Bericht zur Prüfung im September 2004 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 27. bis 29. September 2004 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluss an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs.1 Buchst. b der Satzung der DGVFM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVFM bzw. in der DAV zu erfüllen. Dieser Prüfung unterzogen sich 67 Teilnehmer, wovon 51 mit Erfolg bestanden haben. Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt sollten mindestens 42 Punkte von 105 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 konnten maximal 20 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 30 Punkte, in Aufgabe 3 maximal 35 Punkte und in Aufgabe 4 maximal 20 Punkte erreicht werden. In den Aufgaben 1, 3 und 4 wurden auch jeweils die erreichbaren Höchstpunkte erreicht.

1. Aufgabe (20 Punkte)

a) Erläutern Sie Aufbau und Inhalt eines versicherungsmathematischen Gutachtens.

b) Formulieren Sie ein versicherungsmathematisches Gutachten über die steuerlich zulässige Pensionsrückstellung für eine Pensionsverpflichtung gegenüber einem Tarifangestellten.

c) Eine versicherungsmathematische Bewertung setzt eine Zuordnung der möglichen Zahlungen aufgrund einer Pensionsverpflichtung zum Alter des Berechtigten im Zeitpunkt der Zahlung voraus. Sie möchten die Bewertung für einen Bestand ohne systematische Fehler durchführen, gleichzeitig aber auch den Rechenaufwand begrenzt halten. Wählen und beschreiben Sie eine Methode der Zuordnung von Zahlungen zu Altern und begründen Sie Ihre Wahl.

Lösung:

Zu a)

Ein versicherungsmathematisches Gutachten umfasst mindestens folgende Gliederungspunkte:

- Auftraggeber, Stichtag und Zielsetzung des Gutachtens
- Leistungsgrundsätze und Rechtsgrundlagen der bewerteten Verpflichtungen
- Inventurstichtag und Datenquelle
- Bewertungsmethoden und –prämissen
- Darstellung der Ergebnisse
- Testat des Gutachters

Zu b)

1. Auftrag
Der Gutachter wurde durch [den Auftraggeber] beauftragt, die Höhe der Pensionsrückstellung für die Pensionsverpflichtung gegenüber Herrn [Tarifangestellter] zum [Bewertungsstichtag] zu ermitteln.

2. Leistungsgrundsätze und Rechtsgrundlagen
Die Pensionsverpflichtungen beruhen auf dem Tarifvertrag des ... gewerbes Nr. ... in der Fassung vom .... Vorgesehen sind Rentenzahlungen bei Invalidität und Alter in Höhe von 12 % des Festgehaltes.
Die persönlichen Daten wurden zum Bilanzstichtag erhoben und dem Gutachter in Form einer EXCEL-Datei zur Verfügung gestellt.

3. Bewertungsmethoden und –prämissen
Es wird der Teilwert im Sinne der deutschen steuerlichen Vorschriften (§ 6a EStG) ermittelt. Der Rechnungszins beträgt 6 %. Als biometrische Rechnungsgrundlagen werden die Richttafeln 1998 von Klaus Heubeck verwendet.

4. Ergebnisse
Der Teilwert zum [Bewertungsstichtag] beträgt für die hier zu bewertende Verpflichtung ... Euro.

[Ort], den [Datum]

Testat

Zu c)

Es kommt die sogenannte Altersmethode zur Anwendung. Hierbei ist jedem Alter die durchschnittlich im Altersintervall [x,x+1[in Betracht kommende Versorgungsleistung zuzuordnen. Um den Rechenaufwand begrenzt zu halten, kann der Durchschnittswert ersetzt werden durch die zu einem festen Kalenderdatum innerhalb des Altersintervalls in Betracht kommende Versorgungsleistung. Als festes Kalenderdatum eignet sich besonders das Stichtagsdatum.

2. Aufgabe (30 Punkte)

a) Interpretieren Sie den Aufwand eines Unternehmens für die betriebliche Altersversorgung bei einer unmittelbaren Pensionszusage einerseits und einer Pensionskasse andererseits versicherungsmathematisch.

b) Wie können die beiden Aufwandsgrößen der beiden in a) genannten Durchführungswege vergleichbar gemacht werden?

c) Wie kann die Effizienz der betrieblichen Altersversorgung gemessen werden? Wann lohnt sich betriebliche Altersversorgung?

d) Arbeitgeber und Arbeitnehmer vermuten in der betrieblichen Altersversorgung Steuervorteile. Worin können derartige Vorteile liegen? Wie könnte man sie messen?

Lösung:

Zu a)

Der Aufwand $[A]$ eines Unternehmens aus unmittelbaren Pensionszusage stetzt sich zusammen aus den ausgezahlten Leistungen $[L]$, Verwaltungskosten $[K]$ (Datenhaltung, Sachbearbeitung, Gutachtergebühren, PSV-Beiträge) und der Veränderung der Pensionsrückstellung $[V_t - V_{t-1}]$. Also $A = L + K + V_t - V_{t-1}$ (1).
Die Pensionsrückstellung am Jahresende $[V_t]$ entspricht der Pensionsrückstellung am Jahresanfang $[V_{t-1}]$, erhöht um die versicherungstechnische Netto-Prämie $[P]$ und um den Zins $[Z]$, vermindert um die ausgezahlten Leistungen $[L]$ und verändert um einen Änderungssaldo $[\ddot{A}]$ auf Grund von nicht rechnungsmäßigem Verlauf der Verpflichtungen. Also $V_t = V_{t-1} + P + Z - L + \ddot{A}$ (2).
Aus (1) und (2) ergibt sich für den Aufwand die Darstellung $A = P + Z + \ddot{A} + K$. Der durch unmittelbare Pensionszusagen verursachte Aufwand lässt sich daher interpretieren als Summe aus Prämie und Verzinsung der Deckungsmittel, erhöht um den Verwaltungsaufwand und die wirtschaftlichen Folgen aus der Übernahme der versicherungstechnischen Risiken.
Der bei Durchführung der betrieblichen Altersversorgung über eine Pensionskasse anfallende Aufwand $[A^{PK}]$ besteht aus den zu zahlenden Bruttobeiträgen $[B]$ (auch Zuwendung genannt, einschließlich etwaiger Nachschüsse) und dem mit der Kommunikation zur Pensionskasse verbundenen Verwaltungsaufwand $[K']$. Die Verzinsung der Deckungsmittel besorgt die Pensionskasse, ebenso die Übernahme des versicherungstechnischen Risikos. Also $A^{PK} = B + K'$.

Zu b)

In Betracht kommt, den zinsbereinigten Aufwand aus der unmittelbaren Pensionszusage $A - Z$ Jahr für Jahr zu vergleichen mit dem Pensionskassenaufwand A^{PK}. Für die Betrachtung von Zeitabschnitten bietet sich die Ermittlung des Barwertes der genannten Aufwandsgrößen an. Bei der Ermittlung des Barwertes ist ein aus Unternehmenssicht realistischer Zins (risikofreie Anlage oder günstigster Fremdkapitalzins) angemessen.
Als Alternative bietet sich eine Vergleichsbetrachtung auf Liquiditätsebene unter Einbeziehung der nachsteuerlichen Effekte an. Beschreibung des sogenannten „Topfes“ der kumulierten Liquiditätswirkungen nach Steuern und der Wirkung auf das Eigenkapital im Zeitablauf.

Zu c)

Die Effizienz der betrieblichen Altersversorgung kann durch eine Vergleichsbetrachtung des Unternehmens mit betrieblicher Altersversorgung zum Unternehmen ohne betriebliche Altersversorgung gemessen werden. Entscheidend ist dabei, ob und in welchem Umfang das zum Vergleich herangezogene Unternehmen ohne betriebliche Alterversorgung zusätzlichen Aufwand für die Gewinnung und Entlohnung des Personals zu tragen hat. Wenn der durch die betriebliche Altersversorgung anfallende Aufwand niedriger ist, als der genannte Alternativaufwand, dann lohnt sich betriebliche Altersversorgung.
Dabei soll nicht unerwähnt bleiben, dass aufgrund vielfältiger unterschiedlicher Wertungen, die in der Person der Begünstigten begründet sind (z.B. Zeitpräferenz, Steuerbelastung), in der Praxis Schwierigkeiten bestehen können, den Alternativaufwand festzustellen. Nicht zuletzt wird der Alternativaufwand auch durch die Transparenz und Verlässlichkeit der gewährten betrieblichen Altersversorgung beeinflusst.
Für eine modellhafte Vergleichsberechnung eignet sich besonders die Spur der betrieblichen Altersversorgung, d.h. die nach dem Wegfall einer Generation von Berechtigten zurück-

bleibende nachhaltige Wirkung der betrieblichen Altersversorgung auf das Eigenkapital im Vergleich zu der entsprechenden Wirkung der Alternativmaßnahmen.

Zu d)

Steuerliche Vorteile für den Arbeitgeber können sich dann ergeben, wenn der steuerlich anerkannte Finanzierungsaufwand das betriebswirtschaftlich erforderliche Maß übersteigt. Dies ist bei den derzeitigen steuerlichen Rahmenbedingungen bei der unmittelbaren Pensionszusage (Zins 6 %) in der Regel nicht zu erwarten. Ein steuerlicher Vorteil für den Arbeitgeber liegt indes darin, dass die Verzinsung der Pensionsrückstellung – anders als ansonsten die Verzinsung von Dauerschulden – bei der Bemessungsgrundlage für die Gewerbeertragsteuer voll abzugsfähig ist.
Für Arbeitnehmer bestehen eindeutige steuerliche Vorteile durch die nachgelagerte Besteuerung (bei unmittelbarer Pensionszusage und Unterstützungskasse ohne Begrenzung, bei den übrigen Wegen begrenzt durch § 3 Nr. 63 EStG bzw. die Steuerbegünstigung von Beiträgen gemäß § 40b EStG). Dabei wird unterstellt, dass die Steuerbelastung während der aktiven Dienstzeit höher ist als nach Eintritt eines Versorgungsfalles.

3. Aufgabe (35 Punkte)

Sie kennen die Definition des Barwerts einer lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Rente eines x-jährigen vom Jahresbetrag 1: bezeichne N die Zufallsgröße „restliche vollendete Jahre des x-jährigen bis zu seinem Tod“, so stellt $\mathrm{a}_{\overline{N+1}|}$ den Erfüllungsbetrag dieser Rentenverpflichtung dar, damit $\mathrm{a}_x = \mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{N+1}|})$ ihren Barwert (vgl. Kap. 2 Abschnitt 2.1 „Einleitung“ des Ihnen vorliegenden Buches Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen). Auf die gleiche Weise soll nun der Teilwert (Reserve) einer Versorgungsverpflichtung gegenüber einem bei Eintritt in das Unternehmen x-jährigen Aktiven zum Alter $x+m$ abgeleitet werden; der betrachtete Aktive hat also zum Bewertungsstichtag das Alter $x+m$, und der Versorgungsfall ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht eingetreten. Dabei wird gefordert, dass der jährliche Aufwand für die Verpflichtung, die jährlichen Prämien, gleichmäßig auf die Zeit zwischen Diensteintritt und Eintritt des Versorgungsfalles verteilt wird (jährlich gleichbleibende Prämien, jährlich vorschüssig zahlbar), und die Leistung, die bei Eintritt des Versorgungsfalles zu erbringen ist, unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins allein durch die bis zum Eintritt des Versorgungsfalles aufgelaufenen Prämien gedeckt ist. Sei die Zufallsgröße K die Anzahl der vollendeten Jahre des x-jährigen Aktiven bis zum Eintritt des Versorgungsfalles (der Versorgungsfall trete also im Altersabschnitt $]x+K, x+K+1]$ ein, mit $K \geq m$), also $K-m$ die Anzahl der vollendeten Jahre des zum Bewertungsstichtag $x+m$-jährigen Aktiven bis zum Eintritt des Versorgungsfalles, und sei E_K die auf den Jahresbeginn diskontierte Leistung bei Eintritt des Versorgungsfalles nach K vollendeten Jahren.

1. Geben Sie die Zufallsgröße Π_K der jährlich vorschüssig zahlbaren Jahresprämie bei Eintritt des Versorgungsfalles nach K vollendeten Jahren an. Beachten Sie dabei, dass die unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins nach K Jahren angesammelten Prämien gerade der zugesagten Leistung E_K entsprechen müssen, damit aus den Prämien unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins die zugesagte Leistung bezahlt werden kann. Setzen Sie dabei einen jährlich gleichbleibenden Zins von i p.a. an.

2. Zeigen Sie, dass der Erfüllungsbetrag B_K^P der zukünftigen Prämien zum Alter x, dargestellt in Abhängigkeit von K, der Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt

des Versorgungsfalles, $\Pi_K \, \mathrm{a}_{\overline{K+1}|}$ beträgt, und bestimmen Sie den Erfüllungsbetrag ${}_mB_x^P$ der zukünftigen Prämien zum Alter $x+m$.

3. Stellen Sie den Erfüllungsbetrag B_K der zukünftigen Leistungen zum Alter x in Abhängigkeit von K, der Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Eintritt des Versorgungsfalles, dar, so dass nach dem Äquivalenzprinzip $B_K^P = B_K$ die Prämie in gewohnter Weise gemäß

$$\Pi_K = \frac{B_K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}}$$

ausgedrückt werden kann. Bestimmen Sie auch den Erfüllungsbetrag ${}_mB_K$ der zukünftigen Leistungen zum Alter $x+m$.

4. Bestimmen Sie zum Alter $x+m$ unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins den Betrag der bis zum Alter $x+m-1$ aufgelaufenen Prämien $V_m^{(K)}$. Die zum Alter $x+m$ fällig werdende Prämie bleibt also unberücksichtigt (Hier handelt es sich um den Erfüllungsbetrag des retrospektiven Teilwerts zum Alter $x+m$).

5. Der Erfüllungsbetrag $\hat{V}_m^{(K)}$ des prospektiven Teilwerts zum Alter $x+m$ beträgt

$$\hat{V}_m^{(K)} = {}_mB_K - {}_mB_K^P$$

Begründen Sie diesen Ansatz.

6. Weisen Sie nach, dass gilt:

$$\hat{V}_m^{(K)} = V_m^{(K)}$$

7. Weisen Sie nach, dass für den in üblicher Weise definierten prospektiven Teilwert ${}_mV_x$ (vgl. z.B. das oben zitierte Buch, Kap. 2 Abschnitt 4 „Reserven“ unter Beachtung der Rahmenbedingungen dieser Aufgabe) gilt:

$${}_mV_x = \mathcal{E}\left({}_mB_K - \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{K+1}|})} \, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1}|} \right)$$

Zeigen Sie, dass i.a. gilt:

$$\mathcal{E}(V_m^{(K)}) \neq {}_mV_x$$

Haben Sie eine Idee, warum man ${}_mV_x$ in der angegebenen Weise festgelegt hat?

Lösung:

Zu 1.

$$\Pi_K \, vs_{\overline{K+1}|} = E_K$$

$\Longrightarrow$

$$\Pi_K = \frac{E_K}{v\, s_{\overline{K+1}|}} = \frac{E_K\, v^K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}}$$

Zu 2.

Der Erfüllungsbetrag B_K^P ist derjenige Betrag, der zu Beginn, das heißt also, zum Alter x, notwendig ist, um unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins die Prämie Π_K bis zum Eintritt des Versorgungsfalles zu zahlen, also

$$B_K^P = \Pi_K\,(1 + v + ... + v^K) = \Pi_K\, \mathrm{a}_{\overline{K+1}|}$$

Analog:

$$_mB_K^P = \Pi_K\,(1 + v + ... + v^{K-m}) = \Pi_K\, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1}|}$$

Zu 3.

$$B_K = E_K\, v^K$$

$\Longrightarrow$

$$\Pi_K = \frac{E_K\, v^K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}} = \frac{B_K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}}$$

Analog:

$$_mB_K = E_K\, v^{K-m}$$

Zu 4.

$$\begin{aligned} V_0^{(K)} &= 0 \\ V_1^{(K)} &= \Pi_K\, r \\ V_m^{(K)} &= \Pi_K\,(r^m + ... + r) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} V_m^{(K)} &= \Pi_K\, s_{\overline{m}|} \\ &= \Pi_K\, r^m\, \mathrm{a}_{\overline{m}|} \end{aligned}$$

Zu 5.

Zu begründen ist der Ansatz

$$\hat{V}_m^{(K)} = {}_mB_K - {}_mB_K^P.$$

$_mB_K$ stellt den Betrag dar, der nach m Jahren benötigt wird, um die zukünftige Leistung bei Eintritt des Versorgungsfalles nach K Jahren erbringen zu können. $_mB_K^P$ stellt den Wert der noch ausstehenden Prämien zum Alter $x + m$ dar, wenn der Versorgungsfall nach K vollendeten Jahren eintritt.

$\Longrightarrow {}_mB_K - {}_mB_K^P$ stellt den Betrag dar, der zum Alter $x+m$ vorhanden sein muss, damit unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien die Leistung nach K vollendeten Jahren erbracht werden kann, wenn der Versorgungsfall nach K vollendeten Jahren eintritt. $\hat{V}_m^{(K)}$ ist also der Sollbetrag nach m Jahren für den Fall, dass der Versorgungsfall nach K vollendeten Jahren eintritt.

Zu 6.

Aus

$$\mathrm{a}_{\overline{K+1|}} = \mathrm{a}_{\overline{m|}} + v^m \mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}$$

folgt:

$$\underbrace{\Pi_K\, r^m\, \mathrm{a}_{\overline{m|}}}_{V_m^{(K)}} + \underbrace{\Pi_K\, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}}_{{}_mB_K^P} = \underbrace{r^m\, \Pi_K\, \mathrm{a}_{\overline{K+1|}}}_{v^{K-m}\, E_K} = {}_mB_K\,,$$

q.e.d.

Zu 7.

Es gilt für einen Aktivenbestand für den Teilwert einer Verpflichtung (mit $n = z - x$ und z : Pensionsalter):

$$ {}_mV_x = {}_mB_x - \frac{{}_0B_x}{\mathrm{a}_x^a}\, \mathrm{a}_{x+m}^a \tag{1}$$

Nun ist

$${}_mB_x = \mathcal{E}({}_mB_K),$$

also

$${}_0B_x = \mathcal{E}(B_K),$$

und

$$\mathrm{a}_{x+m}^a = \mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}),$$

also

$$\mathrm{a}_x^a = \mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{K+1|}}).$$

Damit lässt sich ${}_mV_x$ wie folgt schreiben:

$${}_mV_x = \mathcal{E}\left({}_mB_K - \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}\mathrm{a}_{\overline{K+1|}}}\, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}\right) = \mathcal{E}({}_mB_K) - \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}\mathrm{a}_{\overline{K+1|}}}\, \mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}})$$

Dagegen gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(V_m^{(K)}) &= \mathcal{E}(\hat{V}_m^{(K)}) \\
&= \mathcal{E}\left({}_mB_K - \frac{B_K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1|}}}\, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}\right) \\
&= \mathcal{E}({}_mB_K) - \mathcal{E}\left(\frac{B_K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1|}}}\, \mathrm{a}_{\overline{K-m+1|}}\right)
\end{aligned}$$

I.a. gilt:

$$\mathcal{E}\left(\frac{B_K}{\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}}\,\mathrm{a}_{\overline{K-m+1}|}\right) \neq \frac{\mathcal{E}(B_K)}{\mathcal{E}\mathrm{a}_{\overline{K+1}|}}\,\mathcal{E}(\mathrm{a}_{\overline{K-m+1}|}),$$

da i.a. für beliebige Zufallsgrößen X und Y gilt:

$$\mathcal{E}(XY) \neq \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) \text{ und } \mathcal{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \neq \frac{\mathcal{E}(X)}{\mathcal{E}(Y)}.$$

Bem.: Der Teilwert einer Verpflichtung gem. Gl.(1) entspricht der prospektiven Reserve einer Verpflichtung bei jährlich vorschüssiger Zahlung einer Prämie $\frac{B_0}{\mathrm{a}^a_x}$. Bei der Bewertung einer Pensionsverpflichtung geht man also von der Modellvorstellung aus, dass der Berechtigte – i.d.R. ab Eintritt in das Unternehmen – eine sog. „fiktive Prämie“ entrichtet, deren Wert von Anfang an bekannt ist. Dadurch baut sich dann analog zum Deckungskapital eines Lebensversicherungsvertrags der Teilwert gem. Gl.(1) auf. Dieses Modell erscheint im Rahmen einer deterministischen Pensionsversicherungsmathematik als zutreffend und vernünftig. Dieses Modell, insbesondere die Festlegung einer Prämie von Anfang an, ist jedoch für die Bewertung einer Pensionsverpflichtung nicht zwingend: der hier vorgestellte Ansatz, in dem die Prämie erst bei Eintritt des Versorgungsfalls festliegt, reicht zu einer zutreffenden Rückstellung aus, wie das Beispiel dieser Aufgabe zeigt.

4. Aufgabe (20 Punkte)

In Kap. 2 Abschnitt 4.3.1 des Buches Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen (Zitat dieses Kapitels: „Mathematik“), das Ihnen vorliegt, wird der klassische Cantellifall erörtert (als Leistung im Fall der Invalidität wird die Reserve zum Ende des Jahres am Ende des Jahres verrentet). Bekanntlich sind in den ersten Dienstjahren die Leistungen bei Invalidität sehr gering. Um diesem Übel abzuhelfen, sagt ein Unternehmen statt dessen zu, im Fall der Invalidität den Barwert der Zusage zum Ende des Jahres am Ende des Jahres zu verrenten. Sie haben nun die Aufgabe, diese Zusage zu bewerten, d. h. Prämie und Reserve (Teilwert) dieser Zusage zu bestimmen.

1. Stellen Sie das Bilanzgleichungssystem für diese Zusage auf (die explizit zugesagten Leistungen der Zusage seien durch den Vektor

$$L^{'} = \begin{pmatrix} {}_0L^{'}_x \\ {}_1L^{'}_x \\ \vdots \\ {}_nL^{'}_x \end{pmatrix}$$

erfasst, ansonsten seien wie üblich V der Reservevektor, L der Leistungsvektor, f das Prämienprofil und P die Koeffizientenmatrix, vgl. „Mathematik“ Abschnitt 4.2).

2. Formen Sie dieses Gleichungssystem in das Gleichungssystem

$$P_0 B = L^{'} + FB \tag{1}$$

um (P_0: Koeffizientenmatrix bei Einmalprämie).

3. Sei $P_0^{'} := P_0 - F$. Geben Sie $P_0^{'-1}$ an (Hinweis: Berechnen Sie $P_0^{'-1}$ für $n = 2$ und 3, gewinnen daraus eine Vermutung über $P_0^{'-1}$ für beliebiges n und verifizieren diese Vermutung).
4. Geben Sie die Barwerte ${}_mB_x,\ m = 0, 1, ...n$, dieser Zusage als Summenformel durch Lösen von Gl. (1) an.
5. Geben Sie das Prämiengewicht P_x und die Reserven ${}_mV_x,\ m = 1, 2, ...n$ dieser Zusage an.
6. Beweisen Sie, dass der so gewonnene Reservevektor V Lösung des Gleichungssystems nach 1. ist.

Lösung:

Zu 1.

Bilanzgleichungssystem:

$$PV = L$$

Nun ist

$$L = L^{'} + FB, \text{ mit}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & v\,i_x & & & & \\ & 0 & v\,i_{x+1} & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & v\,i_{x+n-1} & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$PV = L^{'} + FB$$

Zu 2.

Nun (vgl. „Mathematik“ S. 84 unten):

$$\begin{aligned} P &= P_0\,A \\ B &= A\,V \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$PV = P_0\,A\,V = P_0\,B$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{gathered} P_0\,B = L^{'} + FB \\ (P_0\ -\ F)B = L^{'} \end{gathered}$$

Zu 3.

$$P_0^{'} = P_0 - F = \begin{pmatrix} 1 & -vp_x^{'} & & & & \\ & 1 & -vp_{x+1}^{'} & & 0 & \\ & & \ddots & \cdot & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & -vp_{x+n-1}^{'} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit (für beliebiges $x \in I\!N_0$)

$$-vp_x^{'} = -v(1 - i_{x+m} - q_{x+m}^{aa}) - v\, i_{x+m} = -v(1 - q_{x+m}^{aa}),$$

also

$$p_x^{'} = 1 - q_x^{aa}$$

sowie

$$P_0^{'-1} = \begin{pmatrix} 1 & vp_x^{'} & v^2\,{}_2p_x^{'} & \cdots & \cdots & v^n\,{}_np_x^{'} \\ & 1 & vp_{x+1}^{'} & \cdots & \cdots & v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x^{'} \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & \cdot & vp_{x+n-1}^{'} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Multiplizieren wir mit $i,\, k \in \{0, 1, ..., n\}$ Zeile i von $P_0^{'}$ mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \quad \text{für} \quad j = 0, 1, ..., i-1 \\ &= 1 \quad \text{für} \quad j = i \\ &= -vp_{x-i}^{'} \quad \text{für} \quad j = i+1 \\ &= 0 \quad \text{für} \quad j = i+2, ..., n \end{aligned}$$

mit Spalte k von $P_0^{'-1}$ mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_{jk} &= v^{k-j} \quad {}_{k-j}p_{x+j}^{'} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, ..., k \\ &= 0 \quad \text{für} \quad j = k+1, ...n \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\; b_{jk} &= \sum_{j=i}^{i+1} a_{ij}\, b_{jk} \\ &= a_{ii}\, b_{ik} + a_{i,i+1}\, b_{i+1,k} \\ &= v^{k-i}\;{}_{k-i}p_{x+i}^{'} - vp_{x+i}^{'}\, v^{k-i-1}\;{}_{k-i-1}p_{x+i+1}^{'} = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, ...i-1 \\ &= 1 \quad \text{für} \quad k = i \\ &= 0 \quad \text{für} \quad k = i+1, ..., n \end{aligned}$$

Also gilt $P_0^{'}\, P_0^{'-1} = 1$, $P_0^{'-1}$ gemäß Gl. (2) ist also die Inverse von $P_0^{'}$.

Zu 4.
Aus

$$(P_0 \,-\, F)B = L^{'}$$

folgt

$$B = (P_0 - F)^{-1} L^{'}$$

für $P_0 - F$ nichtsingulär, komponentenweise also

$${}_mB_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k\;{}_kp_{x+m}^{'}\;{}_{m+k}L_x^{'}$$

Zu 5.
Aus $AV = B$ d. h. $V = A^{-1}B$ folgt (vgl. „Mathematik“ Abschnitt 4.2):

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{{}_0B_x}{{}_0\mathrm{a}_x} \\ {}_mV_x &= {}_mB_x - P_x\, {}_m\mathrm{a}_x \end{aligned}$$

mit

$${}_m\mathrm{a}_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k\ {}_kp_{x+m}\ {}_{m+k}f_x$$

Zu 6.

$$\begin{aligned} PV &= P_0AA^{-1}B \\ &= P_0B \\ &= L^{'} + FB \end{aligned}$$