Bericht zur Prüfung im September 2002 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 23. bis 25. September 2002 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluss an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVFM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVFM bzw. in der DAV zu erfüllen. Dieser Prüfung unterzogen sich 44 Teilnehmer, wovon 34 mit Erfolg bestanden haben.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt sollten mindestens 40 Punkte von 120 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 und 2 konnten maximal 30 Punkte, in Aufgabe 3 maximal 35 und in Aufgabe 4 maximal 25 Punkte erreicht werden. In den Aufgaben 1 bis 3 wurden auch jeweils die erreichbaren Höchstpunkte erreicht.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Bestimmen Sie die rohen Sterbehäufigkeiten für 70-jährige Männer aus folgendem Beobachtungsmaterial.

Datum	Tote	Sonstiger Zu-/ Abgang	Datum	Tote	Sonstiger Zu-/ Abgang	Datum	Tote	Sonstiger Zu-/ Abgang
1999			2000			2001		
Bestand 1.1.		200	Bestand 1.1.		180	Bestand 1.1.		210
Bis 25.3.	15		Bis 18.5.	31		Bis 18.7.	56	
25.3.		+ 20	19.5.		+ 30	19.7.		+ 10
26.3.-9.4.	11		20.5.-19.9.	20		20.7.-25.11.	20	
10.4.		− 11	20.9.		− 28	26.11.		+ 2
11.4.-31.12.	51		21.9.-31.12.	19		27.11.-31.12.	5	
Summe	77	+ 9		70	+ 2		81	+ 12

Schlagen Sie einen Ansatz für eine Sterbewahrscheinlichkeit zur Bewertung von Rentenverpflichtungen vor und begründen Sie ihren Ansatz.

Lösung:

1. Schritt: Ermittlung der rohen Sterbehäufigkeiten

a) klassischer Ansatz

Jahr	1999	2000	2001
Bestand am Beginn	200	180	210
Bestand am Ende	132	112	141
tatsächliche Todesfälle	77	70	81
rohe Sterbehäufigkeit	$\frac{2\cdot 77}{200+132+77}$ $=\frac{154}{409}=0,3765$	$\frac{2\cdot 70}{180+112+70}$ $=\frac{140}{362}=0,3867$	$\frac{2\cdot 81}{210+141+81}$ $=\frac{162}{432}=0,3750$

Durchschnittswert über den Beobachtungszeitraum *0,3794*

b) Zeitpunktmethode

1999

$$1-\left(1-\frac{15}{200}\right)\cdot\left(1-\frac{11}{205}\right)\cdot\left(1-\frac{51}{183}\right)=1-0{,}9250\cdot 0{,}9463\cdot 0{,}7213=0{,}3686$$

2000

$$1-\left(1-\frac{31}{180}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{179}\right)\cdot\left(1-\frac{19}{131}\right)=1-0{,}8278\cdot 0{,}8883\cdot 0{,}8550=0{,}3713$$

2001

$$1-\left(1-\frac{56}{210}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{164}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{146}\right)=1-0{,}7333\cdot 0{,}8780\cdot 0{,}9658=0{,}3782$$

Der Durchschnittswert beträgt *0,3727.*

Zur Herleitung von Wahrscheinlichkeiten aus den beobachteten Häufigkeiten ist eine Analyse erforderlich, ob die beobachteten Werte außergewöhnlichen Einflüssen unterworfen waren. Das vorgelegte Material lässt solche Einflüsse nicht erkennen; sie wären ggf. zu eliminieren. Darüber hinaus ist zu prüfen und zu entscheiden, ob die von Jahr zu Jahr getroffenen Beobachtungen Zufallsausprägungen sind oder einen systematischen Trend aufweisen.

Im Hinblick auf die Verwendung für die Bewertung von Rentenversicherungen ist die in der Entwicklung der Beobachtungswerte liegende Ungewissheit durch Ansatz eher niedrigerer Werte vorsichtig abzuschätzen. Aus diesem Grunde kommt als Wahrscheinlichkeitsansatz bei einer Rentenversicherung ein gegenüber den beobachteten Werten um einen Sicherheitsabschlag verringerter Wert von etwa 0,34 oder weniger in Betracht.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Die Firma KuG GmbH gewährt ihren Arbeitnehmern nach Eintritt eines Versorgungsfalles (Invalidität, Erreichen der Altersgrenzen 65 oder Tod des Berechtigten) über einen Zeitraum von drei Jahren hinweg Versorgungsleistungen. Die Höhe der Leistungen ist wie folgt gestaffelt:

15 Monatsgehälter am 1. Januar des auf den Eintritt des Versorgungsfalles folgenden Kalenderjahres, 10 Monatsgehälter am darauf folgenden 1. Januar und fünf Monatsgehälter am 1. Januar des nächsten darauf folgenden Kalenderjahres, sofern der Berechtigte oder – nach seinem Tod – seine Witwe die Zahlungstermine erlebt.

Geben Sie eine Formel für den Barwert der Pensionszusage der Firma KuG GmbH an. Hinsichtlich der Leistungen an die Witwe wenden Sie bitte die kollektive Methode an.

Anleitung: Gehen Sie von einem Berechtigten aus, der am Bewertungsstichtag (31.12.) geboren ist.

Lösung:

Barwert der Leistungen, die bei Erreichen der Altersgrenze als Aktiver an den Berechtigten gewährt werden:

$$BW^R = 15 \cdot G + (1 - q_z^r) \cdot v \cdot 10 \cdot G + (1 - q_z^r) \cdot (1 - q_{z+1}^r) \cdot v^2 \cdot 5 \cdot G$$

Barwert der ggf. an die Witwe zu zahlenden Restleistungen, wenn der Berechtigte die Altersgrenze als Aktiver erreicht

$$\begin{aligned} BW^{RW} = {} & q_z^r \cdot h_z \cdot [(1 - q_{y(z)}^w/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(z)}^w) \cdot v \cdot 10 \cdot G + (1 - q_{y(z)}^w)/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(z)}^w) \cdot (1 - q_{y(z)+1}^w) \cdot v^2 \cdot 5 \cdot G] \\ & + q_{z+1}^r \cdot h_{z+1} \cdot (1 - q_{y(z+1)}^w)/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(z+1)}^w \cdot v^2 \cdot 5 \cdot G \end{aligned}$$

Barwert der nach dem Eintritt von Invalidität im Alter x an den Berechtigten zu zahlenden Leistungen, bezogen auf den Zeitpunkt der Vollendung des x. Lebensjahres

$$BW_x^I = (1 - q_x^i)/(1 - 0{,}5 \cdot q_x^i) \cdot [v \cdot 15 \cdot G + (1 - q_{x+1}^i) \cdot v^2 \cdot 10 \cdot G + (1 - q_x^i) \cdot (1 - q_{x+2}^i) \cdot v^3 \cdot 5 \cdot G]$$

Barwert der nach dem Eintritt von Invalidität im Alter x ggf. an die Witwe des Berechtigten zu zahlenden Restleistungen

$$\begin{aligned} BW_x^{IW} = {} & 0{,}5 \cdot q_x^i/(1 - 0{,}5 \cdot q_x^i) \cdot h_x \cdot (1 - q_{y(x)}^w)/\left(1 - \frac{2}{3} q_{y(x)}^w\right) \cdot [v \cdot 15 \cdot G + (1 - q_{y(x)+1}^w) \cdot v^2 \cdot 10 \cdot G \\ & + (1 - q_{y(x)+1}^w) \cdot (1 - q_{y(x)+2}^w) \cdot v^3 \cdot 5 \cdot G] + (1 - q_x^i)/(1 - 0{,}5 \cdot q_x^i) \cdot q_{x+1}^i \cdot h_{x+1} \\ & \cdot (1 - q_{y(x+1)}^w/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(x+1)}^w) \cdot [v^2 \cdot 10 \cdot G + (1 - q_{y(x+1)+1}^w) \cdot v^3 \cdot 5 \cdot G] \\ & + (1 - q_x^i)/(1 - 0{,}5 \cdot q_x^i) \cdot (1 - q_{x+1}^i) \cdot q_{x+2}^i \cdot h_{x+2} \cdot (1 - q_{y(x+2)}^w)/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(x+2)}^w) \cdot v^3 \cdot 5 \cdot G \end{aligned}$$

Barwert der nach dem Eintritt des Todes als Aktiver im Alter x ggf. an die Witwe des Berechtigten zu zahlenden Leistungen

$$\begin{aligned} BW_x^{aW} = {} & (1 - q_{y(x)}^w)/(1 - 0{,}5 \cdot q_{y(x)}^w) \cdot [v \cdot 15 \cdot G + (1 - q_{y(x)+1}^w) \cdot v^2 \cdot 10 \cdot G \\ & + (1 - q_{y(x)+1}^w) \cdot (1 - q_{y(x)+2}^w) \cdot 5 \cdot G] \end{aligned}$$

Der Barwert der Pensionszusage lautet damit

$$\sum_{j=0}^{z-x-1} {}_jp_x^{aa} \cdot [p_x^{aa} \cdot h_x \cdot BW_x^{aW} + i_x \cdot (BW_x^I + BW_x^{IW})] + {}_{z-x}p_x^{aa} \cdot (BW^R + BW^{RW})$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Es ist bekannt, dass bei Vollbeschäftigung die Invalidität wirtschaftsbedingt zurückgeht, ohne dass sich am Gesundheitszustand der Bevölkerung etwas ändert (Problem der latenten Invaliden). Sie wollen diesem Umstand durch entsprechende Änderung der Richttafelwerte Rechnung tragen. Die geänderten Rechnungsgrundlagen seien durch „^" gekennzeichnet.

Infolge von Erfahrungswerten können Sie die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten um den altersunabhängigen Bruchteil $\pi > 0$ herabsetzen gemäß

$$\hat{i}_x = (1 - \pi) i_x$$

Da diese geringeren Invalidisierungswahrscheinlichkeiten jedoch rein wirtschaftsbedingt veranlasst sind, gehen Sie davon aus, dass die Gesamtsterblichkeit sich nicht geändert hat. Da sich jedoch unter den Aktiven latente Invalide befinden, dürfte sich die Aktivensterblichkeit erhöht haben. Aufgrund von Erfahrungswerten kommen Sie zu der Abschätzung

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) q_x^{aa} < \hat{q}_x^{aa} < (1 + \pi) q_x^{aa}$$

Auch die Invalidensterblichkeit hat sich, wie zu erwarten, erhöht, so dass Sie von $\hat{q}_x^i > q_x^i$ ausgehen. Schließlich berücksichtigen Sie noch, dass im interessierenden Altersbereich $q_x^{aa} < i_x < 10\, q_x^{aa}$ gilt, sowie ${}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} < 0.04$.

1. Zeigen Sie, dass $\hat{p}_x^a > p_x^a$.
2. Zeigen Sie, dass $\hat{l}_x^a > l_x^a$ für $x > 0$.
3. Zeigen Sie, dass $\hat{q}_x^a > q_x^a$.
4. Sei P_x^i bzw. $\hat{P}_x^i$ die Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person des Gesamtbestandes, invalide zu sein.

   Zeigen Sie, dass $\hat{P}_x^i < P_x^i$ für $x > 0$.
5. Zeigen Sie, dass $\hat{q}_x^i < \dfrac{P_x^i}{\hat{P}_x^i} q_x^i$.
6. Auf Grund weiterer Erfahrungswerte legen Sie sich auf ein $f: \frac{1}{2} < f < 1$ fest, sodass $\hat{q}_x^{aa} = (1 + f\pi)q_x^{aa}$. Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung der $\hat{q}_x^i$ an.
7. Würde man in den Richttafeln q_x^{aa} durch q_x^g ersetzen, so folgte: $q_x^a > q_x^g > q_x^i$. Beweisen Sie diese Aussage. Stimmen diese Relationen mit der Realität überein?

Lösung:

1. $\hat{p}_x^a = 1 - \hat{q}_x^{aa} - \hat{i}_x; \quad p_x^a = 1 - q_x^{aa} - i_x$

   Nun gilt:

   $\hat{i}_x = (1 - \pi)i_x$

   $\hat{q}_x^{aa} < (1+\pi)q_x^{aa}$

   $\Rightarrow$

   $\hat{i}_x + \hat{q}_x^{aa} < (1 - \pi)i_x + (1+\pi)q_x^{aa} < i_x - \pi i_x + q_x^{aa} + \pi i_x = i_x + q_x^{aa}$

   wegen $q_x^{aa} < i_x$

   $\Rightarrow \hat{p}_x^a > p_x^a$

2. $$\left.\begin{matrix} \hat{l}^a_{x+1} = \hat{p}_x^a \hat{l}_x^a & \text{mit} & \hat{l}_x^a = 1 \\ l^a_{x+1} = p_x^a l_x^a & \text{mit} & l_a^a = 1 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{matrix} \hat{l}_1^a > l_1^a & \text{wegen} & \hat{p}_0^a > p_0^a, \\ \hat{l}_2^a > l_2^a & \text{wegen} & \hat{p}_1^a > p_1^a, \text{usw.} \end{matrix}$$

   $\Rightarrow \hat{l}_x^a > l_x^a$

3. $\hat{q}_x^a = \hat{q}_x^{aa} + \hat{i}_x\, {}_{\frac{1}{2}}\hat{q}^i_{x+\frac{1}{2}} > \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)q_x^{aa} + (1 - \pi)i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} = q_x^a + \pi\left(\frac{1}{2}q_x^{aa} - i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\right)$

   da

   $${}_{\frac{1}{2}}\hat{q}^i_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\hat{q}_x^i}{1-\frac{1}{2}\hat{q}_x^i} > \frac{\frac{1}{2}q_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i} = {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$$

   wegen $\dfrac{x}{1-x}$ f. $0 \leq x < 1$ stark monoton wachsend und $\hat{q}_x^i > q_x^i$.

   Nun gilt entsprechend Vorgaben:

   $\frac{1}{2}q_x^{aa} - i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}q_x^{aa} - 10\, q_x^{aa} \cdot 0{,}04,$

   Weiterhin gilt:

   $\frac{1}{2} - 0{,}4 = 0{,}1 > 0,$

   sodass

   $\frac{1}{2}q_x^{aa} - i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}} > 0$

Es folgt:

$$\hat{q}_x^a > q_x^a + \pi\left(\frac{1}{2}q_x^{aa} - i_{x\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\right) > q_x^a$$

4. $P^i_x = \dfrac{l^g_x - l^a_x}{l^g_x}$, $\hat{P}^i_x = \dfrac{l^g_x - \hat{l}^a_x}{l^g_x}$

$\hat{l}^a_x > l^a_x \Rightarrow l^g_x - \hat{l}^a_x < l^g_x - l^a_x \Rightarrow \hat{P}^i_x < P^i_x$

Bem.: Mit „Person aktiv $\Rightarrow$ Person lebend“ folgt $l^a_x \leq l^g_x$, mit $i_x > 0$, $q^i_x < 1\,\forall x$ folgt $l^a_x < l^g_x$.

5. Es gelten Konsistenzgleichungen

$$q^g_x = \frac{\hat{l}^a_x}{l^g_x}\hat{q}^a_x + \hat{P}^i_x\hat{q}^i_x = \frac{l^a_x}{l^g_x}q^a_x + P^i_x q^i_x$$

Wegen

$\hat{l}^a_x > l^a_x$, $\hat{q}^a_x > q^a_x$

und damit

$\hat{l}^a_x\hat{q}^a_x > l^a_x q^a_x$

folgt

$\hat{P}^i_x\hat{q}^i_x < P^i_x q^i_x$

und damit die Behauptung.

6. $\hat{q}^{aa}_x = (1 + f\pi)q^{aa}_x$ laut Voraussetzung.

Bem.: Damit sind auch die $\hat{l}^a_x$ definiert.

Aus der Konsistenzgleichung

$l^g_x q^g_x = \hat{l}^a_x\hat{q}^a_x + (l^g_x - \hat{l}^a_x)\hat{q}^i_x$

folgt damit

$$l^g_x q^g_x = \hat{l}^a_x\hat{q}^{aa}_x + \hat{l}^a_x\hat{i}_x\frac{\frac{1}{2}\hat{q}^i_x}{1 - \frac{1}{2}\hat{q}^i_x} + \left(l^g_x - \hat{l}^a_x\right)\hat{q}^i_x$$

und hieraus:

$$l^g_x q^g_x - \frac{1}{2}l^g_x q^g_x\,\hat{q}^i_x = \hat{l}^a_x\hat{q}^{aa}_x - \frac{1}{2}\hat{l}^a_x\hat{q}^{aa}_x\hat{q}^i_x + \frac{1}{2}\hat{l}^a_x\hat{i}_x\hat{q}^i_x + (l^g_x - \hat{l}^a_x)\hat{q}^i_x - \frac{1}{2}(l^g_x - \hat{l}^a_x)\,(\hat{q}^i_x)^2,$$

was zu der folgenden quadratischen Gleichung für $\hat{q}^i_x$ führt:

$$\frac{1}{2}(l^g_x - \hat{l}^a_x)\,(\hat{q}^i_x)^2 - \left[l^g_x\left(1 + \frac{1}{2}q^g_x\right) - \hat{l}^a_x\left(1 + \frac{1}{2}\hat{q}^{aa}_x - \frac{1}{2}\hat{i}_x\right)\right]\hat{q}^i_x + l^g_x q^g_x - \hat{l}^a_x\hat{q}^{aa}_x = 0$$

7. (a) $q^a_x = q^{aa}_x + i_{x\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$

Setzt man $q^{aa}_x = q^g_x$, dann folgt $q^a_x > q^g_x$.

(b) Wegen $q^a_x > q^g_x$ und q^g_x Mischverteilung aus q^a_x und q^i_x folgt $q^i_x < q^g_x$.

Formal: Aus der Konsistenzgleichung

$l^g_x q^g_x = l^a_x q^a_x + (l^g_x - l^a_x)q^i_x > l^a_x q^g_x + (l^g_x - l^a_x)\,q^i_x$ wg. (a)

folgt

$(l^g_x - l^a_x)q^g_x > (l^g_x - l^a_x)q^i_x$,

also $q^g_x > q^i_x$.

Erfahrungsgemäß liegt aber die Invalidensterblichkeit über der Aktivensterblichkeit im Widerspruch zu der bewiesenen Relation.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Eine bekannte Bewertungsvorschrift für Pensionsverpflichtungen geht nicht von einem jährlich konstanten Aufwand (Prämie) aus, sondern legt die Rückstellung für die Verpflichtung zum Anfang und Ende des Wirtschaftsjahres fest und ermittelt hieraus den Aufwand. Die Rückstellung der Verpflichtung ist dabei als Barwert des zum Stichtag erdienten Anspruchs festgesetzt, bezeichnet mit ${}_mB_x$ bzw. ${}_{m+1}B_x$. Dabei bedeuten x das Eintrittsalter eines Berechtigten und m bzw. $m+1$ die Anzahl der Dienstjahre bis zum Beginn bzw. Ende des betrachteten Wirtschaftsjahres. Nach Erkenntnisstand zum Beginn des Wirtschaftsjahres wird betriebswirtschaftlich von folgender Gleichung ausgegangen:

$$ {}_mB_x + I_m + P_m = R_m + {}_{m+1}B'_x,\ m < n, \tag{1}$$

mit $x + n = z$ (Pensionierungsalter).

Wertstellung dieser Gleichung ist das Ende des Wirtschaftsjahres.

Dabei bedeuten:

$I_m = i\,{}_mB_x$: Zinsaufwand des Jahres

P_m: Rechnungsmäßiger sonstiger Aufwand des Wirtschaftsjahres als Einmalbetrag zum Ende des Wirtschaftsjahres

R_m: Die im Wirtschaftsjahr zu erwartenden Rentenzahlungen mit Wertstellung Ende des Wirtschaftsjahres (rechnungsmäßige Rentenzahlungen des Jahres)

${}_{m+1}B'_x$: Auf der Basis der gegebenen Verpflichtung erwartete Rückstellung zum Ende des Jahres (Rückstellung zum Ende des Jahres, wie sie sich rechnungsmäßig aus der Verpflichtung zum Beginn des Wirtschaftsjahres entwickelt). Beachten Sie dabei, dass sich je nach Verpflichtung aus der Verpflichtung zum Jahresbeginn auch abgeleitete Verpflichtungen ergeben können, wie z.B. bei einer Rentenzusage mit Witwenrentenanwartschaft am Ende des Jahres rechnungsmäßig Witwen vorhanden sind, für die zusätzlich zur Rückstellung der Hauptverpflichtung eine Rückstellung zu bilden ist. ${}_{m+1}B'_x$ besteht also i.a. nicht nur aus ${}_{m+1}B_x$, sondern zusätzlich noch aus Rückstellungen für abgeleitete Verpflichtungen.

Bem.: Beachten Sie, dass $k^{(t)}$ bei einem Jahresrentenanspruch 1 die folgende Bedeutung hat: Erwartungswert der innerhalb eines Jahres beginnenden, auf das Ende des Jahres aufgezinsten Rentenraten des Jahres.

1. Gehen Sie von der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung

$$ {}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x^{(t)} + vp_{x+m}\,{}_{m+1}V_x \tag{2}$$

aus, mit p_{x+m} je nach Bestand. Zeigen und begründen Sie, dass sich P_m wie folgt darstellen lässt:

$$ P_m = r_m\hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m}\,{}_{m+1}B_x - r_mB_x \tag{3}$$

2. Wir betrachten zunächst den Fall eines Rentners mit der Verpflichtung einer lebenslänglich $\frac{1}{t}$-jährlich im voraus zu zahlenden Rente vom Jahresbetrag R einschließlich einer Witwenrentenanwartschaft in Höhe vom Bruchteil w der Berechtigtenrente. Berechnen Sie P_m, R_m sowie ${}_{m+1}B'_x$.

Bem.: Berechnen Sie $R_m + {}_{m+1}B'_x$ und teilen Sie das Ergebnis auf nach rechnungsmäßigen Zahlungen des Jahres und rechnungsmäßigen Rückstellungen zum Ende des Jahres.

3. Wie 2., doch zum Ende des Wirtschaftsjahres wird die zugesagte Jahresrente von R um ΔR auf $R + \Delta R$ erhöht.

4. Wir betrachten nun eine Zusage an einen Anwärter, der zufolge als Leistungen vorgesehen sind: eine lebenslänglich laufende $\frac{1}{t}$-jährlich vorschüssig zahlbare Alters- bzw. Invalidenrente in Höhe von

jährlich R sowie eine Witwenrentenanwartschaft vom Bruchteil w dieser Rente, also in Höhe von jährlich wR. Beachten Sie, dass in ${}_{m+1}B'_x$ nicht nur der erwartete Barwert des Berechtigten selbst enthalten ist, sondern auch die rechnungsmäßig zu stellende Rückstellung für die Witwe.

4.1. Geben Sie ${}_m\hat{L}_x^{(t)}$ an und berechnen Sie damit P_m.

4.2. Berechnen Sie für diese Verpflichtung R_m sowie ${}_{m+1}B'_x$.

Lösung:

1. Die Bilanzgleichung mit Wertstellung zum Ende des Jahres lautet:

$$r_m V_x + r_m \hat{P}_x = r_m \hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m\ m+1}V_x$$

bzw.

$$r_m \hat{P}_x = r_m \hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m\ m+1}V_x - r_m V_x$$

Nun gilt gemäß Aufgabenstellung

$${}_mV_x = {}_mB_x$$

$${}_{m+1}V_x = {}_{m+1}B_x$$

$$r_m \hat{P}_x = P_m$$

Damit folgt:

$$P_m = r_m \hat{L}_x^{(t)} + p_{x+m\ m+1}B_x - r_m B_x$$

2. $P_m = r_m \hat{L}_x^{(t)} + p^r_{x+m\ m+1}B_x - r_m B_x$

mit

$${}_m\hat{L}_x^{(t)} = R[1 - k^{(t)}(1 - v\, p^r_{x+m})] + v\, wRq^r_{x+m}\, h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}} a^w_{y(x+m)+1}$$

und

$${}_mB_x \;= R[{}^{(t)}a^r_{x+m} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m}]$$

$${}_{m+1}B_x = R[{}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1}]$$

mit

$${}_mB_x = {}_m\hat{L}_x^{(t)} + v\, p^r_{x+m\ m+1}B_x \tag{4}$$

Es folgt:

$P_m = 0$ (wie zu erwarten!)

Bem.: Dieses Ergebnis gilt offenbar genau dann, wenn Gl. (4) gilt. Vergleiche dagegen Teilaufgabe 3.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} R_m + {}_{m+1}B'_x &= r_m B_x + P_m \quad \text{nach Gl. (1)} \\ &= r_m \hat{L}_x^{(t)} + p^r_{x+m\ m+1}B_x \text{ nach Gl. (3)} \\ &= rR[1 - k^{(t)}(1 - vp^r_{x+m})] + wRq^r_{x+m}h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}}k^{(t)} \\ &\quad + wRq^r_{x+m}h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}}{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1} \\ &\quad + p^r_{x+m}R[{}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$R_m \quad = R\{r[1 - k^{(t)}(1 - vp^r_{x+m})] + wk^{(t)}q^r_{x+m}h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}}\}$$

$${}_{m+1}B'_x = R\{p^r_{x+m}[{}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1}] + wq^r_{x+m}h_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x+m)+\frac{1}{2}}{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1}\}$$

3. Seien Sie die Größen G von Teilaufgabe 2 mit G(2) bezeichnet.
${}_m\hat{L}_x^{(t)}$ und ${}_mB_x$ von Teilaufgabe 2 bleiben unverändert, da die Anspruchserhöhung zum Ende des Jahres erfolgt:

$${}_m\hat{L}_x^{(t)} = {}_m\hat{L}_x^{(t)}\,(2),$$

$${}_mB_x = {}_mB_x\,(2);$$

dagegen gilt:

$$\begin{aligned}
{}_{m+1}B_x &= (R + \Delta R)\,({}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1})\\
&= {}_{m+1}B_x(2) + \Delta R({}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1})
\end{aligned}$$

Es folgt wegen Gl. (4):

$$P_m = \Delta R p^r_{x+m}({}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1})$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
R_m + {}_{m+1}B'_x = rR[1 - k^{(t)}(1 - vp^r_{x+m})] &+ wRk^{(t)}q^r_{x+m}\, h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\\
&+ wRq^r_{x+m}h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1}\\
&+ (R + \Delta R)p^r_{x+m}({}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
R_m &= rR[1 - k^{(t)}(1 - vp^r_{x+m})] + wRk^{(t)}q^r_{x+m}h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12} = R_m\,(2)\\
{}_{m+1}B'_x &= (R + \Delta R)p^r_{x+m}({}^{(t)}a^r_{x+m+1} + w^{(t)}a^{rw}_{x+m+1}) + wRq^r_{x+m}h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1}\\
&= {}_{m+1}B'_x(2) + P_m
\end{aligned}$$

4.1.

$$\begin{aligned}
{}_m\hat{L}_x^{(t)} &= {}^{(t)}_{m}L_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{2} q^{(i)}_{x+i}\,{}^{(t)}_{m}L_x^{(i)}\\
&= i_{x+m}\, Rv^{\frac12}\,({}^{(t)}a^i_{x+m+\frac12} + w^{(t)}a^{iw}_{x+m+\frac12}) + q^{aa}_{x+m}\, h_{x+m}\, wRv^{\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+\frac12} \text{ f. } m < n\\
&= R({}^{(t)}a^r_z + w^{(t)}a^{rw}_z) \text{ f. } m = n
\end{aligned}$$

Dabei gilt $x + n = z$ mit z: Pensionsalter laut Zusage

$$\begin{aligned}
P_m &= r_m\hat{L}_x^{(t)} + p^a_{x+m}\,{}_{m+1}B_x - r_mB_x\\
&= r^{\frac12}\, R[i_{x+m}\,({}^{(t)}a^i_{x+m+\frac12} + w^{(t)}a^{iw}_{x+m+\frac12}) + wq^{aa}_{x+m}\, h_{x+m}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+\frac12}] + p^a_{x+m}\,{}_{m+1}B_x - r_mB_x
\end{aligned}$$

Bem.: Man beachte, dass ${}_mB_x$ bzw. ${}_{m+1}B_x$ Barwerte eines – beliebig definierten – erdienten Anspruchs sind, also nicht notwendigerweise die Barwerte nach Zusage. In diesem Fall wäre $P_m = 0$.

4.2.

$$\begin{aligned}
{}^{(t)}a^i_{x+\frac12} &= v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^i_{x+\frac12}\, a^i_{x+1} = v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^i_{x+\frac12}\, k^{(t)} + v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^i_{x+\frac12}\,{}^{(t)}a^i_{x+1}\\
{}^{(t)}a^{iw}_{x+\frac12} &= v^{\frac12}\,{}_{\frac12}q^i_{x+\frac12}\, h_x\,{}_{\frac12}p^w_{y(x)+\frac12}\, k^{(t)} + v^{\frac12}\,[{}_{\frac12}p^i_{x+\frac12}\,{}^{(t)}a^{iw}_{x+1} + {}_{\frac12}q^i_{x+\frac12}\, h_x\,{}_{\frac12}p^w_{y(x)+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x)+1}]\\
{}^{(t)}a^w_{y+\frac12} &= v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^w_{y+\frac12}\, a^w_{y+1} = v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^w_{y+1.}\, k^{(t)} + v^{\frac12}\,{}_{\frac12}p^w_{y+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y+1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
R_m + {}_{m+1}B'_x &= r_m\hat{L}_x^{(t)} + p^a_{x+m}\,{}_{m+1}B_x\\
&= R[i_{x+m}({}_{\frac12}p^i_{x+m+\frac12}[(k^{(t)} + {}^{(t)}a^i_{x+m+1}) + w^{(t)}a^{iw}_{x+m+1}]\\
&\quad + w\,{}_{\frac12}q^i_{x+m+\frac12}h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,(k^{(t)} + {}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1}))\\
&\quad + w\, q^{aa}_{x+m}\, h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,(k^{(t)} + {}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1})] + p^a_{x+m}\,{}_{m+1}B_x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
R_m &= Rk^{(t)}\,[i_{x+m}({}_{\frac12}p^i_{x+m+\frac12} + w\,{}_{\frac12}q^i_{x+m+\frac12}\, h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}) + w\, q^{aa}_{x+m}h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}]\\
{}_{m+1}B'_x &= R\,[i_{x+m}\,({}_{\frac12}p^i_{x+m+\frac12}\,({}^{(t)}a^i_{x+m+1} + w\,{}^{(t)}a^{iw}_{x+m+1}) + w\,{}_{\frac12}q^i_{x+m+\frac12}\, h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1})\\
&\quad + w\, q^{aa}_{x+m}\, h_{x+m}\,{}_{\frac12}p^w_{y(x+m)+\frac12}\,{}^{(t)}a^w_{y(x+m)+1}] + p^a_{x+m}\,{}_{m+1}B_x
\end{aligned}$$