Bericht zur Prüfung im Oktober 2005 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 26. bis 28. September 2005 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Am 22.10.2005 bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. Dieser Prüfung unterzogen sich 53 Teilnehmer, wovon 42 mit Erfolg bestanden haben. Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen vom Berichterstatter, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 von Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks. Insgesamt sollten mindestens 67 Punkte von 150 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 konnten maximal 40 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 40, in Aufgabe 3 maximal 40 und in Aufgabe 4 maximal 30 Punkte erreicht werden. In den Aufgaben 1, 3 und 4 wurden jeweils die erreichbaren Höchstpunkte erreicht, in Aufgabe 2 maximal 39 Punkte.

1. Aufgabe (40 Punkte)

Bedeute auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

M: Restliche vollendete Jahre eines x-jährigen Mannes,

H: $\Omega \to \{0,1\}$ eine Zufallsgröße mit der Bedeutung

$H = 1$, falls der Mann bei seinem Tod verheiratet ist, also eine Witwe hinterlässt,
$H = 0$ sonst.

N: Restliche vollendete Jahre der – zu Beginn des Jahres des Todes des Mannes – $y(x+M)$–jährigen Witwe,

sowie

$B = v^{M+1}\, H\, \mathrm{a}_{\overline{N|}}$ der Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung.

a) Um welche Art von Verpflichtung handelt es sich bei B? Bitte u.a. unter Hinweis auf die Zahlungsweise genau charakterisieren!

b) Stellen Sie den Erwartungswert $\mathcal{E}B$ vermittels der Wahrscheinlichkeiten

$P\{M = m, H = k, N = n\}$, $k = 0,1$; $m,n = 0,1,...$ sowie unter Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $h_{x+m} = P\{H = 1|M = m\}$ dar. Dabei setzen wir $P\{H = k, N = n|M = m\} = P\{H = k|M = m\}\, P\{N = n|M = m\}$, $k = 0,1$; $m,n = 0,1,...$ voraus.

c) Sei q_x^M die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes. Drücken Sie für $m \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit $P\{M = m\}$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_x^M und daraus abgeleiteter Wahrscheinlichkeiten aus.

d) Sei q_y^W die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der y-jährigen Witwe. Drücken Sie für $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeiten $P\{N = n | M = m\}$ und $P\{N \geq n + 1 | M = m\}$ versicherungsmathematisch mit Hilfe der q_y^W bzw. daraus abgeleiteter Wahrscheinlichkeiten aus.

Bem.: Beachten Sie, dass nach dem Richttafelmodell gilt:

$$P\{N = 0 | M = m\} = {}_{\frac{1}{2}}q^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}$$

e) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{E}B = \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \, {}_m p_x^M \, q^M_{x+m} \; h_{x+m} \; {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \; \mathrm{a}^W_{y(x+m)+1}$$

f) Was bedeutet das Ereignis $\{B = 0\}$? Berechnen Sie $P\{B = 0\}$ und drücken Sie diese Wahrscheinlichkeit versicherungsmathematisch mit Hilfe der oben angeführten Wahrscheinlichkeiten bzw. daraus abgeleiteter Wahrscheinlichkeiten aus.

Lösung:

Zu a)

Anwartschaft eines x-jährigen Mannes auf eine – generell zugesagte – Witwenrente, zahlbar jährlich zum Beginn eines Jahres, erstmalig zum Beginn des Jahres, das dem Todesjahr des Mannes folgt, falls die Witwe diesen Zeitpunkt erlebt, letztmalig zum Beginn des Todesjahres der Witwe.

Zu b)

Seien

$$\begin{aligned} b_{mnk} &= 0 && \text{für} \quad m \geq 0 \text{ und } (n = 0 \text{ oder } k = 0) \\ &= v^{m+1} \, \mathrm{a}_{\overline{n}|}, && \text{für} \quad m \geq 0, \; n \geq 1, \; k = 1 \end{aligned}$$

die Realisierungen von B.

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{1} b_{mnk} \, P\{M = m, H = k, N = n\} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} v^{m+1} \, \mathrm{a}_{\overline{n}|} \, \underbrace{P\{M = m, H = 1, N = n\}}_{\substack{P\{H = 1, N = n | M = m\} P\{M = n\} \\ P\{H = 1 | M = m\} P\{N = n | M = m\} P\{M = n\}}} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} v^{m+1} \, \mathrm{a}_{\overline{n}|} \, h_{x+m} \, P\{N = n | M = m\} P\{M = m\} \end{aligned}$$

Zu c)

$$\begin{aligned} P\{M = m\} &= P\{M < m + 1 | M \geq m\} P\{M \geq m\} \\ &= q^M_{x+m} \, {}_m p^M_x \end{aligned}$$

mit

$${}_m p_x^M = \prod_{j=0}^{m-1} p^M_{x+j}$$

und

$$p_{x+j}^M = 1 - q_{x+j}^M \,,\; j = 0, ..., m-1$$

Zu d)

$$P\{N = n|M = m\} \;=\; P\{N < n+1|M = m, N \geq n\}\, P\{N \geq n|M = m\} \tag{1}$$

Laut Aufgabe gilt

$$P\{N = 0|M = m\} \;=\; {}_{\frac{1}{2}}q^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}$$

und damit

$$P\{N \geq 1|M = m\} \;=\; {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}$$

Es folgt für $n \geq 1$ wegen $\{N \geq n\} \;=\; \{N \geq n, N \geq 1\}$:

$$\begin{aligned} P\{N \geq n|M = m\} &= P\{N \geq n|M = m, N \geq 1\}\, P\{N \geq 1|M = m\} \\ &= {}_{n-1}p^W_{y(x+m)+1} \quad {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \qquad (2) \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned} P\{N \geq n+1|M = m\} &= P\{N \geq n+1|M = m, N \geq 1\}\, P\{N \geq 1|M = m\} \\ &= {}_{n}p^W_{y(x+m)+1} \quad {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus (1) und (2) für $n \geq 1$:

$$P\{N = n|M = m\} = {}_{\frac{1}{2}}\, p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}} \;{}_{n-1}p^W_{y(x+m)+1}\; q^W_{y(x+m)+n}$$

Zu e)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}B &\overset{b)}{=} \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 1} v^{m+1}\, a_{\overline{n}|}\, h_{x+m}\, P\{N = n|M = m\}P\{M = m\} \\ &\overset{c)}{=} \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\, {}_mp_x^M\; q_{x+m}^M\, h_{x+m} \quad \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_{\overline{n}|}\, P\{N = n|M = m\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1} v^k\, P\{N = n|M = m\} \\ &\sum_{k\geq 0} v^k \sum_{n\geq k+1} P\{N = n|M = m\} \\ &\underbrace{\sum_{k\geq 0} v^k \quad \underbrace{P\{N \geq k+1|M = m\}}_{{}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\; {}_kp^W_{y(x+m)+1} \quad \text{lt. d)}}}_{{}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\; a^W_{y(x+m)+1}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m\geq 0} v^{m+1}\, {}_mp_x^M\; q_{x+m}^M\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\; a^W_{y(x+m)+1}$$

Zu f)
Bedeutung: Es wird keine Leistung fällig.
Dies geschieht in zwei Fällen:
1. Der Mann ist bei seinem Tod unverheiratet ($H = 0$);
2. Die Witwe stirbt im Jahr des Todes des Mannes($N = 0$).

$$\begin{aligned}\{B=0\} &= \{v^{M+1}\, H\, \mathrm{a}_{\overline{N}|} = 0\} \\ &= \{H\, N = 0\} \\ &= \{H=0\} \cup \{N=0\} \\ &= \{H=0\} \cup \{H=1, N=0\}, \quad \text{disj.}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$P\{B=0\} = P\{H=0\} + P\{H=1, N=0\}$$

1. Term:

$$\begin{aligned}P\{H=0\} &= \sum_{m\geq 0} P\{M=m, H=0\} \\ &= \sum_{m\geq 0} P\{H=0|M=m\}\, P\{M=m\} \\ &\overset{\text{b)}}{=} \sum_{m\geq 0} (1-h_{x+m})\, {}_mp_x^M\, q_{x+m}^M \\ &= 1 - \sum_{m\geq 0} {}_mp_x^M\, q_{x+m}^M\, h_{x+m}\end{aligned}$$

2. Term:

$$\begin{aligned}P\{H=1, N=0\} &= \sum_{m\geq 0} P\{M=m, H=1, N=0\} \\ &= \sum_{m\geq 0} P\{H=1, N=0|M=m\}\, P\{M=m\} \\ &\overset{\text{b)}}{=} \sum_{m\geq 0} P\{H=1|M=m\}\, P\{N=0|M=m\}\, P\{M=m\} \\ &= \sum_{m\geq 0} {}_mp_x^M\, q_{x+m}^M\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}q^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}P\{B=0\} &= 1 - \sum_{m\geq 0} {}_mp_x^M\, q_{x+m}^M\, h_{x+m} \left(1 - {}_{\frac{1}{2}}\, q^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 1 - \sum_{m\geq 0} {}_mp_x^M\, q_{x+m}^M\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^W_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

2. Aufgabe (40 Punkte)

Wir betrachten einen x-jährigen Mann aus einem Gesamtbestand nach dem Richttafelmodell – Aktivenbestand mit zwei vorzeitigen Ausscheideursachen „Invalidität“ und „Tod (als Aktiver)“ Invalidenbestand mit der einfachen Ausscheideursache „Tod“ sowie einem sich aus beiden Beständen zusammensetzenden Gesamtbestand, ebenfalls mit der einfachen Ausscheideursache „Tod“ – mit den Zufallsgrößen

X_1 : Alter bei Eintritt der Invalidität

X_2 : Alter bei Eintritt des Todes

X_1, X_2 seien stetig. z sei das Pensionsalter der Aktivengesamtheit, weiter sei $x < z$, $n := z - x$.

a) Sei $B_x = \sum_{k \geq 0} v^k \, P\{X_2 > x + k | X_2 > x\}$ ein Barwert. Beschreiben Sie diesen Barwert in Worten. Wie lautet er in RT-Notation?

b) Formen Sie B_x nach a) um in

$$\begin{aligned} B_x \quad = \quad & P\{X_1 \leq x | X_2 > x\} \sum_{k \geq 0} v^k \, P\{X_2 > x + k | X_1 \leq x, X_2 > x\} \\ & + P\{X_1 > x | X_2 > x\} \sum_{k \geq 0} v^k \, P\{X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

Drücken Sie die ersten drei Terme in Richttafelnotation aus, d. h. versicherungsmathematisch unter Verwendung der Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten der Richttafeln. Beschreiben Sie den letzten Term in Worten (Der Vereinfachung halber setzen Sie $q_x^g := q_x^i := q_x^r$ für $x \geq z$).

c) Interpretieren Sie für $u > z$

$$\{X_1 \leq z, X_2 > u\} \quad \text{und} \quad \{X_1 > z, X_2 > u\}$$

d) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} v^k \, P\{X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ = \quad & \sum_{k=0}^{n-1} v^k P\{X_1 > x + k, X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ & + \sum_{k \geq n} v^k P\{X_1 > z, X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ & + \sum_{k \geq 0} v^k \, P\{X_1 \leq min(z, x + k), \, X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

Drücken Sie die ersten beiden Terme in Richttafelnotation aus. Beschreiben Sie in Worten den dritten Term.

e) Beweisen Sie auf $\{X_1 > x\}$ für $k = 0, 1, ...$ die Beziehung

$$\{X_1 \leq min(z, x{+}k), X_2 > x{+}k\} = \bigcup_{j=0}^{min(n,k)-1} \{x{+}j < X_1 \leq x{+}j{+}1, X_2 > x{+}k\}, \text{disj.}$$

und damit

$$\begin{aligned} & P\{X_1 \leq min(z, x + k), X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ = \quad & \sum_{j=0}^{min(n,k)-1} P\{x + j < X_1 \leq x + j + 1, X_2 > x + k | X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

f) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} & P\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ = \;& {}_jp_x^a \, i_{x+j} \, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \, {}_{k-j-1}p^i_{x+j+1}, \quad j = 0, 1, ..., k-1, \; k = 0, 1..., n \end{aligned}$$

Hinweis: Nach dem Richttafelmodell gilt

$$\begin{aligned} & P\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+j+1 | X_1 > x+j, X_2 > x+j\} \\ = \;& i_{x+j} \, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, ..., n-1 \end{aligned}$$

g) Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_1 \le min(z, x+k), X_2 > x+k | X_1 > x, X_2 > x\} \\ = \;& \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x^a \, i_{x+k} \, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+k+\frac{1}{2}} \, \mathrm{a}^i_{x+k+1} = \mathrm{a}^{ai}_x \end{aligned}$$

h) Beweisen Sie unter Verwendung der bisher erhaltenen Ergebnisse die folgende Beziehung

$$B_x = \frac{l_x^a}{l_x^g} \left(\mathrm{a}_x^a + \mathrm{a}_x^{aiA}\right) + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \, \mathrm{a}_x^i$$

Lösung:

Zu a)

Barwert einer lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1 an einen x-jährigen Mann des Gesamtbestands.
In RT-Notation: $B_x = \mathrm{a}_x^g$

Zu b)

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_x^g &= \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_1 \le x, X_2 > x+k | X_2 > x\} + \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_1 > x, X_2 > x+k | X_2 > x\} \\ &= \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_2 > x+k \,|\, X_1 \le x, X_2 > x\} P\{X_1 \le x \,|\, X_2 > x\} \\ &\quad + \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_2 > x+k | X_1 > x, X_2 > x\} P\{X_1 > x | X_2 > x\} \\ &= P\{X_1 \le x \,|\, X_2 > x\} \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_2 > x+k \,|\, X_1 \le x, X_2 > x\} \\ &\quad + P\{X_1 > x \,|\, X_2 > x\} \sum_{k\ge0} v^k \, P\{X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \end{aligned}$$

1. Term:

$$P\{X_1 \le x | X_2 > x\} = 1 - P\{X_1 > x | X_2 > x\} = \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}$$

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes des Gesamtbestandes, invalide zu sein

2. Term:

$$\sum_{k\geq 0} v^k \, P\{X_2 > x+k | X_1 \leq x, X_2 > x\} = \mathrm{a}_x^i$$

da

$$P\{X_2 > x+k | X_1 \leq x, X_2 > x\} = {}_k p_x^i$$

3. Term:

$$P\{X_1 > x | X_2 > x\} = \frac{P\{X_1 > x, X_2 > x\}}{P\{X_2 > x\}} = \frac{l_x^a}{l_x^g}$$

Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes des Gesamtbestandes, aktiv zu sein

4. Term: Barwert einer lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1 an einen x-jährigen Aktiven, gleichgültig, ob er aktiv, Invalide oder Altersrentner ist.

Zu c)

$\{X_1 \leq z, X_2 > u\}$: Ereignis, im Alter u Invalidenrentner zu sein, d.h., bis zum Alter z Invalide geworden zu sein;

$\{X_1 > z, X_2 > u\}$: Ereignis, im Alter u Aktivenaltersrentner zu sein, d.h. das Alter z als Aktiver erreicht zu haben.

Zu d)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0} v^k \, P\{X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} v^k \, P\{X_1 > min(z, x+k), X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\qquad\quad + \sum_{k\geq 0} v^k \, P\{X_1 \leq min\,(z, x+k), X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, P\{X_1 > x+k, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} && (1) \\
&\qquad\quad + \sum_{k\geq n} v^k \, P\{X_1 > z, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} && (2) \\
&\qquad\quad + \sum_{k\geq 0} v^k \, P\{X_1 \leq min\,(z, x+k), X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} && (3)
\end{aligned}$$

Wegen $P\{X_1 > x+k, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} = {}_k p_x^a$ gilt:

$$(1) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x^a = \mathrm{a}_x^a$$

Für $k \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned}
&P\{X_1 > z, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\qquad = \; P\{X_1 > z, X_2 > z, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\qquad = \; P\{X_1 > z, X_2 > z \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} P\{X_2 > x+k \,|\, X_1 > z, X_2 > z\} \\
&\qquad = \; {}_n p_x^a \; {}_{k-n} p_z^r \,,
\end{aligned}$$

da im RT-Modell

$$\begin{aligned} P\{X_2 > u \,|\, X_2 > z\} &= P\{X_2 > u \,|\, X_1 \le z, X_2 > z\} \\ &= P\{X_2 > u \,|\, X_1 > z, X_2 > z\} \quad \text{für} \quad u \ge z \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (2) &= {}_np_x^a \sum_{k \ge n} v^k \; {}_{k-n}p_z^r \\ &= v^n \; {}_np_x^a \sum_{k \ge 0} v^k \; {}_kp_z^r \\ &= v^n \; {}_np_x^a \, \mathrm{a}_z^r \\ &= \mathrm{a}_x^{aA} \end{aligned}$$

Barwert einer auf das Alter z aufgeschobenen lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1 an einen x-jährigen Aktiven.

(3) = Barwert einer Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf eine lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrag 1. Sie ist also fällig, falls der Berechtigte vor dem Alter z Invalide wird und ist zahlbar ab Ende des Jahres des Eintritts der Invalidität.

Zu e)

Auf $\{X_1 > x\}$ gilt:

Für $k \le n-1$:

$$\{X_1 \le x+k\} = \{x < X_1 \le x+k\} = \bigcup_{j=o}^{k-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1\}, \quad \text{disj.}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \{X_1 \le x+k, X_2 > x+k\} &= \left[\bigcup_{j=o}^{k-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1\}\right] \cap \{X_2 > x+k\} \\ &= \bigcup_{j=o}^{k-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k\} \end{aligned}$$

Für $k \ge n$:

$$\{X_1 \le z\} = \bigcup_{j=o}^{n-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1\}$$

$\Longrightarrow$

$$\{X_1 \le z, X_2 > x+k\} = \bigcup_{j=o}^{n-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k\}$$

$\Longrightarrow$

$$\{X_1 \le min(z, x+k), X_2 > x+k\} = \bigcup_{j=o}^{min(n,k)-1} \{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k\}$$

Zu f)

$$
\begin{aligned}
&P\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}\\
&= P\,\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_1 > x+j, X_2 > x+j, X_2 > x+j+1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_2 > x+k\,|X_1 > x, X_2 > x\}\\
&\qquad \text{wegen } \{X_2 > x+k\} \subset \{X_2 > x+j+1\} \text{ und } \{X_2 > x+j+1\} \subset \{X_2 > x+j\}\\
&= P\{X_1 > x+j, X_2 > x+j \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} && (1)\\
&\quad P\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+j+1, \,|\, X_1 > x+j, X_2 > x+j\} && (2)\\
&\qquad \text{wegen} \quad \{X_1 > x+j\} \subset \{X_1 > x\}, \{X_2 > x+j\} \subset \{X_2 > x\}\\
&\quad P\{X_2 > x+k \,|\, x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+j+1\} && (3)\\
&\qquad \text{wegen} \quad \{X_2 > x+j+1\} \subset \{X_2 > x+j\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= {}_jp_x^a\\
(2) &= i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \quad \text{(vgl. Hinweis)}\\
(3) &= {}_{k-j-1}p^i_{x+j+1} \quad \text{wegen} \quad x+k-(x+j+1) = k-j-1
\end{aligned}
$$

Zu g)

Für

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 0} v^k\, P\{X_1 \le min(z, x+k), X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}\\
&\overset{e)}{=} \sum_{k\ge 0} v^k \sum_{j=0}^{min(n,k)-1} P\{x+j < X_1 \le x+j+1, X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}\\
&\overset{f)}{=} \sum_{k\ge 0} v^k \sum_{j=0}^{min(n,k)-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}}\,{}_{k-j-1}p^i_{x+j+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{k-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}}\,{}_{k-j-1}p^i_{x+j+1} && (1)\\
&\quad + \sum_{k\ge n} v^k \sum_{j=0}^{n-1} {}_jp_x^a\, i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}}\,{}_{k-j-1}p^i_{x+j+1} && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1}\,{}_jp_x^a\, i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \sum_{k\ge n} v^{k-j-1}\,{}_{k-j-1}p^i_{x+j+1}\\
(1) &= \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1}\,{}_jp_x^a\, i_{x+j}\;{}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \sum_{k=j+1}^{n-1} v^{k-j-1}\,{}_{k-j-1}p^i_{x+j+1}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 0} v^k\, P\{X_1 \le min(z, x+k), X_2 > x+k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}\\
&\quad = \quad (1) + (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1}\, {}_j p_x^a \, i_{x+j}\, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \underbrace{\sum_{k\geq j+1} v^{k-j-1}\, {}_{k-j-1}p^i_{x+j+1}}_{\sum_{k\geq 0} v^k\, {}_k p^i_{x+j+1} = \mathrm{a}^i_{x+j+1}} \\
&= \mathrm{a}_x^{ai}
\end{aligned}
$$

Zu h)

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 \leq x | X_2 > x\} &= \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}, \quad \text{nach b)}, \\
P\{X_1 > x | X_2 > x\} &= \frac{l_x^a}{l_x^g} \quad \text{nach b)}, \\
\sum_{k\geq 0} v^k\, P\{X_2 > x + k \,|\, X_1 \leq x, X_2 > x\} &= \mathrm{a}_x^i \quad \text{nach b)}, \\
\sum_{k\geq 0} v^k\, P\{X_2 > x + k \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} &= \mathrm{a}_x^a + \mathrm{a}_x^{aA} + \mathrm{a}_x^{ai} \quad \text{nach d) und g)} \\
&= \mathrm{a}_x^a + \mathrm{a}_x^{aiA}
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
\mathrm{a}_x^g = \frac{l_x^a}{l_x^g}\,(\mathrm{a}_x^a + \mathrm{a}_x^{aiA}) + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g}\,\mathrm{a}_x^i \quad \forall\, x < z
$$

3. Aufgabe (40 Punkte)

a) Beschreiben Sie die Methodik einer deterministischen Prognose in der Pensionsversicherungsmathematik.

b) Geben Sie die Formeln für die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Übergang vom Bestand der Aktiven zu den Beständen der Externen Anwärter, Invaliden, und Altersrentner an. Gehen Sie dabei von dem um die Ausscheideursache Fluktuation erweiterten Modell der Richttafeln aus. Beachten Sie die in diesem Zusammenhang möglichen Mehrfachübergänge und unterstellen Sie die Gleichverteilung auch der Mehrfachübergänge innerhalb des Jahres.

c) Beschreiben Sie die Methodik einer stochastischen Prognose.

d) Skizzieren Sie die Programmschritte, in denen in einer stochastischen Prognose der Übergang vom Status des Anwärters in den Status des Invaliden ermittelt wird.

Lösung:

Zu a)

Bei der deterministischen Methode werden die Anfangsbestände unter Anwendung der einjährigen Wahrscheinlichkeiten für den Verbleib im aktuellen Status und den Übergang in einen nach der Ausscheideordnung in Frage kommenden nachfolgenden Status von Jahr zu Jahr fortentwickelt. Für den fortentwickelten Bestand werden jeweils unter Berücksichtigung von Annahmen über die Dynamisierung von Bemessungsgrößen die Zahlungsbelastung und weitere finanzielle Kenngrößen berechnet. Das Ergebnis sind entsprechende Zeitreihen, die als Erwartungswerte zu interpretieren sind.

Zu b)

Die gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten lauten wie folgt:
Aktive zu externen Anwärtern

$$p_x^{af} = f_x \cdot \frac{1 - q_x^{aa} - i_x}{1 - 0,5 \cdot (q_x^{aa} + i_x)}$$

Aktive zu Invaliden

$$p_x^{ai} = i_x^{(f)} \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - 0,5 \cdot q_x^i} + f_x \cdot \frac{0,5 \cdot i_x}{1 - 0,5 \cdot (q_x^{aa} + i_x)} \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - 0,5 \cdot q_x^i}$$

Aktive zu Altersrentnern

$$p_x^{ai} = 1 - q_x^{aa(f)} - i_x^{(f)} - f_x + i_x^{(f)} \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - 0,5 \cdot q_x^i} + f_x \cdot \frac{0,5 \cdot i_x}{1 - 0,5 \cdot (q_x^{aa} + i_x)} \cdot \frac{1 - q_x^i}{1 - 0,5 \cdot q_x^i},$$

für $x = z - 1$.

Zu c)

Bei der stochastischen Fortschreibung wird ein Zufallsgenerator mit den einjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten gewichtet. Für jedes einzelne Mitglied des Ausgangsbestandes wird dessen Status von Jahr zu Jahr mittels des Zufallsgenerators ermittelt. Dabei werden auch Mehrfachübergänge entsprechend dem Bevölkerungsmodell der Ausscheideordnung berücksichtigt. Das Ergebnis ist ein möglicher Verlauf des Bestandes. Bei hinreichend großem Bestand kann dieser Verlauf als Schätzer für den Erwartungswert verwendet werden.

Zu d)

- Zerlegung des Intervalls [0,1] entsprechend den im Bevölkerungsmodell vorgesehenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, z.B. i_x, q_x^{aa}, f_x.
- Erzeugung einer Zufallszahl.
- Bei Aktiventod oder Verbleib im Aktivenbestand: Ergebnis: nicht invalide
- Bei Invalidität:

  Weitere Zufallszahl mit deren Hilfe ermittelt wird, ob der Invalide im Rest des Jahres noch stirbt.
- Bei Fluktuation:

  Weitere Zufallszahl, mit deren Hilfe ermittelt wird, ob im Rest des Jahres noch Invalidität eintritt. Wenn ja, dann weitere Zufallszahl, nach der über den Tod im verbleibenden Rest des Jahres entschieden wird.

4. Aufgabe (30 Punkte)

a) Beschreiben Sie die Aufgaben des Verantwortlichen Aktuars einer Pensionskasse.

b) Erläutern Sie den Inhalt eines versicherungsmathematischen Gutachtens für eine Pensionskasse.

c) Geben Sie das Schema einer Zerlegung des Jahresergebnisses in die wesentlichen Einflussgrößen an.

d) Wie gehen Sie vor bei der Überprüfung der Angemessenheit der biometrischen Rechnungsgrundlagen?

Lösung:

Zu a)

Der Verantwortliche Aktuar einer Pensionskasse hat folgende Aufgaben:

1. Überwachung der Einhaltung der gesetzlichen Vorschriften

   Der VA hat sicherzustellen, dass bei der Berechnung der Prämien und der Deckungsrückstellung die Grundsätze des § 11 VAG und der aufgrund von § 65 Abs. 1 VAG erlassenen Rechtsverordnungen (Deckungsrückstellungsverordnung) sowie des 341f HGB eingehalten werden. (§ 11a Abs. 3 Nr. 1 Satz 1 VAG).

2. Überprüfung der Finanzlage und der Solvabilität

3. Bestätigung der Deckungsrückstellung unter der Bilanz

   Unter der Bilanz ist durch den VA zu bestätigen, dass die Deckungsrückstellung nach § 341f HGB sowie der aufgrund des § 65 Abs. 1 VAG erlassenen Rechtsverordnungen gebildet ist. In einem Erläuterungsbericht sind die Kalkulationsgrundsätze und weiteren Annahmen darzulegen, die der Bestätigung zugrunde liegen.

   Bei Pensionskassen von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung ist in der Bestätigung zu differenzieren nach Versicherungen, die auf einem genehmigten Geschäftsplan beruhen „Altbestand im Sinne von § 11c VAG“, und übrigen Versicherungen.

   Bei Pensionskassen von nicht erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung ist in der Bestätigung auf den genehmigten Geschäftsplan abzustellen.

   Künftig entfällt die Trennung nach der wirtschaftlichen Bedeutung.

4. Vorlage des Erläuterungsberichtes

5. Unterrichtung des Vorstandes bzw. der Aufsicht

   Gemäß § 11a Abs. 3 Nr. 3 VAG hat der VA den Vorstand der Kasse zu unterrichten, falls er die Bestätigung unter der Bilanz voraussichtlich nicht oder nur mit Einschränkungen wird abgeben können. Wenn der Vorstand der Beanstandung nicht unverzüglich abhilft, ist die Aufsichtsbehörde zu unterrichten.

6. Vorschläge zur Überschussverwendung

   Gemäß § 11a Abs. 3 Nr. 4 VAG hat der VA dem Vorstand Vorschläge für eine angemessene Beteiligung der Versicherungsverträge mit Anspruch auf Überschussbeteiligung vorzulegen.

Zu b)

Ein versicherungsmathematisches Gutachten für eine Pensionskasse umfasst folgende Punkte:

- Stichtag des Gutachtens
- Beschreibung der Leistungs- und Finanzierungsgrundsätze
- Beschreibung des Datenbestandes
- Geschäftsplanmäßige Berechnungsgrundsätze und Rechnungsgrundlagen, verwendete Näherungsverfahren

- Kontrolle der Rechnungsgrundlagen, Beiträge und Näherungsverfahren
- Ermittlung der Rückstellungen für die einzelnen Bestandsgruppen mit getrennter Angabe von Beitrags- und Leistungsbarwert
- Versicherungstechnische Bilanz
- Feststellung des Rohergebnisses
- Analyse des Rohergebnisses (Gewinnzerlegung)
- weitere Nachweise und Feststellungen
- Beurteilung der Finanzlage
- Vorschläge zur Überschussverwendung
- ggf. Bewertung nach Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung
- Testat

Zu c)
Aus der Gewinn- und Verlustrechnung und ergänzender Informationen lässt sich das Jahresergebnis wie folgt zerlegen:

a) Ergebnis aus Kapitalanlagen
   + Erträge aus Kapitalanlagen
   ./. Aufwendungen für Kapitalanlagen
   ./. Rechnungszins auf mittlere Deckungsrückstellung
b) Ergebnis aus Verwaltungskosten
   + Kostenzuschläge
   ./. Regulierungsaufwendungen
   ./. Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb
c) Risikoergebnis
   + Bruttobeiträge
   ./. Kostenzuschläge
   + Rechnungszins auf mittlere Deckungsrückstellung
   ./. Aufwendungen für Versicherungsfälle
   + Regulierungsaufwendungen
   ./. Erhöhung der Deckungsrückstellung
d) Sonstiges Ergebnis
   + sonstige Erträge
   ./.sonstiger Aufwand

Zu d)
Bei der Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

1. Ermittlung der Ausscheidehäufigkeiten und Gegenüberstellung zu den geschäftsplanmäßigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten.
2. Analyse des Vergleichergebnisses vor dem Hintergrund der Bestandsgröße und spezifischer Besonderheiten zum Ausschluss von Zufallsschwankungen.

3. Einschätzung von Trends.
4. Definition eines angemessenen Sicherheitsniveaus
5. Abschließende Beurteilung