Bericht zur Prüfung im Oktober 2006

über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 25. bis 27. September 2006 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Am 21.10.2006 bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. Dieser Prüfung unterzogen sich 55 Teilnehmer, wovon 45 mit Erfolg bestanden haben. Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen vom Berichterstatter, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 von Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks. Insgesamt sollten mindestens 70 Punkte von 145 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 konnten maximal 40 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 35, in Aufgabe 3 maximal 30 und in Aufgabe 4 maximal 40 Punkte erreicht werden. In den Aufgaben 1, 2 und 3 wurden jeweils die Höchstwerte erreicht, in Aufgabe 4 maximal 35 Punkte.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Wir betrachten aus einer Aktivengesamtheit einen x-jährigen Aktiven. Wir stellen uns vor, dass in Zukunft bezüglich dieses Aktiven zwei Ereignisse eintreten werden, nämlich Invalidität und Tod. Die stetigen Zufallsgrößen $X_1, X_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mögen die Alter bei Eintritt der Invalidität bzw. des Todes beschreiben.

1. Erläutern Sie in Worten die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P\{X_1 \leq x+1 \leq X_2 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}$$

und

$$P\{X_1 \leq X_2 \leq x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}.$$

Wie lauten ihre versicherungsmathematischen Notationen?

2. Seien zwei ganzzahlige Zufallsgrößen definiert gemäß $M := [X_1] - x$, $N := [X_2] - x$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser beiden Zufallsgrößen ($a \in I\!R$, $[a] := c \in \mathbb{Z} : c \leq a,\, c+1 > a$).

3. Sei $B = v^{M+1}\, \mathrm{a}_{\overline{N-M|}}\, 1_{\{N>M\}}$ der Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung. Um welche Art von Verpflichtung handelt es sich? Bitte genau charakterisieren!

4. Stellen Sie Erwartungswert $\mathcal{E}B$, 2. Moment $\mathcal{E}(B^2)$ und $var(B)$ vermittels der Wahrscheinlichkeiten $P\{M = m, N = n\}$, $m, n = 0, 1, ...,$ dar.

5. Zeigen Sie, dass für $n > m$ und $P\{M = m, N > m\} > 0$ gilt:
$$P\{M = m, N = n\} = P\{N = n \,|\, M = m, N > m\} P\{M = m, N > m\}$$

6. Zeigen Sie, dass für $m \geq 0$ gilt:
$$P\{M = m, N > m\} = {}_m p_x^a\, p_{x+m}^{ai}$$

7. Zeigen Sie, dass für $n > m$ und $P\{M = m, N > m\} > 0$ gilt:
$$P\{N = n \,|\, M = m, N > m\} = {}_{n-m-1}p_{x+m+1}^i\; q_{x+n}^i$$

   Beachten Sie dabei, dass die Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten der Invalidengesamtheit unabhängig vom Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität sind.

8. Zeigen Sie, dass sich B gemäß $B = \frac{1}{d}\left[v^{M+1} - v^{N+1}\right] 1_{\{N>M\}}$ darstellen lässt.

9. Berechnen Sie $\mathcal{E}B$ aus der Darstellung von B gemäß 8. und drücken Sie das Ergebnis in versicherungsmathematischer Notation aus.

10. Zeigen sie durch Umformung des Ergebnisses gemäß 9., dass gilt:
$$\mathcal{E}B = \mathrm{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{z-x-1} v^{k+1}\, {}_k p_x^a\, p_{x+k}^{ai}\, \mathrm{a}_{x+k+1}^i$$

    mit z : Pensionsalter.

    Hinweis: Denken Sie an den Zusammenhang zwischen einer lebenslänglich laufenden Rente und einer lebenslänglichen Todesfallversicherung bei einer einfachen Ordnung!

Lösung:

1. $p_x^{ai} = P\{X_1 \leq x + 1 < X_2 \,|\, X_1 > x, X_2 > X\}$ = Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, im Altersintervall $]x, x+1]$ wegen Invalidität aus dem Aktivenbestand auszuscheiden und das Alter $x+1$ im Invalidenbestand zu erreichen.

$q_x^{ai} = P\{X_1 \leq X_2 \leq x+1 \,|\, X_1 > x, X_2 > X\}$ = Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, im Altersintervall $]x, x+1]$ wegen Invalidität aus dem Aktivenbestand auszuscheiden und noch im gleichen Jahr - als Invalider - zu sterben.

Bem.: $p_x^{ai} + q_x^{ai} = i_x$

2. M ist die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt der Invalidität, N die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Todes.

3. B stellt den Erfüllungsbetrag einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrag 1 dar.

   Bem.: Sein Erwartungswert lautet in versicherungsmathematischer Notation a_x^{ai}.

4. Seien $b_{mn}, m, n \geq 0$ die Realisierungen von B:

$$\begin{aligned} b_{mn} &= v^{m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|}\ \text{ f. }\ n > m \\ &= 0\ \text{ f. }\ n \leq m \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} b_{mn}\ \ P\{B = b_{mn}\} \\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|}\ P\{M = m, N = n\} \\ \mathcal{E}(B^2) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} \left(v^{m+1}\ \mathrm{a}_{\overline{n-m}|}\right)^2\ P\{M = m, N = n\} \\ var(B) &= \mathcal{E}(B^2) - (\mathcal{E}B)^2\ \ \text{(Verschiebungssatz)} \end{aligned}$$

5. Für $n > m$ und $P\{M = m, N > n\} > 0$ gilt, da $\{N = n\} \subset \{N > m\}$:

$$\begin{aligned} P\{M = m, N = n\} &= P\{M = m, N = n, N > m\} \\ &= P\{N = n \,|\, M = m, N > m\}\, P\{M = m, N > m\} \end{aligned}$$

6. Für $m \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} {}_mp_x^a &= P\{X_1 > x+m, X_2 > x+m \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \ = \ P\{M \geq m, N \geq m\} \\ p_{x+m}^{ai} &= P\{X_1 \leq x+m+1 < X_2 \,|\, X_1 > x+m, X_2 > x+m\}\ \ \text{ lt. 1} \\ &= P\{M = m, N > m \,|\, M \geq m, N \geq m\} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$${}_mp_x^a\ p_{x+m}^{ai} = P\{M = m, N > m, M \geq m, N \geq m\} = P\{M = m, N > m\}$$

da

$$\{M = m\} \subset \{M \geq m\} \quad \text{und} \quad \{N > m\} \subset \{N \geq m\}$$

7. Für $n > m$ und $P\{M = m, N > m\} > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
P\{N = n \,|\, M = m, N > m\} &= P\{x{+}n < X_2 \le x{+}n{+}1 \,|\, x{+}m < X_1 \le x{+}m{+}1, X_2 > x{+}m{+}1\} \\
&= P\{X_2 > x+n, X_2 \le x+n+1 \,|\, X_1 > x+m, X_1 \le x+m+1, X_2 > x+m+1\} \\
&= P\{X_2 \le x+n+1 \,|\, X_2 > x+n, X_1 > x+m, X_1 \le x+m+1, X_2 > x+m+1\} \\
&\quad \underbrace{P\{X_2 > x+n \,|\, X_1 > x+m, X_1 \le x+m+1, X_2 > x+m+1\}}_{P\{X_2 > x+n \,|\, X_1 \le x+m+1, X_2 > x+m+1\}\ ^1}
\end{aligned}$$

Zudem ist wegen $\{X_2 > x+n\} \subset \{X_2 > x+m+1\}$

$$\begin{aligned}
&P\{X_2 \le x+n+1 \,|\, X_2 > x+n, X_1 > x+m, X_1 \le x+m+1, X_2 > x+m+1\} \\
&\qquad = P\{X_2 \le x+n+1 \,|\, X_1 \le x+n, X_2 > x+n\}\ ^1
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$P\{N = n \,|\, M = m, N > m\} = {}_{n-m-1}p^i_{x+m+1}\; q^i_{x+n}$$

8. Mit $d = 1 - v$ gilt:

$$\begin{aligned}
B &= v^{M+1}\, a_{\overline{N-M}|}\, 1_{\{N>M\}} \\
&= v^{M+1} \sum_{k=0}^{N-M-1} v^k\, 1_{\{N>M\}} \\
&= v^{M+1}\, \frac{1 - v^{N-M}}{1-v}\, 1_{\{N>M\}} \\
&= \frac{1}{d} \left[v^{M+1} - v^{N+1}\right] 1_{\{N>M\}}
\end{aligned}$$

9. Gemäß 8. gilt:

$$\mathcal{E}B = \frac{1}{d}\left[\mathcal{E}\left(v^{M+1}\, 1_{\{N>M\}}\right) - \mathcal{E}\left(v^{N+1}\, 1_{\{N>M\}}\right)\right]$$

1. Term:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(v^{M+1}\, 1_{\{N>M\}}\right) &= \sum_{m\ge 0} \sum_{n>m} v^{m+1}\, P\{M = m, N = n\} \\
&= \sum_{m\ge 0} v^{m+1} \sum_{n>m} P\{M = m, N = n\} \\
&= \sum_{m\ge 0} v^{m+1}\, P\{M = m, N > m\} \\
&= \sum_{m=0}^{z-x-1} v^{m+1}\; {}_m p^a_x\; p^{ai}_{x+m} \qquad \text{nach 6.}
\end{aligned}$$

[1] Unter Beachtung des Sachverhalts, dass die Ausscheidewahrscheinlichkeiten des Invalidenbestands unabhängig vom Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität sind.

mit z: Pensionsalter

2. Term:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\big(v^{N+1}\, 1_{\{N>M\}}\big) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{n+1}\, P\{M=m, N=n\} \\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n>m} v^{n+1}\, P\{N=n \,|\, M=m, N>m\}\, P\{M=m, N>m\} \\
&= \sum_{m=0}^{z-x-1} v^{m+1}\ {}_m p_x^a\ p_{x+m}^{ai} \sum_{n>m} v^{n-m}\ {}_{n-m-1}p_{x+m+1}^i\ q_{x+n}^i
\end{aligned}
$$

Nun:

$$
\sum_{n\geq m+1} v^{n-m}\ {}_{n-m-1}p_{x+m+1}^i\ q_{x+n}^i = \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_k p_{x+m+1}^i\ q_{x+m+1+k}^i = A_{x+m+1}^i
$$

(Einmalprämie einer lebenslänglichen Todesfallversicherung eines Invaliden des Alters $x+m+1$ in Höhe von 1, zahlbar zum Ende des Jahres des Todes).

$\Longrightarrow$

$$
\mathcal{E}\big(v^{N+1}\, 1_{\{N>M\}}\big) = \sum_{m=0}^{z-x-1} v^{m+1}\ {}_m p_x^a\ p_{x+m}^{ai}\ A_{x+m+1}^i
$$

$\Longrightarrow$

$$
\mathcal{E}B = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{z-x-1} v^{m+1}\ {}_m p_x^a\ p_{x+m}^{ai}\ (1 - A_{x+m+1}^i)
$$

10. Bei einer einfachen Ordnung gilt:

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_k p_x\, q_{x+k} \\
&= \sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_k p_x\, (1 - p_{x+k}) \\
&= v\sum_{k\geq 0} v^k\ {}_k p_x - \underbrace{\sum_{k\geq 0} v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x}_{\sum_{k\geq 1} v^k\ {}_k p_x = \sum_{k\geq 0} v^k\ {}_k p_x - 1} \\
&= v\, \mathrm{a}_x - \mathrm{a}_x + 1 \\
&= 1 - d\, \mathrm{a}_x
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\frac{1}{d}(1 - A_{x+m+1}^i) = \mathrm{a}_{x+m+1}^i
$$

woraus nach 9. folgt:

$$\mathcal{E}B = \sum_{m=0}^{z-x-1} v^{m+1}\ {}_mp_x^a\ p_{x+m}^{ai}\ \mathrm{a}_{x+m+1}^i$$

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Ein Unternehmen möchte eine betriebliche Altersversorgung einrichten und zieht Sie hierzu zur Beratung heran. Dem Unternehmen schwebt hinsichtlich des Invaliditätsrisikos eine möglichst risikolose Zusage vor. Sie schlagen folgende Zusage vor: Eine nach Dienstjahren gestaffelte Altersrente von jährlich R_n einschließlich einer Anwartschaft auf eine Ehegattenrente von jährlich wR_n ($w \in I\!R_+$), bei Aktiventod ebenfalls eine nach Dienstjahren gestaffelte Ehegattenrente von jährlich R_m, $m = 0, 1, ..., n-1$ (x : Eintrittsalter eines Berechtigten; z : Pensionsalter; $n := z - x$) sowie, dass im Fall der Invalidität unter Einschluss einer kollektiv zu bewertenden Ehegattenrente der erreichte Teilwert verrentet wird. Sie weisen allerdings auch darauf hin, dass dadurch im Falle der Invalidität in den jüngeren Jahren nur eine sehr geringe Invaliditätsversorgung gewährleistet ist. Nach längerer Diskussion sieht die Zusage die oben diskutierte Alters- und Ehegattenversorgung bei Aktiventod vor, und im Falle der Invalidität, dass zum Zeitpunkt der Invalidität der Teilwert des Aktiven zum Ende des Jahres, diskontiert auf den Zeitpunkt der Invalidität, multipliziert mit einem Faktor, c_m, m: Anzahl der vollendeten Dienstjahre, verrentet wird, um eben mit $c_m > 1$ in jüngeren Jahren eine bessere Versorgung im Invaliditätsfall bei gleichzeitiger Begrenzung des durch Invalidität verursachten Bilanzsprungs erreichen zu können. – Sie sind aufgefordert, ein Gutachten über die Teilwerte der Zusage nach § 6a EStG zu erstellen.

1. Geben Sie die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen für diese Zusage an. Geben Sie dabei das Prämienprofil ${}_mf_x, m = 0, 1, ..., n$ nach den Vorschriften des § 6a EStG an, und setzen Sie ${}_0V_x = 0$. Geben Sie ${}_m\hat{L}_x$, $m = 0, 1, ..., n$, explizit an.

2. Stellen Sie das versicherungsmathematische Bilanzgleichungssystem der Zusage in der Form $PV = L' + FV$ dar; geben Sie die Komponenten von L' an und zeigen Sie, dass F gemäß

$$F = \begin{pmatrix} 0 & vi_xc_0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & vi_{x+1}c_1 & & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & & vi_{x+n-1}c_{n-1} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

den gestellten Anforderungen genügt.

3. Zeigen Sie, dass Sie mit geeigneter Notation den gesuchten Reservevektor V des Gleichungssystems $PV = L' + FV$ in der gleichen Weise erhalten, wie es in dem Ihnen vorliegenden Buch „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen“ in Abschnitt 4.2 für das versicherungsmathematische Gleichungssystem $PV = L$ bei explizit vorgegebenen Leistungen dargestellt ist. Geben Sie entsprechend P_0 und A an.

4. Wie erhalten Sie zum Zwecke der Bewertung von unverfallbaren Anwartschaften der Zusage den Barwertvekor B aus dem zuvor von Ihnen berechneten Reservevektor V?

Lösung:

1. Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen:

$$_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + vp_{x+m}\ {}_{m+1}V_x\,, \quad m = 0, 1, ..., n-1$$

mit $\quad {}_m\hat{P}_x = {}_mf_x\, P_x$

und $\quad {}_mf_x = 1 \quad$ f. $\quad m = 0, 1, ..., n-1$

sowie

$$\begin{aligned} {}_m\hat{L}_x &= v\, i_{x+m}\, c_m\ {}_{m+1}V_x + \underbrace{R_m\, v^{\frac{1}{2}}\ q^{aa}_{x+m}\ h_{x+m}\ \mathrm{a}^{w}_{y(x+m)+\frac{1}{2}}}_{=:\ R_m\, d_m} \\ &= v\, i_{x+m}\, c_m\ {}_{m+1}V_x + R_m\, d_m \quad \text{f.} \quad m < n \\ &= R_n(\mathrm{a}^r_z + w\, \mathrm{a}^{rw}_z) \quad \text{f.} \quad m = n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} {}_m\hat{L}_x + v\, p_{x+m}\ {}_{m+1}V_x &= R_m\, d_m + v\, i_{x+m}\, c_m\ {}_{m+1}V_x + v(1 - i_{x+m} - q^{aa}_{x+m})\ {}_{m+1}V_x \\ &= R_m\, d_m + v\, p'_{x+m} \end{aligned}$$

mit $\quad p'_{x+m} = 1 - (1 - c_m)\, i_{x+m} - q^{aa}_{x+m}$

2. Das versicherungsmathematische Gleichungssystem der Zusage lautet:

$$
\begin{array}{llllll}
P_x - vp_x\ {}_1V_x & & & & = & R_0\, d_0 + vi_x\, c_0\, {}_1V_x \\
P_x & +{}_1V_x - vp_{x+1}\ {}_2V_x & & & = & R_1\, d_1 + vi_{x+1}\, c_1\, {}_2V_x \\
\vdots & & & & & \vdots \\
P_x & & +{}_mV_x - vp_{x+m}\ {}_{m+1}V_x & & = & R_m\, d_m + vi_{x+m}\, c_m\, {}_{m+1}V_x \\
\vdots & & & & & \vdots \\
P_x & & & +{}_{n-1}V_x - vp_{x+n-1}\ {}_nV_x & = & R_{n-1}\, d_{n-1} + vi_{x+n-1}\, c_{n-1}\, {}_nV_x \\
 & & & {}_nV_x & = & R_n\,(\mathrm{a}_z^r + w\mathrm{a}_z^{rw})
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad PV = L' + FV$$

mit

$$
V = \begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} {}_0L_x \\ {}_1L_x \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_nL_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0\, d_0 + v\, i_x\, c_0\ {}_1V_x \\ R_1\, d_1 + v\, i_{x+1}\, c_1\ {}_2V_x \\ \vdots \\ R_{n-1}\, d_{n-1} + v\, i_{x+n-1}\, c_{n-1}\ {}_nV_x \\ R_n\,(\mathrm{a}_z^r + w\, \mathrm{a}_z^{rw}) \end{pmatrix} = L' + FV
$$

mit

$$
L' = \begin{pmatrix} R_0\, d_0 \\ R_1\, d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{n-1}\, d_{n-1} \\ R_n\,(\mathrm{a}_z^r + w\, \mathrm{a}_z^{rw}) \end{pmatrix}, \quad FV = \begin{pmatrix} v\, i_x\, c_0\ {}_1V_x \\ v\, i_{x+1}\ c_1\ {}_2V_x \\ v\, i_{x+m}\, c_m\ {}_{m+1}V_x \\ \vdots \\ v\, i_{x+m-1}\, c_{n-1}\ {}_nV_x \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Offenbar gilt:

$$
\begin{pmatrix} 0 & v\, i_x c_0 & & & & \\ & & v\, i_{x+1}\, c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & & v\, i_{x+n-1} c_{n-1} \\ & & 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ {}_1V_x \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ {}_nV_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\, i_x\, c_0\ {}_1V_x \\ v\, i_{x+1}\ c_1\ {}_2V_x \\ \vdots \\ \vdots \\ v\, i_{x+n-1}\, c_{n-1}\ {}_nV_x \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Das angegebene F erfüllt also die gestellten Anforderungen.

3. $PV = L' + FV$

$\Longrightarrow \quad (P - F)V = L'$

mit

$$P-F=P^{'}=\begin{pmatrix} 1 & -vp^{'}_x & & & & \\ 1 & 1 & -vp^{'}_{x+1} & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & -vp^{'}_{x+m} & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & \ddots & -vp^{'}_{x+n-1} \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} -v\,p^{'}_{x+m} &= -v\,p_{x+m}-v\,i_{x+m}\,c_m = v\,(1-i_{x+m}-q^{aa}_{x+m})-v\,i_{x+m}\,c_m \\ &= v+v\,i_{x+m}\,(1-c_m)+v\,q^{aa}_{x+m} \\ \Rightarrow p^{'}_{x+m} &= 1-i_{x+m}\,(1-c_m)-q^{aa}_{x+m} \end{aligned}$$

P' hat den gleichen Aufbau wie P. Deshalb Ansatz:

$P' = P'_0\,A'$ mit P'_0 : obere Dreiecksmatrix, A' : untere Dreiecksmatrix

Damit:

$$P'_0=\begin{pmatrix} 1 & -vp^{'}_x & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & -vp^{'}_{x+n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$P'_0\,B' = L' \;\Rightarrow\; B'$ bekannt

$P'_0\,\mathrm{a} = f \;\Rightarrow\;$ a bekannt; somit:

$$A'=\left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathrm{a}^{'} & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Hieraus folgt:

$$P'_0\,A'=\left(\begin{array}{c|ccccc} & -v\,p^{'}_x & & & & \\ & 1 & -v\,p^{'}_{x+1} & & & \\ P'_0\,\mathrm{a} & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & -vp^{'}_{x+n-1} \\ & & & & & 1 \end{array}\right)=P'$$

V gemäß $A'V = B' \quad \Rightarrow V$ bekannt

Beweis, dass V Lösung:

$$P'\,V = P'_0\,A'\,V = P'_0\,B = L'$$

4. Der in 3. errechnete Barwert B' stellt nicht den Barwert der Verpflichtung dar. Dieser Barwert B ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$PV = P_0 AV = L' + FV$$

und hieraus

$$B = AV$$

oder in Komponenten:

$$\begin{aligned} {}_mB_x &= {}_mV_x + P_x\,\mathrm{a}^a_{x+m},\ m = 0, 1, ..., n \\ \text{mit}\quad \mathrm{a}^a_x &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_kp^a_x \\ \text{und}\quad p^a_x &= 1 - i_x - q^{aa}_x \end{aligned}$$

Klausur PM Spezialwissen 2006

Aufgabe 3

Der Verein „Hast Du schon gehört?“ e.V. beschäftigt sich intensiv mit der Erfindung, Erweiterung und Verbreitung von Gerüchten. Zur Deckung der nicht unerheblichen Auslagen des Vorstandes und des E-Mail Services „Neueste Gerüchte“ des Vereins wird von den Mitgliedern ein jährlich am 1. Januar vorschüssig zahlbarer Beitrag von 100 Euro erhoben. Die Beitragspflicht endet bei Beendigung der Mitgliedschaft, spätestens jedoch nach 10 Mitgliedsjahren. Die Mitgliedschaft ist lebenslänglich, kann jedoch jederzeit durch das Mitglied für beendet erklärt werden. Wer über den Verein Gerüchte verbreitet, wird unverzüglich aus dem Verein ausgeschlossen. Das Ende der Mitgliedschaft tritt erfahrungsgemäß unabhängig vom Alter, Geschlecht, politischer Gesinnung und der Vereinszugehörigkeitsdauer des Mitgliedes ein. Mit dem Vereinsvermögen kann eine Verzinsung von 2,0 % p.a. erzielt werden.

In den letzten fünf Kalenderjahren nahm der Mitgliederbestand folgende Entwicklung:

2001		2002		2003		2004		2005	
1.1.	120	1.1.	111	1.1.	117	1.1.	132	1.1.	147
13.1.	-5	20.2.	+20	1.7.	-15	1.2.	+5	11.11.	+10
25.3.	+8	1.7.	-8	1.8.	+30	30.3.	-3	13.11.	-8
16.6.	-10	15.12	-6			23.11.	-2	1.12.	+10
17.7	+1					6.12.	+15		
25.9.	-3								
31.12.	111	31.12.	117	31.12.	132	31.12.	147	31.12.	159

Der Vereinsvorsitzende bittet Sie um aktuarielle Unterstützung bei der Beantwortung folgender Fragen:

1. Wie hoch setzt man vernünftigerweise die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Mitglied den Verein verlässt?

2. Wie wird sich die Anzahl der Mitglieder in den kommenden fünf Jahren voraussichtlich entwickeln?

3. Wie hoch ist der Barwert der künftigen Beiträge für ein Mitglied, das sich am 1. Juli 2006 bereits mitten im siebten Jahr der Mitgliedschaft befindet?

<u>Lösungen</u>

zu 1. Zum Ansatz einer Wahrscheinlichkeit für das Verlassen des Vereins werden zunächst die Ausscheidehäufigkeiten aus dem vorliegenden Material ausgewertet. Hierbei ergibt sich folgendes:

$q^{2001}=1-(1-5/120)*(1-10/123)*(1-3/114) = 1-115/120*113/123*111/114=0,142749$

$q^{2002}=1-(1-8/131)*(1-6/123)=1-123/131*117/123=0,1068704$

$q^{2003}=1-(1-15/117)=1-102/117=0,1282052$

q^{2004}=1-(1-3/137)*(1-2/134)=1-134/137*132/134=0,0364965

q^{2005}=1-(1-8/157)=1-149/157=0,0509555

Die durchschnittliche Ausscheidehäufigkeit betrug 9,30553 % p.a. Ein Trend lässt sich nicht zuverlässig erkennen. Die Ausscheidewahrscheinlichkeit könnte beispielsweise auf einen Wert zwischen 9 % und 10 % p.a. festgesetzt werden.

zu 2. Vor dem Hintergrund der Erfahrungen der letzten Jahre wird ein jährlicher Zugang von 20 Personen unterstellt. Bei einer Ausscheidewahrscheinlichkeit von 10 % ergibt sich folgende Entwicklung:

2006 (159+20)*0,9=161
2007 (161+20)*0,9=163
2008 (163+20)*0,9=165
2009 (165+20)*0,9=167
2010 (167+20)*0,9=168

zu 3. Das Mitglied hat noch drei Beiträge zu zahlen und zwar in ½, 1 ½, und 2 ½ Jahren. Der Barwert beträgt bei Zins 2 % und einer Ausscheidewahrscheinlichkeit von 10 % p.a.

$100\,€ * [(0{,}9*v)^{0{,}5}+(0{,}9*v)^{1{,}5}+(0{,}9*v)^{2{,}5}]$
$=100\,€ * [0{,}9393364+0{,}8288261+0{,}731317]=$ **249,95 €**

Aufgabe 4

Die Firma „Blumenreich und Trost GmbH“, eine überregional tätige Friedhofsgärtnerei mit Steinmetz- und Bestattungsservice, möchte eine unmittelbare Pensionszusage für ihre 350 Arbeitnehmer (Jahreslohnsumme 6,5 Mio. €) einführen. Es handelt sich um einen dienstzeitabhängigen Leistungsplan, der bei Erwerbsminderung und Alter Rentenleistungen in Höhe von 0,25 % des Lohnes pro Dienstjahr vorsieht. Die Hinterbliebenen erhalten 60 % der Rente des Arbeitnehmers. Der junge Controller des Unternehmens (Enkel des Firmengründers) belästigt Sie mit folgenden Fragestellungen:

1. Welche Methode und welche Prämissen empfehlen Sie uns für den Ausweis der Pensionsverpflichtungen in unserer Handelsbilanz?

2. Wie sollten wir methodisch unsere Pensionszusage bei der Kalkulation unserer Preisangebote für Grabpflege in Ansatz bringen?

3. Wie hoch schätzen Sie die jährlichen Kosten unserer Pensionszusage?

4. Welche Größenordnung wird unserer Pensionsrückstellung im Laufe der Zeit erreichen, wenn unser Personalbestand sich auf heutigem Niveau stabilisiert?

5. Unter welchen Bedingungen halten Sie das Vorhaben meiner Geschäftsführung, die Pensionszusage einzuführen, betriebswirtschaftlich für richtig?

<u>Lösung</u>

zu 1. Es kommt darauf an, den durch die Pensionszusagen verursachten Aufwand verursachungsgerecht auf die Zeiträume zu verteilen, in denen die Gegenleistung durch den begünstigten Arbeitnehmer erbracht wird. Darüber hinaus sind das Vorsichtsprinzip und das Imparitätsprinzip zu beachten.

Bei der hier vorgesehenen Leistungszusage erfüllt das Teilwertverfahren, das eine Gleichverteilung des Aufwandes aus der Pensionszusage über die aktive Dienstzeit bewirkt, die handelsrechtlichen Anforderungen. Dafür spricht im Übrigen, dass auch für steuerliche Zwecke auf das Teilwertverfahren gemäß § 6a EStG abgestellt wird.

Die Prämissen umfassen die biometrischen Rechnungsgrundlagen einschließlich Altersgrenze und Fluktuationsannahmen, die Annahmen über die künftige dynamische Entwicklung der Anwartschaften und Renten, der Rechnungszins und ggf. die Berücksichtigung zwingend anfallender Nebenkosten.

Hinsichtlich der biometrischen Rechnungsgrundlagen kann auf allgemein anerkannte Rechnungsgrundlagen wie die RICHTTAFELN 2005 G von Klaus Heubeck zurückgegriffen werden. Sofern ausnahmsweise spezifische Kenntnisse über das Risikoverhalten des zu bewertenden Bestandes vorliegen, kommt ggf. eine Modifikation der Tafeln in Betracht; dies wird bei einer neu erteilten Pensionszusage eher nicht der Fall sein. An die Stelle expliziter Annahmen über Fluktuationswahrscheinlichkeiten kann das auch für die steuerliche Bewertung maßgebende Verfahren der Definition eines Mindestalters für den Finanzierungsbeginn treten. Die Altersgrenze kann mit Blick auf die in der gesetzlichen Rentenversicherung in Frage kommenden Altersgrenzen festgesetzt werden.

Soweit das Unternehmen sich bestimmten Anpassungsverpflichtungen nicht entziehen kann, sind diese mit einem angemessen vorsichtigen Schätzwert in Ansatz zu bringen. Der Rechnungszins könnte an den Renditen risikoarmer Kapitalanlagen mit Anlagehorizonten, die den Verpflichtungen entsprechen, orientiert werden.

Sachgerecht wäre im Übrigen die Einbeziehung der zumindest in der Rentenlaufzeit anfallenden Kosten für Administration und Insolvenzsicherung.

zu 2: Entsprechend der für die Kostenrechnung geforderten Korrespondenz zwischen Leistung (Arbeitsleistung des Berechtigten) und Gegenleistung (Lohn und Versorgungsleistung des Unternehmens) bietet sich eine mit realistischen Prämissen ermittelte versicherungstechnische Bruttoprämie als Methode zur Ermittlung der Kosten der Pensionszusage an.

zu 3: Nach einer Faustformel belaufen sich die Kosten eines Endgehaltsplanes bei 3 % Realzins auf etwa 1 % der Entgelte für ein Rentensystem mit einer jährlichen Rentensteigerung um je 0,1 % des letzten Entgeltes. Dies führt bei der hier vorgesehenen Rentensteigerung von 0,25 % pro Dienstjahr zu einem geschätzten Kostensatz von 2,5 %. Aus Vorsichtsgründung und mit Blick auf einen möglicherweise geringeren Realzins kommt ein Ansatz von rd. 3,0 % der Entgelte in Betracht.

zu 4: Die nach steuerlichen Grundsätzen ermittelte Pensionsrückstellung würde bei stabilen Bestandsverhältnissen bis auf rd. 100 % der Entgeltsumme ansteigen. Je nach Auswahl der Prämissen für die handelsrechtliche Bewertung kann der Wert für die handelsrechtliche Pensionsrückstellung durchaus 150 % der Entgeltsumme erreichen.

zu 5: Die Frage läuft darauf hinaus, ob die Erteilung einer Pensionszusage effizienter ist als die ansonsten notwendigen Leistungen an die Berechtigten, um eine identische Gegenleistung erwarten zu können. Für die Pensionszusage spricht deren lohnsteuerliche Förderung. Diese lohnsteuerliche Förderung macht die Versorgungszusage für den Berechtig deutlich wertvoller als ein vergleichbarer Barlohnzuschlag. In eine ähnliche Richtung geht die Beobachtung, dass der über die betriebliche Altersversorgung dem Begünstigten gut gebrachte Zins in der Regel die Renditen von privaten Anlagen des Arbeitnehmers übersteigt, so dass für den vorsorgewilligen Arbeitnehmer die Versorgungszusage auch deshalb einem entsprechenden Lohnzuschlag überlegen ist. Ebenfalls für eine Pensionszusage spricht ein dauerhaft im Unternehmender zu unterstellender Kapitalbedarf. Hier könnten die für die Erfüllung der Pensionszusage erforderlichen Mittel in der Zeit vom Empfang der Gegenleistung durch den Arbeitnehmer bis zur Auszahlung der Rente im Unternehmen verbleiben und insoweit die Aufnahme von Fremdmitteln entbehrlich machen.