} v^{\hat{n}}\; \mathrm{a}_{\overline{n+1-\hat{n}|}} \underbrace{\sum_{n\geq\hat{n}} P\{M = m, N = n\}}_{P\{M\geq\hat{n}, N = n\}}\right] \\
&= R\left[\sum_{m=0}^{\hat{n}-1} v^{m+1} \sum_{n\geq m} \mathrm{a}_{\overline{n-m|}}\, P\{M = m, N = n\} + v^{\hat{n}} \sum_{n\geq\hat{n}} \mathrm{a}_{\overline{n+1-\hat{n}|}}\; P\{M\geq\hat{n}, N = n\}\right]
\end{aligned}$$

Bem.: Der erste Term lässt sich in $R\,\mathrm{a}_x^{ai}$ und der zweite Term in $R\,\mathrm{a}_x^{aA}$ umformen.

b) Varianz

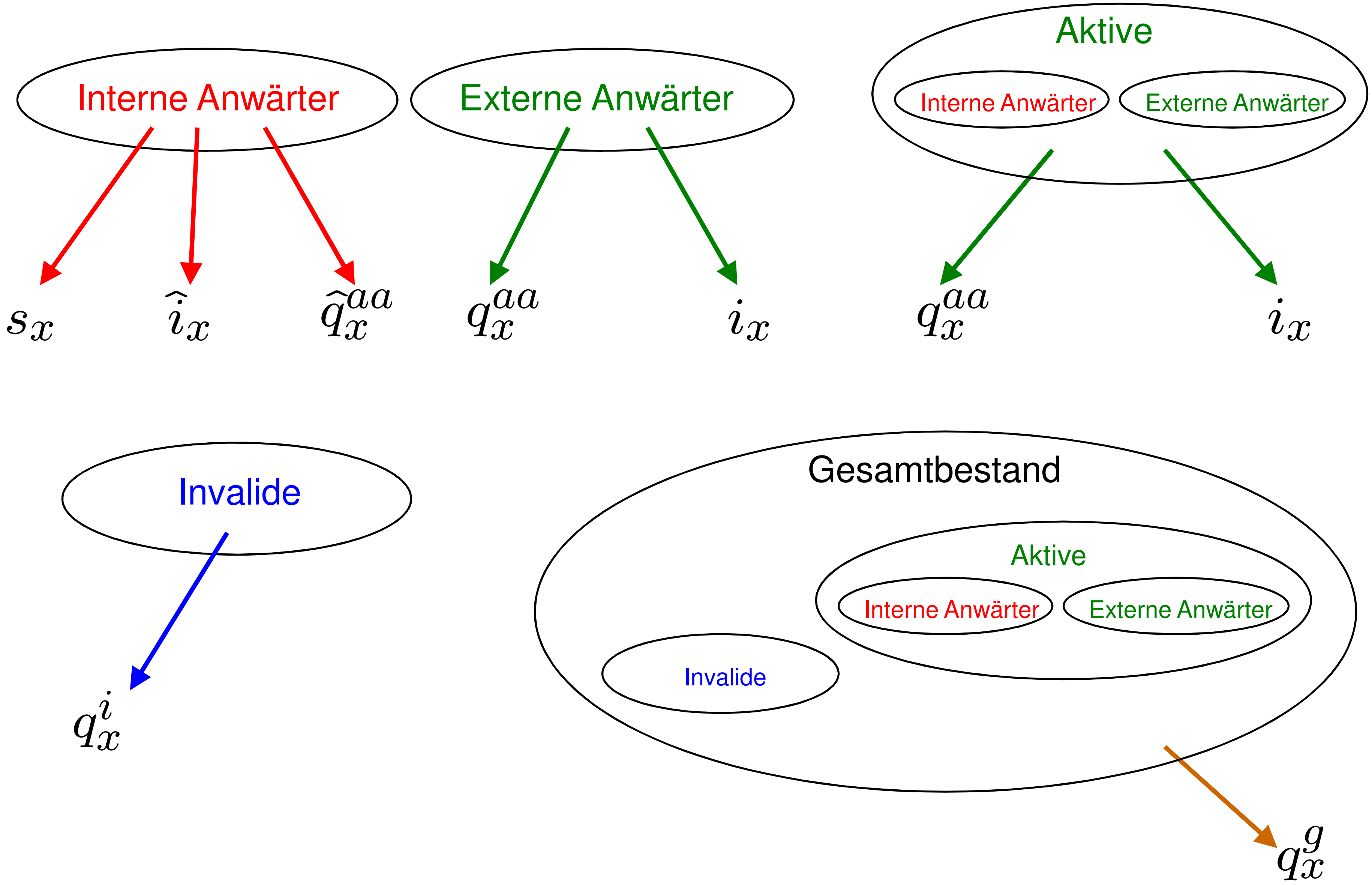
$$\begin{aligned}
var(B) &= \mathcal{E}(B^2) - \mathcal{E}^2(B) \quad \text{(Verschiebungssatz)} \\
b_{mn}^2 &= R^2\, v^{2(m+1)}\; \mathrm{a}^2_{\overline{n-m|}} \quad \text{f.} \quad m < \hat{n}, m \leq n \\
&= R^2\, v^{2\hat{n}}\; \mathrm{a}^2_{\overline{n-\hat{n}|}} \quad \text{f.} \quad m \geq \hat{n}, n \geq \hat{n} \\
&= 0 \quad sonst
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

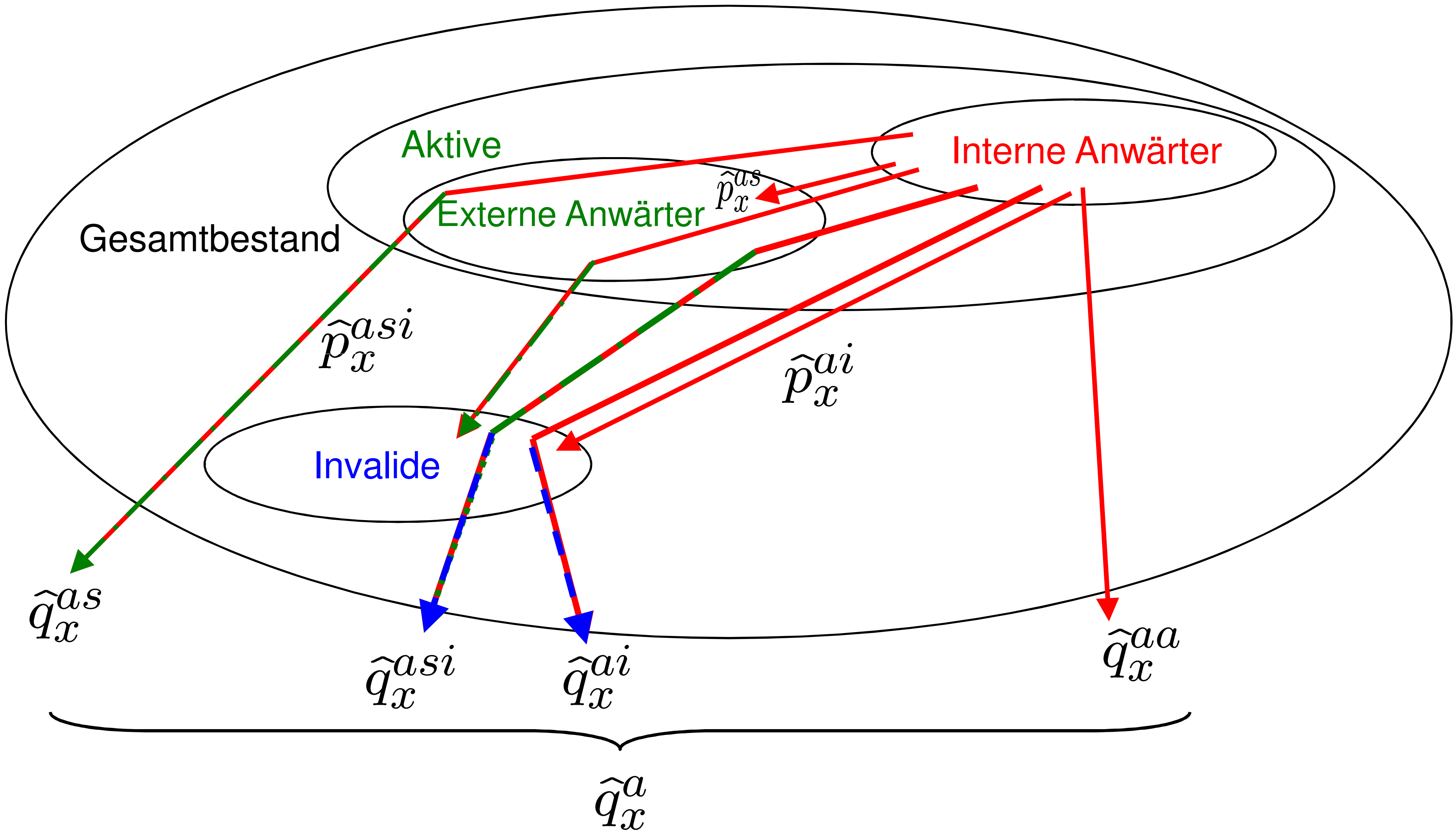
$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(B^2) &= \sum_{l,m,n\geq 0} b_{mn}^2 \; P\{L=l, M=m, N=n\} \\
&= \sum_{m,n\geq 0} b_{mn}^2 \; P\{M=m, N=n\} \\
&= R^2 \left[\sum_{m=0}^{\hat{n}-1} v^{2(m+1)} \sum_{n\geq m} \mathrm{a}^2_{\overline{n-m}|} \; P\{M=m, N=n\} + v^{2\hat{n}} \sum_{n\geq \hat{n}} \mathrm{a}^2_{\overline{n+1-\hat{n}}|} \; P\{M\geq \hat{n}, N=n\} \right]
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \quad var(B) = \mathcal{E}(B^2) - \mathcal{E}^2(B)$

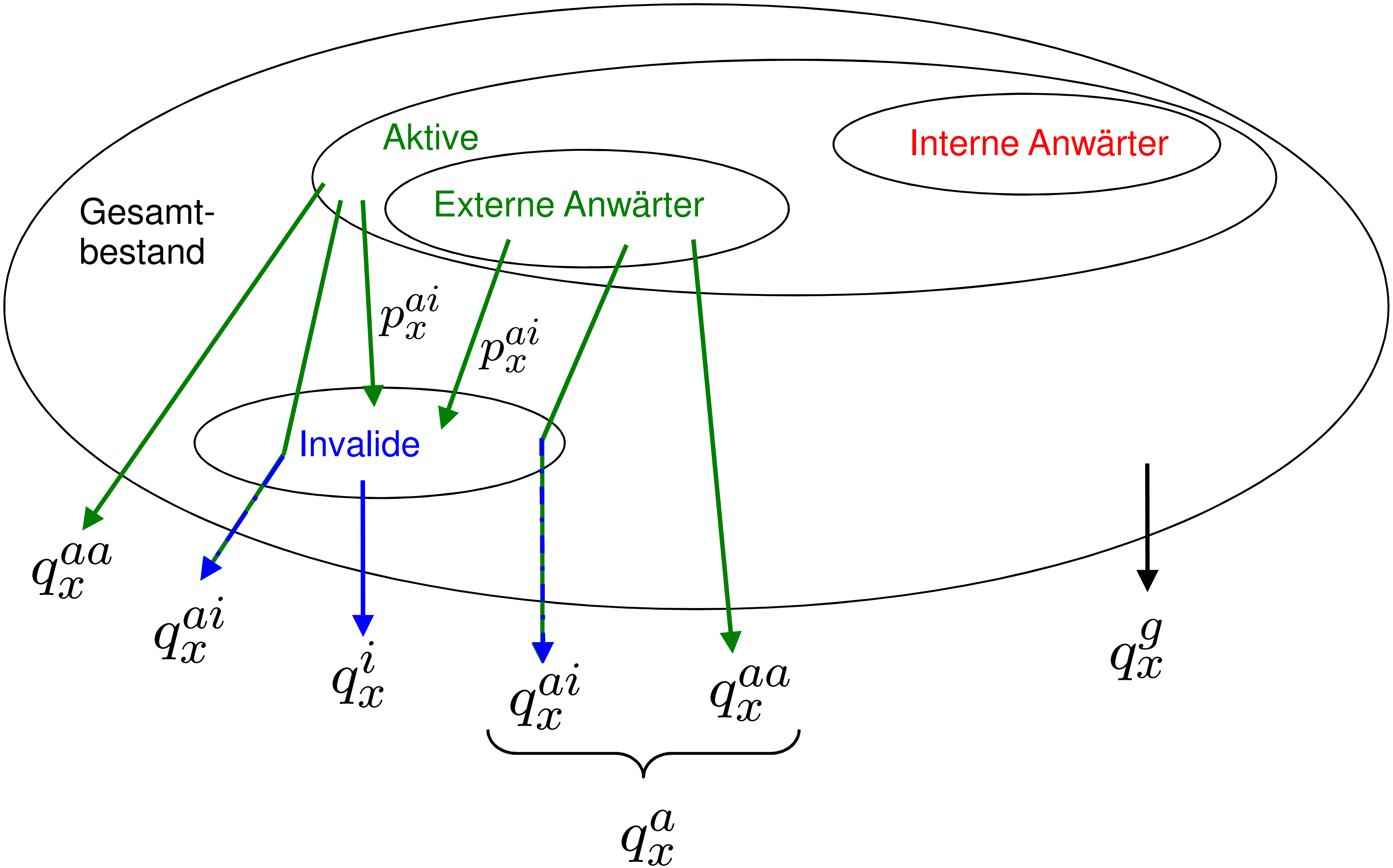
2. Ausscheidewahrscheinlichkeiten:



Übergangswahrscheinlichkeiten vom internen Anwärter



Übrige Übergangswahrscheinlichkeiten



DAV - Prüfung Oktober 2007

Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik

Aufgabe 2 (40 Punkte von insgesamt 150 Punkten)

Herr K., Generaldirektor eines großen Industrieunternehmens, besitzt eine Pensionszusage, die u.a. die Gewährung einer lebenslänglich laufenden jährlich im voraus zu zahlenden Witwenrente der Jahreshöhe R an die mit dem Berechtigten zum Zeitpunkt seines Todes verheiratete (Ehe)Frau vorsieht, und zwar unabhängig vom Alter der Ehefrau zum Zeitpunkt der Trauung (generelle Witwenrentenzusage). Die Anwartschaft auf Witwenrente bleibt selbst bei einer Scheidung des Ehepaars bestehen. Allerdings sieht die Zusage eine Späteheklausel vor, wonach, sollte Herr K. nach Vollendung seines 62. Lebensjahres heiraten, seine Ehefrau keine Anwartschaft auf eine Witwenrente erhält. Das Pensionsalter ist in der Zusage mit 65 Jahren festgelegt.

Herr K. ist z. Z. (Stichtag) $x = 63$ Jahre alt und hat im Alter von 61 Jahren eine um 40 Jahre jüngere Frau geheiratet (Alter der Ehefrau zum Stichtag: y). Sie sind als Sachverständiger aufgerufen, diese Verpflichtung zum Stichtag zu bewerten.

1. Geben Sie den Barwert der Verpflichtung b_1 zum Stichtag nach der individuellen Bewertungsmethode an. Erläutern Sie, warum aus grundsätzlichen Erwägungen die Bewertung der Verpflichtung nach dieser Methode nicht in Frage kommt.

2. Geben Sie den Barwert der Verpflichtung b_2 zum Stichtag nach der kollektiven Bewertungsmethode an. Erläutern Sie, warum auch diese Bewertung der Verpflichtung mit den üblichen h_x und $y(x)$ der Richttafeln nicht in Frage kommt.

3. Sei, betrachtet vom Stichtag an, die Zufallsgröße M die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod von Herrn K, N_1 die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod von Frau K. Sei eine weitere Zufallsgröße wie folgt definiert: N_2 sei, falls Herr K. zum Zeitpunkt seines Todes mit einer anspruchsberechtigten Ehefrau verheiratet ist, die Anzahl der vollendeten Jahre der Witwe bis zu ihrem Tod ab dem Beginn des Jahres des Todes von Herrn K.; ansonsten sei $N_2 = 0$. Sei noch $\text{a}_{\overline{n}|}$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{a}_{\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \quad \text{f.} \quad n \geq 1 \\ &= 0 \quad \text{f.} \quad n \leq 0 \end{aligned}$$

   wobei wie üblich $v = \frac{1}{1+i}$, $\; i =$ Zins p.a. bedeutet. Zeigen Sie, dass

$$B_2 = v^{M+1}\, \mathrm{a}_{\overline{N_2}|}$$

den Erfülllungsbetrag der Verpflichtung gegenüber Herrn K. darstellt, während

$$B_1 = v^{M+1}\ \mathrm{a}_{\overline{N_1 - M}|}$$

den Erfüllungsbetrag der Verpflichtung gegenüber Herrn K. ausdrückte, wenn die Zusage speziell und ausdrücklich lediglich zu Gunsten von Frau K. als Witwe vereinbart wäre (individuelle Zusage).

In welcher Größenrelation stehen B_1 und B_2?

4. Geben Sie den Barwert der Verpflichtung gegenüber Herrn K. zum Stichtag an, indem Sie die h_x und $y(x)$ der Richttafeln geeignet modifizieren, und vergleichen Sie das Ergebnis mit ihrem Ergebnis nach 1.

5. Liegt der Barwert zum Stichtag nach 1 über oder unter dem (richtigen) Barwert der Verpflichtung gegenüber Herrn K., wenn gemäß Zusage die Witwenrentenanwartschaft nach einer Scheidung des Ehepaars entfiele?

Lösung:

1. Sei z das Pensionsalter von Herrn K. mit $z = x + n$ sowie $\Delta := x - y(= 40)$. Nach der individuellen Methode gilt für den Barwert b_1:

$$b_1 = R\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x^a\ {}_kp_y^g\ q_{x+k}^{aa}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y+k}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y+k+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{y+k+1}^w + v^n\ {}_np_x^a\ {}_np_y^g\ \mathrm{a}_{z,z-\Delta}^{rw}\right]$$

mit

$$\mathrm{a}_{z,z-\Delta}^{rw} = \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_kp_z^r\ {}_kp_{z-\Delta}^g\ q_{z+k}^r\ {}_{\frac{1}{2}}p_{z-\Delta+k}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{z-\Delta+k+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{z-\Delta+k+1}^w$$

Diese Zusage begünstigt die Ehefrau zum Stichtag und stellt auf deren Leben ab. Tatsächlich begünstigt jedoch nach Aufgabenstellung die Zusage die Ehefrau, die bei Tod des Berechtigten vorhanden ist. Damit erweist sich die Bewertung dieser Zusage mit der individuellen Methode grundsätzlich als unzutreffend.

2. Nach der kollektiven Methode gilt für den Barwert b_2:

$$b_2 = R\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x^a\ q_{x+k}^{aa}\ h_{x+k}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y(x+k)+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{y(x+k)+1}^w + v^n\ {}_np_x^a\ \mathrm{a}_z^{rw}\right]$$

mit

$$\mathrm{a}_z^{rw} = \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \, {}_k p_z^r \; q_{z+k}^r \; h_{z+k} \; {}_{\frac{1}{2}} p_{y(z+k)+\frac{1}{2}}^w \; \mathrm{a}_{y(z+k)+1}^w$$

Die in den Richttafeln aufgeführten Werte zur kollektiven Bewertung einer Witwenrentenanwartschaft beruhen u.a. auf durchschnittlichen Altersunterschieden zwischen Mann und Frau zum Zeitpunkt des Todes des Mannes. Nun ist nach Fallgestaltung im vorliegenden Fall die Witwe 40 Jahre jünger als ihr Mann. Somit fällt in diesem Fall der Altersunterschied der Ehegatten völlig aus dem durchschnittlichen Rahmen, so dass damit diese Witwenrentenanwartschaft durch die Werte der Richttafeln nicht zutreffend bewertet werden kann.

3. Auf $\{N_1 \geq M\}$ bedeutet $N_1 - M$ die Anzahl der Jahre, die Frau K. überlebt. Hierfür steht nach $M+1$ Jahren nach dem Stichtag der Betrag $\mathrm{a}_{\overline{N_1-M}|}$ bereit. Unter Beachtung der Diskontierung dieses Betrags um $M+1$ Jahre stellt B_1 den Betrag dar, der genau zur Erfüllung der Verpflichtung einer lebenslänglichen Witwenrente an Frau K. reicht.

   Auf $\{N_1 < M\}$ liegt keine Verpflichtung zur Zahlung einer Witwenrente vor, entsprechend $B_1 = 0$ auf $\{N_1 < M\}$.

   Auf $\{N_1 \geq M\}$ bedeutet N_2 die Anzahl der Jahre, um die die Frau Herrn K. überlebt, mit der er bei seinem Tode verheiratet ist. Hierfür steht nach $M+1$ Jahren nach dem Stichtag der Betrag $\mathrm{a}_{\overline{N_2}|}$ bereit. Unter Beachtung der Diskontierung dieses Betrags um $M+1$ Jahre stellt B_2 den Betrag dar, der genau zur Erfüllung der Verpflichtung einer lebenslänglichen Witwenrente an diese Frau reicht. In dieser Weise, als generelle Witwenrentenzusage, ist die Zusage formuliert.

   Auf $\{N_1 < M\}$ liegt keine Verpflichtung zur Zahlung einer Witwenrente vor, da infolge Aufgabenstellung bei Tod von Frau K. vor Tod ihres Mannes auch bei erneuter Heirat von Herrn K. keine Witwenrentenanwartschaft entstünde, entsprechend $B_2 = 0$ auf $\{N_1 < M\}$.

   Infolge des in der Aufgabenstellung dargestellten Sachverhalts stimmt also, wirtschaftlich gesehen, die vorliegende generelle Zusage mit einer Zusage überein, die speziell das Paar Herr K. und seine spätere Ehefrau begünstigt hätte.

   Auf $\{N_1 \geq M\}$ drücken sowohl N_2 als auch $N_1 - M$ den gleichen Sachverhalt aus, nämlich die Anzahl der vollendeten Lebensjahre von Frau K vom Beginn des Jahres des Todes von Herrn K bis zum Beginn des Jahres des Todes von Frau K.

   Somit gilt auf $\{N_1 \geq M\}$:

$$N_2 = N_1 - M$$

   mit den Realisierungen $0, 1, 2, ...$ und

$$P\{N_2 = k\} = P\{N_1 - M = k\},\ k = 0, 1, \ldots$$

Es folgt auf $\{N_1 \geq M\}$:

$$B_1 = v^{M+1}\ \mathrm{a}_{\overline{N_1 - M|}} = v^{M+1}\ \mathrm{a}_{\overline{N_2|}} = B_2$$

Zudem gilt im vorliegenden Fall auf $\{N_1 < M\}$:

$$B_1 = B_2 = 0,$$

also insgesamt

$$B_1 = B_2$$

4. Sei mit $\Delta = x - y\,(= 40)$ für $u = x, x+1, \ldots$:

$$\begin{aligned} h_u^{'} &= {}_{u-x}p_y^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{u-\Delta}^g \\ y^{'}(u) &= u - \Delta \end{aligned}$$

Setzt man diese Vorgaben in die Formel nach 2 ein, so erhält man:

$$b_2^{'} = R\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x^a\ q_{x+k}^{aa}\ {}_kp_y^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y+k}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y+k+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{y+k+1}^w + v^n\ {}_np_x^a\ \mathrm{a}_z^{rw}\right]$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_z^{rw} &= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_kp_z^r\ q_{z+k}^r\ {}_np_y^g\ {}_kp_{y+n}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{y+n+k}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{z+k-\Delta+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{z+k-\Delta+1}^w \\ &= {}_np_y^g \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_kp_z^r\ q_{z+k}^r\ {}_kp_{z-\Delta}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{z-\Delta+k}^g\ {}_{\frac{1}{2}}p_{z-\Delta+k+\frac{1}{2}}^w\ \mathrm{a}_{z-\Delta+k+1}^w \\ &= {}_np_y^g\ \mathrm{a}_{z,z-\Delta}^{rw} \end{aligned}$$

Es gilt also $\quad b_2^{'} = b_1$.

5. Entfällt gemäß Zusage die Witwenrentenanwartschaft infolge Scheidung, dann könnte die Verpflichtung außer durch Tod von Frau K. auch durch Scheidung wegfallen, ohne dass eine anschließend von Herrn K. geheiratete Ehefrau eine Anwartschaft auf Witwenrente erhielte. Damit sollten $h_u^{'}$ nach 4. durch $h_u^{''}$ ersetzt werden mit

$$h_u^{''} \leq h_u^{'}, \quad u = x, x+1, \ldots$$

Damit folgt, wird in diesem Fall der Barwert der Verpflichtung mt $b_2^{''}$ bezeichnet:

$$b_2^{''} \leq b_1$$

Klausur Spezialwissen Pensionsversicherungsmathematik
Oktober 2007

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Die Firma Kugelmann & Schmalfrau steht vor wichtigen Entscheidungen über die Zukunft des Unternehmens. Zur Fundierung dieser Entscheidungen sollen Prognosen für die wirtschaftliche Zukunft angestellt werden. Die Beschreibung der wirtschaftlichen Konsequenzen der betrieblichen Altersversorgung in Form einer unmittelbaren Pensionszusage auf Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenrenten traut man sich mit Bordmitteln nicht zu. Da stößt man auf Sie als Aktuar(in) der Zukunft und bittet Sie um die Beantwortung folgender Fragen:

(i) Welche Methoden stehen Ihnen zur Verfügung, um die Liquiditäts- und Erfolgswirkung der betrieblichen Altersversorgung im Zeitablauf zu beschreiben?

(ii) Gewähren Sie uns einen Einblick in die Formeln, nach denen Sie beispielsweise die Zukunft der Pensionsverpflichtung eines am Beginn eines Jahres x-jährigen Altersrentners berechnen.

(iii) Wie stellen Sie üblicherweise die Ergebnisse Ihrer Berechnungen dar? Welche Größen geben Sie an, wie machen Sie die Ergebnisse „lesbar"?

(iv) Auf welche Prämissen kommt es an?

Musterlösung:

Zu (i): Die Beschreibung der Liquiditäts- und Erfolgswirkung der betrieblichen Altersversorgung im Zeitablauf erfordert eine Prognoserechnung hinsichtlich der durch die betriebliche Altersversorgung eintretenden Wirkungen auf die Liquidität und den Erfolg des Unternehmens. Die Herleitung der diesbezüglichen Kenngrößen erfordert eine Prognose der von der betrieblichen Altersversorgung begünstigten Personenbestände. Hierfür stehen zwei methodische Ansätze, die deterministische und die stochastische Methode zur Verfügung.

Bei der deterministischen Methode wird jede einzelne Person des Bestandes nach Maßgabe der aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen hergeleiteten Übergangswahrscheinlichkeiten Jahr für Jahr fortentwickelt. Auf diese Weise wird unmittelbar der Erwartungswert der Bestandsentwicklung beschrieben.

Bei der stochastischen Methode wird für jede Person des Bestandes mittels eines Zufallsgenerators, der den Wahrscheinlichkeiten der biometrischen Rechnungsgrundlagen folgt, ein möglicher Verlauf der Verpflichtung simuliert. Bei hinreichend großem Bestand stellt die Summe der Einzelverläufe einen guten Schätzer für den Erwartungswert für den Bestand dar.

Zu (ii): Ein Altersrentner kann von Jahr zu Jahr entweder Altersrentner bleiben (a), versterben und eine Witwe hinterlassen (b) oder versterben ohne eine Witwe zu hinterlassen (c).

Die einjährigen Wahrscheinlichkeiten für einen am Beginn des Jahres x-jährigen Altersrentner lauten

(a) $1-q_x^r$

(b) $q_x^r \cdot h_x \cdot \frac{1-q_{y(x)}^w}{1\text{-}0{,}5 \cdot q_{y(x)}^w}$

(c) $q_x^r \cdot (1-h_x) + q_x^r \cdot h_x \, \frac{0{,}5 \cdot q_{y(x)}^w}{1-q_{y(x)}^w}$

Zu (iii): Die Ergebnisse werden zunächst als Zeitreihen dargestellt. Damit wird dem Auftraggeber eine Übersicht über die Entwicklung der Personenbestände (unterteilt nach Aktiven, Ausgeschiedenen Anwärtern und Leistungsempfängern), ggf. auch differenziert nach bestimmten Personengruppen, und über die wirtschaftlichen Kenngrößen (Beiträge, Versorgungsleistungen, Verwaltungskosten, Bilanzwerte, Rückstellungsveränderung) vermittelt. Soweit die wirtschaftlichen Kenngrößen von dynamischen Einflüssen beherrscht sind, empfiehlt sich zusätzlich die Angabe trendbereinigter Größen oder die Angabe von Relationen, etwa zur Lohn-und Gehaltssumme.

Grafische Darstellungen erleichtern dem Leser die Bewertung der Ergebnisse.

Die Plausibilität der Ergebnisse lässt sich beurteilen anhand von ergänzenden Angaben, beispielsweise zur Altersstruktur des Bestandes am Ende des Prognosezeitraumes oder durch Angabe von Durchschnittswerten für Gehälter, Leistungen und erreichbare Anwartschaften, sowie durch einen Abgleich mit den im Beharrungszustand zu erwartenden Grenzwerten.

Zu (iv): Die im Vorfeld der Prognoserechnung abzustimmenden Prämissen betreffen:

- Biometrische Rechnungsgrundlagen
- Altersgrenzen
- Fluktuation
- Ausmaß und Struktur des Neuzugangs
- Inhaltliche Entwicklung der Verpflichtungen
- Trends für Anwärter und Rentner
- Bewertungsmethode und -prämissen für Bilanzansätze
- Steuersätze
- Zinssätze für betriebswirtschaftliche Analyse

Aufgabe 4 (40 Punkte)

Die Konkurrenzfirma Schmalmann & Kugelfrau möchte eine betriebswirtschaftliche Analyse ihrer betrieblichen Altersversorgung vornehmen, ohne zu wissen, was das eigentlich genau ist.

(i) Klären Sie den Geschäftsführer über die Möglichkeiten auf, mit Hilfe des Modells zur nachsteuerlichen Analyse von Pensionszusagen Entscheidungen zur betrieblichen Altersversorgung zu begründen..

(ii) Welche unmittelbaren und mittelbaren Wirkungen der betrieblichen Altersversorgung werden in dem Modell gemessen?

(iii) Erläutern Sie den Begriff der „Spur“ der betrieblichen Altersversorgung.

(iv) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der im Modell unterstellten Fremdkapitalverzinsung und dem wirtschaftlichen Effekt der Vorausfinanzierung bei externer und interner Finanzierung?

Musterlösung
Zu (i): Im Rahmen einer betriebswirtschaftlichen Analyse wird die Wirkung einer unternehmerischen Maßnahme, z.B. die Gewährung von betrieblicher Altersversorgung, auf das Eigenkapital des Unternehmens im Zeitablauf ermittelt. Hierbei wird ein Vergleich angestellt zwischen dem Unternehmen, das die zu analysierende Maßnahme durchführt, und demjenigen, das die Maßnahme nicht durchführt, im übrigen aber identischen Bedingungen ausgesetzt ist.

Zur Fundierung der Entscheidung, betriebliche Altersversorgung einzuführen, wird mittels des Modells die Wirkung der betrieblichen Altersversorgung verglichen mit einer alternativ zur gleichwertigen Nutzung von Personal erforderlichen Maßnahme, etwa der Gewährung höherer Entgelte.

Die Anwendung des Modells auf die Wirkung der betrieblichen Altersversorgung in verschiedenen Durchführungswegen unterstützt die Entscheidung über den Durchführungsweg.

Bei der Gestaltung des Leistungsplanes hilft die Anwendung des Modells auf verschiedene Plangestaltungen.

Eine Variation der steuerlichen Parameter im Modell gestattet Aussagen über die steuerlichen Auswirkungen verschiedener Gestaltungsvarianten.

Zu (ii): Im Modell verarbeitet und dargestellt werden folgende Kenngrößen

a) unmittelbare Wirkungen

auf Zahlungsebene
- Beiträge an externe Versorgungsträger
- Beiräge an Rückdeckungsversicherung oder Sondervermögen
- Versorgungsleistungen
- Verwaltungskosten, PSV-Beiträge

auf Erfolgsebene
- Veränderung der Rückstellung
- Veränderung von Aktivwerten

in der Bilanz
- Rückstellung
- Aktivwerte

b) mittelbare Wirkungen

auf Zahlungsebene
- steuerliche Auswirkungen der unmittelbaren Wirkungen
- nachsteuerliche Zinseffekte für den Ausgleich der unmittelbaren Wirkungen

auf die Kapitalausstattung

in der Bilanz
kumulierte Liquidität aus Vergleichsbetrachtung

zu (iii): Unter der Spur der betrieblichen Altersversorgung versteht man die für eine Generation vom Eintritt bis zur endgültigen Erfüllung aller Verpflichtungen gemessene kumulierte Liquiditätswirkung, die nach Erfüllung der Verpflichtungen mit der Wirkung auf das Eigenkapital übereinstimmt.

Zu (iv): Die interne Finanzierung ermöglicht dem Unternehmen die Nutzung des Versorgungskapitals für Investitionen und erübrigt insoweit die Nutzung von anderweitigem Eigen- oder Fremdkapital. Ein daraus resultierender Effekt ist umso positiver, je höher der Preis für das anderweitige Kapital ist. Innenfinanzierung lohnt sich demach umso mehr, je nachhaltiger und teuerer der Kapitalbedarf des Unternehmens ist.

Fehlt es an nachhaltigem Kapitalbedarf oder ist dieser zu günstigen Konditionen (insbesondere unterhalb der Rendite externer Versorgungsträger) zu stillen, dann erweist sich die externe Finanzierung als vorteilhafter.