Bericht zur Prüfung im September 2003 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 22. bis 24. September 2003 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluss an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVFM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVFM bzw. in der DAV zu erfüllen. Dieser Prüfung unterzogen sich 57 Teilnehmer, wovon 42 mit Erfolg bestanden haben.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt sollten mindestens 42 Punkte von 122 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 konnten maximal 30 Punkte, in Aufgabe 2 maximal 25 Punkte, in Aufgabe 3 maximal 32 Punkte und in Aufgabe 4 maximal 35 Punkte erreicht werden. In den Aufgaben 2 bis 4 wurden auch jeweils die erreichbaren Höchstpunkte erreicht.

1. Aufgabe (30 Punkte)

a) Geben Sie, ausgehend von der allgemeinen Formel für Anwartschaftsbarwerte der Pensionsversicherungsmathematik Formeln für den Barwert eines (genau) x-jährigen Berechtigten für eine Anwartschaft auf jeweils folgende Leistungen an:

   i) Lebenslängliche, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente ab Alter z mit einer Mindestlaufzeit von t Jahren

   ii) unmittelbar nach Eintritt des Versorgungsfalls beginnende, ganzjährig vorschüssig zahlbare Invalidenrente mit einer Mindestlaufzeit von t und einer Höchstlaufzeit von s Jahren

   iii) jeweils am 30. November eines Jahres fälliges Weihnachtsgeld an Invaliden- und Altersrentner. Voraussetzung ist, dass der Versorgungsfall (Invalidität oder Erreichen der Altersgrenze) vor dem Zahlungstermin jeweils bereits eingetreten ist.

b) Geben Sie, ausgehend von der allgemeinen Formel für den Barwert einer laufenden Rente den Barwert für eine jährlich am Geburtstag des Rentners fällige Zahlung an.

   Anleitung: Gehen Sie zunächst davon aus, dass der Geburtstag mit dem Bewertungsstichtag zusammenfällt. Dann betrachten Sie den Fall, dass der Geburtstag vom Bewertungsstichtag abweicht. Schlagen Sie dann einen Formelansatz vor für den Fall, dass Ihnen in einem Bestand von Pensionsberechtigten nur das versicherungsmathematische Alter am Bewertungsstichtag bekannt ist.

c) Geben Sie, ausgehend von der allgemeinen Formel für den Barwert einer laufenden Rente den Barwert für eine jährlich am 1. April fällige Zahlung zum Bewertungsstichtag 31.12. an.

Anleitung: Gehen Sie auch hier zunächst davon aus, dass der Geburtstag mit dem Bewertungsstichtag zusammenfällt. Dann betrachten Sie den Fall, dass der Geburtstag vom Bewertungsstichtag abweicht. Schlagen Sie dann einen Formelansatz vor für den Fall, dass Ihnen in einem Bestand von Pensionsberechtigten nur das versicherungsmathematische Alter am Bewertungsstichtag bekannt ist.

Lösung:

Zu a)

i)

$$B = {}_{z-x}\, p_x^a \cdot v^{z-x} \cdot \left(\sum_{j=0}^{t-1} v^j + \sum_{j=t}^{\omega-x} {}_j p_z \cdot v^j \right)$$

ii)

$$B = \sum_{j=0}^{z-x-1} {}_j p_x^a \cdot i_{x+j} \cdot v^j \cdot L_{x+j}^i \text{ mit } L_x^i = v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{t-1} v^j + \sum_{j=t}^{s-1} {}_j p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \cdot v^j \right)$$

iii)

$$B = \sum_{j=0}^{z-x-1} {}_j p_x^a \cdot i_{x+j} \cdot v^j \cdot L_{x+j}^i + {}_{z-x}\, p_x^a \cdot v^{z-x} \cdot L_x^r$$

mit

$$L_x^i = v^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{j \geq 0} {}_{j+\frac{1}{2}} p^i_{x+j+\frac{1}{2}} \cdot v^{j+\frac{1}{2}}$$

und

$$L_x^r = {}_\alpha\, p_x^r \cdot v^\alpha \cdot \sum_{j \geq 0} {}_j p_{x+\alpha}^r \cdot v^j \text{ mit } \alpha = \text{ Zeit vom Geburtstag bis zum nächsten 30.11.}$$

Zu b)

Der Geburtstag fällt mit dem Bewertungsstichtag zusammen. Dann gilt für die Rente vom Jahresbetrag 1:

$$B = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_j p_x^r \cdot v^j$$

Der Geburtstag liegt um $0 < t < 1$ vom Geburtstag entfernt. Dann gilt für den Barwert der Rente vom Jahresbetrag 1:

$$B = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j+t} p_x^r \cdot v^{j+t}$$

Die versicherungstechnisch x-jährigen Rentner haben durchschnittlich zur Hälfte die Rente für das vollendete Alter x schon erhalten. Deshalb gilt für den Barwert:

$$B = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\omega-x} {}_j p_x^r \cdot v^j$$

Zu c)
Der Geburtstag fällt mit dem Bewertungsstichtag zusammen. Dann gilt für die Rente vom Jahresbetrag 1:

$$B = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j+\frac{1}{4}}p_x^r \cdot v^{j+\frac{1}{4}}$$

Der Geburtstag weicht vom Bewertungsstichtag ab. Sei t die Zeit vom Bewertungsstichtag bis zur ersten Zahlung und s die Zeit vom Bewertungsstichtag bis zum nächsten Geburtstag. Dann gilt:

$$B = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j+t}p_{x-s}^r \cdot v^{j+t}$$

Der genaue Geburtstag ist nicht bekannt. Drei Viertel der am 31.12. eines Jahres versicherungstechnisch x-jährigen erhalten die erste Zahlung in $1/4$ Jahr, ein Viertel des Bestandes muss 5/4 Jahr warten.

$$B = \frac{3}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j+\frac{1}{4}}p_x^r \cdot v^{j+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x-1} {}_{j+\frac{5}{4}}p_x^r \cdot v^{j+\frac{5}{4}}$$

2. Aufgabe (25 Punkte)

Die (regulierte) Pensionskasse Leberecht VVaG beauftragt Sie mit der Erstellung eines versicherungsmathematischen Gutachtens über den Jahresabschluss, einschließlich der Berechnung der Deckungsrückstellung.

a) Was ist der Inhalt des Gutachtens?

b) Welche Unterlagen fordern Sie an?

c) Geben Sie das Schema für eine (buchhalterische) Analyse des Jahresergebnisses auf der Basis der Gewinn- und Verlustrechnung an.

d) Woran orientieren und wie gestalten Sie Ihren Vorschlag zur Gewinnverwendung?

Lösung:
Zu a)
Ein versicherungsmathematisches Gutachten für eine regulierte Pensionskasse enthält

- Auftrag, Stichtag, Grundzüge des Leistungsrechtes und der Finanzierung
- Datenbasis, Bestandstatistik
- Kontrolle der Rechnungsgrundlagen
- Überprüfung der Beitragskalkulation bei kollektiver Finanzierung
- Grundsätze und Formeln für die Berechnung der Deckungsrückstellung
- Darstellung der Ergebnisse in geeigneter Unterteilung
- Entwicklung von RfB und Verlustrücklage

- Analyse des Überschusses
- Vorschlag zur Verwendung des Überschusses
- Testat

Zu b)
Folgende Unterlagen sind erforderlich

- Satzung, AVB, Tarifbedingungen
- Technischer Geschäftsplan
- Daten zu sämtlichen bestehenden Versicherten
- Rohbilanz, vorläufige GuV
- Risikostatistik (Todes- und Invaliditätsfälle, ggf. Hinterbliebenendaten)
- Vorgaben zu Wahlrechten bzgl. der Dotierung der Verlustrücklage

Zu c)
Schema zur Analyse des Überschusses auf der Basis der GuV

<u>Ergebnis aus Kapitalanlagen:</u>
+ Erträge aus Kapitalanlagen
- Aufwendungen für Kapitalanlagen
- rechnungsmäßige Verzinsung

<u>Ergebnis aus Verwaltungskosten</u>
+ rechnungsmäßige Verwaltungskosten
- tatsächliche Verwaltungskosten (Versicherungsbetrieb, Regulierungskosten)

<u>Risikoergebnis</u>
+ Bruttobeiträge
- rechnungsmäßige Verwaltungskosten
+ rechnungsmäßige Verzinsung
- Leistungen
- Zuführung zur Deckungsrückstellung

<u>Sonstiges Ergebnis</u>
+ sonstige Erträge
- sonstige Aufwendungen

Zu d)
Grundlage für den Vorschlag ist die Satzung der Pensionskasse. In Frage kommen in der Regel Leistungserhöhungen oder Beitragsherabsetzungen oder Barausschüttungen.
Der Vorschlag zur Gewinnverwendung orientiert sich an den Entstehungsquellen des Überschusses. Soweit der Arbeitgeber die Beiträge aufbringt, sind die darauf entfallenden Überschüsse auch zur Erfüllung arbeitsrechtlicher Verpflichtungen oder personalwirtschaftlicher Interessen des Arbeitgebers einsetzbar.
Die Vorschläge können sich auf allgemeine unbefristete Leistungserhöhungen oder strukturelle Verbesserungen oder auf befristete Leistungserhöhungen beziehen. Bei letzteren ist eine dauernde Erfüllbarkeit nach Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung nachzuweisen.

3. Aufgabe (32 Punkte)

Wir betrachten eine Aktivengesamtheit und hieraus ein beliebiges Mitglied. Seien auf der Basis eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, wie im Seminar und den Ihnen vorliegenden Unterlagen behandelt, die stetigen Zufallsgrößen

X_1 : Alter bei Eintritt der Invalidität
X_2 : Alter bei Eintritt des Todes

definiert.

1. Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}i_x &= P\{X_1 \le min(x+\tfrac{1}{2}, X_2)|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
{}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} &= P\{X_2 < min(x+\tfrac{1}{2}, X_1)|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
{}_{\frac{1}{2}}p_x^{a} &= P\{X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
{}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}} &= P\{X_1 \le min(x+1, X_2)|\, X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}\} \\
{}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} &= P\{X_2 < min(x+1, X_1)|\, X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}\} \\
{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{a} &= P\{X_1 > x+1, X_2 > x+1|\, X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}\}
\end{aligned}$$

2. Beweisen Sie die Gleichung

$$ {}_{\frac{1}{2}}p_x^{a} \quad {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{a} \quad = \quad p_x^{a} $$

3. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\Big[\{X_1 \le x+\frac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\}\Big] &\cup \Big[\{X_2 \le x+\frac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}\Big] \\
&= \{X_1 \le x+\frac{1}{2}\} \cup \{X_2 \le x+\frac{1}{2}\}
\end{aligned}$$

4. Beweisen Sie auf der Basis von 3. die Gleichung

$$ \frac{1}{2}p_x^{a} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}i_x - {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} $$

5. Beweisen Sie die Gleichung

$$ {}_{\frac{1}{2}}p_x^{a} \quad {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = P\{x+\frac{1}{2} < X_2 \le x+1,\ X_2 < X_1\,|\, X_1 > x, X_2 > x\} $$

   und interpretieren Sie diese Wahrscheinlichkeit.

6. Beweisen Sie die Gleichung

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} \ + \ {}_{\frac{1}{2}}p_x^{a} \quad {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} \ = \ q_x^{aa} $$

7. Beweisen Sie, dass unter den Annahmen ${}_{\frac{1}{2}}i_x = \frac{1}{2}i_x$ und ${}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} = \frac{1}{2}q_x^{aa}$ gilt:

$$ {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{\frac{1}{2}q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})} $$

Lösung:

Zu 1.

${}_{\frac{1}{2}}i_x$	=	Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, bis zum Alter $x+\frac{1}{2}$ wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden
${}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa}$	=	Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, bis zum Alter $x+\frac{1}{2}$ wegen Todes aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden
${}_{\frac{1}{2}}p_x^a$	=	Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, das Alter $x+\frac{1}{2}$ in der Aktivengesamtheit zu erleben.
${}_{\frac{1}{2}}i_{x+\frac{1}{2}}$	=	Wahrscheinlichkeit eines $x+\frac{1}{2}$-jährigen Aktiven, bis zum Alter $x+1$ wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden
${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$	=	Wahrscheinlichkeit eines $x+\frac{1}{2}$-jährigen Aktiven, bis zum Alter $x+1$ wegen Todes aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden
${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^a$	=	Wahrscheinlichkeit eines $x+\frac{1}{2}$-jährigen Aktiven, das Alter $x+1$ in der Aktivengesamtheit zu erleben.

Zu 2.

$$
\begin{aligned}
&{}_{\frac{1}{2}}p_x^a \; {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^a \\
&= P\{X_1 > x+\frac{1}{2}, X_2 > x+\frac{1}{2} \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \cdot \\
&\qquad \underbrace{P\{X_1 > x+1, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}\}}_{P\{X_1 > x+1, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x+\frac{1}{2}, X_2 > x+\frac{1}{2}, X_1 > x, X_2 > x\}}
\end{aligned}
$$

wegen $\{X_1 > x+\frac{1}{2},\; X_2 > x+\frac{1}{2}\} \subset \{X_1 > x, X_2 > x\}$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X_1 > x+\frac{1}{2},\, X_2 > x+\frac{1}{2},\, X_1 > x+1,\, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x,\, X_2 > x\} \\
&= P\{X_1 > x+1, X_2 > x+1 \,|\, X_1 > x,\, X_2 > x\}
\end{aligned}
$$

wegen $\{X_1 > x+1, X_2 > x+1\} \subset \{X_1 > x+\frac{1}{2},\, X_2 > x+\frac{1}{2}\}$

$$= p_x^a$$

Zu 3.

Es gilt:

$$\{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} = \left[\{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\}\right] \cup \left[\{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}\right],\; i = 1,2$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{2} \{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} = \bigcup_{i=1}^{2} \left[\{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\}\right] \cup \bigcup_{i=1}^{2} \left[\{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}\right]$$

Nun:

$$\{X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\} = \{X_1 \le X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \subset \{X_1 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\}$$

$$\{X_1 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\} = \{X_2 < X_1 \le x+\tfrac{1}{2}\} \subset \{X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{2} \{X_i \le x+\tfrac{1}{2}\} = \left[\{X_1 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_1 \le X_2\}\right] \cup \left[\{X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}\right]$$

Zu 4.

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}p_x^a &= P\{X_1 > x+\tfrac{1}{2},\, X_2 > x+\tfrac{1}{2} \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= 1 - P\left[\{X_1 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cup \{X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \,|\, \{X_1 > x, X_2 > x\}\right] \\
&= 1 - P\left[\{X_1 \le x+\tfrac{1}{2}, X_1 \le X_2\} \cup \{X_2 \le x+\tfrac{1}{2}, X_2 < X_1\} \,|\, \{X_1 > x, X_2 > x\}\right]
\end{aligned}$$

nach 3.

$$\begin{aligned}
&= 1 - P\{X_1 \le min\,(x+\tfrac{1}{2}, X_2) \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\quad - P\{X_2 < min\,(x+\tfrac{1}{2}, X_1) \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= 1 - {}_{\frac{1}{2}}i_x - {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa},
\end{aligned}$$

da $\{X_1 \le x+\frac{1}{2},\, X_1 \le X_2,\, X_2 \le x+\frac{1}{2},\, X_2 < X_1\} = \emptyset$ und X_1, X_2 stetig.

Zu 5.

$$\begin{aligned}
&{}_{\frac{1}{2}}p_x^a \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} \\
&= P\{X_1 > x+\frac{1}{2}, X_2 > x+\frac{1}{2} \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \cdot \\
&\qquad \underbrace{P\{\overbrace{X_2 < min(x+1, X_1)}^{X_2 \le x+1,\, X_2 < X_1} \,|\, X_1 > x+\tfrac{1}{2}, X_2 > x+\tfrac{1}{2}\}}_{P\{X_2 \le x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x+\frac{1}{2}, X_2 > x+\frac{1}{2}, X_1 > x, X_2 > x\}}
\end{aligned}$$

wegen $\{X_1 > x+\frac{1}{2},\, X_2 > x+\frac{1}{2}\} \subset \{X_1 > x, X_2 > x\}$

$$\begin{aligned}
&= P\{X_1 > x+\frac{1}{2}, X_2 > x+\frac{1}{2},\, X_2 \le x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= P\{X_1 > x+\tfrac{1}{2}, x+\tfrac{1}{2} < X_2 \le x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= P\{x+\frac{1}{2} < X_2 \le x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\}\,,
\end{aligned}$$

da $\{x+\frac{1}{2} < X_2 \le x+1,\, X_2 < X_1\} \subset \{X_1 > x+\frac{1}{2}\}$

Interpretation: Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen Aktiven, das Alter $x+\frac{1}{2}$ als Aktiver zu erleben und im 2. Halbjahr durch Tod als Aktiver aus der Aktivengesamtheit auszuscheiden.

Zu 6.

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} + {}_{\frac{1}{2}}p_x^a \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} &= P\{x < X_2 \le x+\tfrac{1}{2}, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \\
&\quad + P\{x+\frac{1}{2} < X_2 \le x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} \quad \text{nach 5.}
\end{aligned}$$

Nun:

$$\{x < X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\} \cap \{x+\tfrac{1}{2} < X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 < X_1\} = \emptyset$$

Und:

$$\begin{aligned}
&[\{x < X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cap \{X_2 < X_1\}] \cup [\{x+\tfrac{1}{2} < X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 < X_1\}] \\
&= [\{x < X_2 \le x+\tfrac{1}{2}\} \cup \{x+\tfrac{1}{2} < X_2 \le x+1\}] \cap \{X_2 < X_1\} \\
&= \{x < X_2 < x+1\} \cap \{X_2 < X_1\}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} + {}_{\frac{1}{2}}p_x^a \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = P\{X_2 < x+1, X_2 < X_1 \,|\, X_1 > x, X_2 > x\} = q_x^{aa}$$

Zu 7.
Aus

$$q_x^{aa} = {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} + {}_{\frac{1}{2}}p_x^a \; {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa}$$

folgt unter den getroffenen Annahmen

$$_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{q_x^{aa} - {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa}}{{}_{\frac{1}{2}}p_x^a} = \frac{\frac{1}{2}q_x^{aa}}{{}_{\frac{1}{2}}p_x^a}$$

Nun ist nach 4.:

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{2}}p_x^a &= 1 - {}_{\frac{1}{2}}i_x - {}_{\frac{1}{2}}q_x^{aa} \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\,(i_x + q_x^{aa}) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{aa} = \frac{\frac{1}{2}q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2}(i_x + q_x^{aa})}$$

4. Aufgabe (35 Punkte)

In einem Land, in dem versicherungsmathematische Bewertungen nach rein versicherungsmathematischen Gesichtspunkten erfolgen, zahlt ein Unternehmen jährlich vorschüssig nach Gewinnlage Beiträge an einen Pensionsfond, der diese zu einem vereinbarten festen Zins anlegt und bei Eintritt eines vorzeitigen Versorgungsfalls durch Invalidität oder Tod als Aktiver bzw. ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver je nach Pensionsplan Leistungen erbringt. Die Leistung eines Pensionsplans ergeben sich in der Weise, dass ev. vorzeitige Leistungen in definierter Höhe vorgesehen sind und dass die Schlussleistung in der Weise ermittelt wird, dass insgesamt, also unter Berücksichtigung des Versorgungsfalles „Erreichen der Altersgrenze als Aktiver“, das Äquivalenzprinzip erfüllt ist, damit also zum Vertragsbeginn (Eintritt in das Unternehmen) Leistungs- und Beitragsbarwert übereinstimmen. Es sind drei Pensionspläne vorgesehen. Wir betrachten für jeden Pensionsplan einen Berechtigten mit Eintrittsalter (Vertragsbeginn) x, zu dessen Gunsten jährlich vorschüssig Beiträge $_m\hat{P}_x \geq 0$, $m = 0, 1...., n-1$ eingezahlt werden, wobei z das Pensionsalter und $n := z - x$ darstellt.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Beiträge $_m\hat{P}_x$ vorab nicht festliegen, sondern pro Jahr nach Gewinnlage des vorangegangenen Wirtschaftsjahres dem Pensionsfond nach Ermessen des Unternehmens gezahlt werden.

1. Pensionsplan 1: Zugesagt sei eine reine Altersrente ab Erreichen der Altersgrenze als Aktiver. Vorzeitige Leistungen sind nicht vorgesehen.
   1.1 Geben Sie die Deckungsrückstellung $_mV_x$ nach m Jahren, $m = 0, 1..., n$ an.
   1.2 Zeigen Sie, dass sich bei dieser Fallgestaltung der Barwert der Altersrente zu

$$_n\hat{L}_x = \frac{r^n}{{}_np_x^a} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x^a \, {}_k\hat{P}_x$$

   ergibt.

2. Pensionsplan 2 : Als Leistung für den Fall der vorzeitigen Invalidität oder des vorzeitigen Todes als Aktiver wird bei Eintritt des Versorgungsfalles die Summe der eingezahlten Prämien ${}_m\hat{P}_x$ gewährt.
   2.1 Geben Sie die Deckungsrückstellung ${}_mV_x$ nach m Jahren, $m = 0, 1..., n$ an.
   2.2 Bestimmen Sie den Barwert der Altersrente ${}_n\hat{L}_x$ nach diesem Vertrag.
3. Pensionsplan 3 : In Anlehnung an eine gesetzliche Vorschrift eines fernen Landes wird als Leistung für den Fall der vorzeitigen Invalidität oder des vorzeitigen Todes bei Eintritt des Versorgungsfalles „die Summe der zugesagten Beiträge, soweit sie nicht rechnungsmäßig für einen biometrischen Risikoausgleich verbraucht wurden,“ gewährt. Gehen Sie davon aus, dass mit „soweit sie nicht rechnungsmäßig für einen biometrischen Risikoausgleich verbraucht wurden“ die Risikoprämie gemeint ist.
   3.1 Zeigen Sie, dass sich ${}_m\hat{L}_x$, $m = 0, 1...., n-1$ in der Form
   $${}_m\hat{L}_x = q_{x+m} \left(v\, {}_{m+1}V_x - d \sum_{k=0}^{m} {}_kV_x \right)$$
   mit $d = iv$ und $q_x = i_x + q_x^{aa}$ darstellen lässt.
   3.2 Geben Sie für ${}_{m+1}V_x$, $m = 0, 1...., n-1$ eine Berechnungsvorschrift von der Form
   $${}_{m+1}V_x = f\left({}_m\hat{P}_x\, ,\, {}_mV_x\, ,\, {}_{m-1}V_x, ...,\, {}_1V_x\, ,\, {}_0V_x \right)$$
   an.

Lösung:

1.1 Gemäß der Formel für die prospektive Reserve stellt sich das Deckungskapital nach m Jahren, $m = 0, 1, ..., n$ auf

$${}_mV_x = \frac{r^m}{{}_mp_x^a} \sum_{k=0}^{m-1} v^k\, {}_kp_x^a\, {}_k\hat{P}_x$$

1.2 Der Prämienbarwert zum Beginn des Vertrages beträgt rückblickend nach n Jahren ${}_0B_x^P = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x^a\, {}_k\hat{P}_x$. Vorzeitige Leistungen sind nicht vorgesehen, also lautet der Leistungsbarwert zum Beginn des Vertrages ${}_0B_x = v^n\, {}_np_x^a\, {}_n\hat{L}_x$, wobei die Schlussleistung ${}_n\hat{L}_x$ zu bestimmen ist. Mit ${}_oB_x^P = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x^a\, {}_k\hat{P}_x$ folgt aus dem Äquivalenzprinzip ${}_0B_x = {}_0B_x^P$:

$${}_n\hat{L}_x = \frac{r^n}{{}_np_x^a} \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x^a\, {}_k\hat{P}_x \qquad \left(= \frac{l_x^a}{l_{x+n}^a} \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-k}\, {}_kp_x^a\, {}_k\hat{P}_x \right)$$

2.1 Für das retrospektive Deckungskapital zum Stichtag mit Alter $x+m, m = 0, ..., n$ gilt:

$$v^m\, {}_mp_x^a\, {}_mV_x = \sum_{k=0}^{m-1} v^k\, {}_kp_x^a \left({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x \right)$$

Dabei gilt für ${}_k\hat{L}_x$ mit $q_x := i_x + q_x^{aa}\ \forall\ x$:

$${}_k\hat{L}_x = v^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{k} {}_j\hat{P}_x \right) q_{x+k}$$

Damit folgt:

$$ {}_mV_x = \frac{r^m}{{}_mp_x^a} \sum_{k=0}^{m-1} v^k \; {}_kp_x^a \left[{}_k\hat{P}_x \; - \; v^{\frac{1}{2}} \, q_{x+k} \left(\sum_{j=0}^{k} {}_j\hat{P}_x \right) \right], \quad m = 0, 1, ...n $$

2.2 Für die retrospektive Deckungsrückstellung nach n Jahren gilt:

$$ \begin{aligned} v^n \; {}_np_x^a \; {}_nV_x &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^a \; {}_k\hat{P}_x - \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^a \; {}_k\hat{L}_x \\ &= B_x^P - \left(B_x - v^n \; {}_np_x^a \; {}_n\hat{L}_x \right) \\ &= v^n \; {}_np_x^a \; {}_n\hat{L}_x \quad \text{wegen} \quad B_x^P = B_x \end{aligned} $$

$\Longrightarrow$

$$ {}_n\hat{L}_x = {}_nV_x = \frac{r^n}{{}_np_x^a} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^a \left[{}_k\hat{P}_x \; - \; v^{\frac{1}{2}} \left(q_{x+k} \sum_{j=0}^{k} {}_j\hat{P}_x \right) \right] $$

3.1

$$ \begin{aligned} {}_m\hat{L}_x &= v^{\frac{1}{2}} q_{x+m} \left(\sum_{k=0}^{m} {}_kP_x^S \right) \\ {}_kP_x^S &= v \; {}_{k+1}V_x - {}_kV_x \end{aligned} $$

$\Longrightarrow$

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} {}_kP_x^S &= v \sum_{k=0}^{m} {}_{k+1}V_x - \sum_{k=0}^{m} {}_kV_x \\ &= v \; {}_{m+1}V_x + v \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x - \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x \\ &= v \; {}_{m+1}V_x - d \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x \quad \text{wegen} \quad {}_0V_x = 0 \quad \text{und} \quad d = iv = 1 - v \end{aligned} $$

$\Longrightarrow$

$$ {}_m\hat{L}_x = v^{\frac{1}{2}} \, q_{x+m} \left(v \; {}_{m+1}V_x - d \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x \right) $$

3.2

$$ \begin{aligned} {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v \; p_{x+m}^a \; {}_{m+1}V_x \\ &= v^{\frac{1}{2}} \, v \; q_{x+m} \; {}_{m+1}V_x \; - \; v^{\frac{1}{2}} \, d \, q_{x+m} \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x + v \, p_{x+m}^a \; {}_{m+1}V_x \\ &= v \, (p_{x+m}^a + v^{\frac{1}{2}} \, q_{x+m}) \, {}_{m+1}V_x \; - \; v^{\frac{1}{2}} \; d \; q_{x+m} \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x \end{aligned} $$

$\Longrightarrow$

$$ {}_{m+1}V_x = r \, \frac{{}_mV_x + {}_m\hat{P}_x + v^{\frac{1}{2}} \; d \; q_{x+m} \sum_{k=1}^{m} {}_kV_x}{p_{x+m}^a + v^{\frac{1}{2}} \; q_{x+m}^a} $$