Bericht zur Prüfung im September 2001 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 24. bis 26. September 2001 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluss an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Die Analyse des Beharrungszustandes eines Versorgungswerkes gibt wichtige Anhaltspunkte für die langfristigen Belastungen aus Versorgungsverpflichtungen.

i) Erläutern Sie den Begriff des Beharrungszustandes eines Versorgungssystems.

ii) Wie lassen sich im Bevölkerungsmodell der Richttafeln 1998 die Anzahlen der Aktiven und der Rentenempfänger für den Beharrungszustand eines Versorgungssystems mithilfe von Barwerten darstellen?
Anleitung: Unterstellen Sie einen jährlichen Neuzugang von 10 Personen des einheitlichen Alters x und geben Sie jeweils getrennt die Formel für die Anzahl der Aktiven, der Invalidenrentner (unterhalb der Altersgrenze), der Altersrentner und der Witwen an.

iii) Beschreiben Sie durch geeignete Barwerte die Relation aus Rentenlast und Entgeltsumme eines Versorgungssystems im Beharrungszustand bei einem Rentenniveau von 10% des letzten Entgeltes vor Eintritt des Versorgungsfalles unter Berücksichtigung einer ggf. abweichenden jährlichen Erhöhungsrate der Entgelte einerseits und der Renten andererseits.
Anleitung: Unterstellen Sie einen jährlichen Neuzugang von 10 Personen des einheitlichen Alters x und ein betriebliches Versorgungssystem mit Anwartschaften auf Invaliden-, Alters- und (60%) Witwenrenten. Die Rentenformel sei unabhängig von der im Versorgungsfall zurückgelegten Dienstzeit (gleichbleibende Anwartschaft); eine Wartezeit sei nicht vorgesehen.

iv) Der Aktivenbestand eines Versorgungssystems, das sich im Beharrungszustand befindet und aus Neuzugängen des Alters x erneuert wird, betrage 1000 Personen. Geben Sie eine Formel für die Anzahl des jährlichen Neuzuganges an, der notwendig ist, damit die Anzahl des Aktivenbestandes konstant bleibt. Schätzen Sie dies Zugangszahl für $x = 30$ und einen Altersrentenbeginn im Alter 65.

v) Im absoluten bzw. relativen Beharrungszustand bleibt das Deckungskapital insgesamt von Jahr zu Jahr absolut bzw. relativ konstant. Schätzen Sie aus der allgemeinen Entwicklungsgleichung für das Deckungskapital die Höhe des Deckungskapitals im absoluten bzw. relativen Beharrungszustand ab.
Anleitung: Setzen Sie die Summe der Jahresbeiträge, der Renten, der Dynamisierungsrate (im relativen Beharrungszustand) und die Höhe des Rechnungszinses als bekannt voraus und geben Sie das Deckungkapital als Funktion der genannten Größe an.

Lösung:

i) Ein Versorgungssystem befindet sich im absoluten Beharrungszustand, wenn die Anzahlen der jährlichen Zu- und Abgänge übereinstimmen und die Teilbestände der Aktiven, Ausgeschiedenen und Rentner konstant sind.

ii) Für die Darstellung der Anzahlen von Aktiven und Rentenempfängern im Beharrungszustand können die Barwerte zum Zinssatz 0% verwendet werden, denn diese geben die Anzahl der nach dem jeweiligen Alter noch fälligen künftigen Rentenzahlungen wider.
So lassen sich im Einzelnen darstellen bei jeweils 10 Zugängen des Alters x pro Jahr:

Anzahl der Aktiven

$$10 \cdot a^{a}_{x\,\overline{z-x}|}$$

Anzahl der Invalidenrentner (unterhalb der Altersgrenze)

$$10 \cdot a_x^{ai(z)}$$

Anzahl der Altersrentner

$$10 \cdot (a_x^{ai\,A} - a_x^{ai\,(z)})$$

Anzahl der Witwenrentner

$$10 \cdot a_x^{aw}$$

iii) Die Formel lautet:

$$\frac{10 \cdot (a_x^{aiA} + 0{,}6\, a_x^{aw}) \cdot 0{,}1}{10 \cdot a^{a}_{x\,\overline{z-x}|}}$$

darin beträgt der Zins für Anwartschaften 0% und entspricht für Renten der Differenz zwischen Entgelt- und Rententrend.

iv) Im Beharrungszustand gilt für den Aktivenbestand B der Zusammenhang

$$B = Z \cdot a^{a}_{x\,\overline{z-x}|}$$

Hieraus folgt für den jährlichen Zugang Z die Gleichung

$$Z = \frac{B}{a^{a}_{x\,\overline{z-x}|}}.$$

In einem Versorgungssystem kann man ab Alter x = 30 mit einem Bestand von etwa 30 Aktiven je Neuzugang rechnen. Ein Bestand von 1000 Aktiven benötigt daher etwa 1000/30 = 33 Neuzugänge jährlich um stabil zu bleiben.

v) Auch im Beharrungszustand gilt die Entwicklungsausgleichung für das Deckungskapital, also

$$V_{t+1} = V_t + P + Z - R, \quad \text{mit} \quad Z = i \cdot (V + P - 0{,}5\,R)\,.$$

Wegen $V_{t+1} = V_t$ folgt daraus

$$V = V + P + i \cdot V + i \cdot P - 0{,}5 \cdot i \cdot R - R$$

aufgelöst nach V ergibt sich $V = 1/i \cdot [R\,(1 + 0{,}5\,i) - P\,(1 + i)]$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

In der Praxis der Beurteilung der Auswirkungen der betrieblichen Altersversorgung werden mitunter abenteuerliche Behauptungen aufgestellt, die oft bestenfalls als Halbwahrheiten gewertet werden können oder zumindest relativiert werden müssen. Nehmen Sie auf der Basis des Modells der Sekundärdaten kritisch und begründet Stellung zu den folgenden Behauptungen dieser Art:

i) Die steuerliche Anerkennung des Aufwandes für die Dotierung der Pensionsrückstellung begünstigt die interne Pensionszusage im Vergleich zu einer entsprechenden externen Durchführung der betrieblichen Altersversorgung.

Hinweis: Betrachten Sie Aufwand und Ertrag aus dem Finanzierungsprozess der Pensionsverpflichtung zunächst unter der Bedingung, dass der Rechnungszins und der tatsächlich erzielte Zins übereinstimmen und unabhängig davon sind, ob die Finanzierung intern oder extern erfolgt. Diskutieren Sie dann die Effekte, die sich bei unterschiedlichem Rechnungszins und tatsächlich erzieltem Zins tendenziell ergeben.

ii) Bei externer Durchführung der betrieblichen Altersversorgung ist der Aufwand deutlich geringer als bei der internen finanzierten Pensionszusage, weil die Verzinsung auf die jeweils angesammelten Versorgungsmittel vom externen Versorgungsträger erbracht wird. Also ergibt sich hieraus für externe Durchführungswege ein deutlicher Kostenvorteil.
Hinweis: Erörtern Sie den Begriff der Kosten einer Pensionsverpflichtung bei externer und interner Finanzierung und unterscheiden Sie zwischen den Kosten für die Nutzung von Arbeitsleistung einerseits und die Nutzung von Kapital andererseits; interpretieren Sie die Kostenbestandteile versicherungsmathematisch.

iii) Betriebliche Altersversorgung lohnt sich für einen steuerpflichtigen Arbeitgeber, weil er den damit verbundenen Aufwand als Betriebsausgaben steuerlich geltend machen kann.
Hinweis: Unterstellen Sie als Alternative zur Gewährung von betrieblicher Altersversorgung die Zahlung höherer Entgelte.

Lösung:

i) Der Aufwand für eine unmittelbare Pensionszusage setzt sich zusammen aus der Veränderung der Rückstellung und den erbrachten Versorgungsleistungen. Die Veränderung der Rückstellung ihrerseits entspricht bei rechnungsmäßigem Verlauf der Summe der (fiktiven) Prämien und dem Rechnungszins auf die vorhandene Rückstellung, vermindert um die erbrachten Versorgungsleistungen. Damit lässt sich der Aufwand interpretieren als Summe aus den (fiktiven) Prämien und der Verzinsung der Rückstellung.
Steuerliche Anerkennung des Aufwandes bedeutet, dass die (fiktiven) Prämien und die Verzinsung der Rückstellung als Betriebsausgaben abzugsfähig sind. Bei der intenen finanzierten Pensionsverpflichtung steht dem Zinsaufwand ein steuerpflichtiger Zinsertrag aus den im Unternehmen verbliebenen, der Rückstellung entsprechenden Mitteln gegenüber. Stimmen Zinsertrag und Zinsaufwand überein, bleibt im Ergebnis lediglich die (fiktive) Prämie ergebniswirksam und steuermindernd.
Bei externer Finanzierung ist die an die Versorgungseinrichtung zu zahlende Prämie steuerlich als Betriebsausgabe abzugsfähig. Bei übereinstimmenden Rechnungsgrundlagen ist demnach der steuerwirksame Aufwand bei übereinstimmender Verpflichtung identisch. Ein besonderer steuerlicher Vorteil der Innenfinanzierung ist nicht erkennbar.

ii) Wie bereits unter i) dargestellt, ist der Unterschied zwischen dem Aufwand bei interner Finanzierung und dem Aufwand bei externer Finanzierung die Verzinsung der intern vorgehaltenen Deckungsmittel. Dieser Zinsaufwand wird durch die entsprechenden Zinserträge bei rechnungsmäßigem Verlauf neutralisiert. Ein grundsätzlicher Kostenvorteil besteht daher nicht.
Der durch die Prämien dargestellte Teil der Kosten korrespondiert mit der Arbeitsleistung der Berechtigten. Er kann als die Personalkosten der Altersversorgung interpretiert werden. Die Kosten für die Nutzung des Kapitals indes stehen der Nutzung des Kapitals gegenüber, sie sind als Kapitalkosten zu klassifizieren.

iii) Die steuerliche Abzugsfähigkeit einer Betriebsausgabe allein macht diese noch nicht lohnend für das Unternehmen. Ebenso wenig lohnt sich für ein Unternehmen die Zahlung von Entgelten allein schon deshalb, weil auch diese steuerlich als Betriebsausgaben abgezogen werden können. Vielmehr kommt es für die Beurteilung der Effizienz der steuerlichen Berücksichtigung von Versorgungszusagen darauf an, ob das Volumen der als Betriebsausgaben abzugsfähigen Beiträge (Prämien) einen der Versorgungszusage gleichwertigen Entgeltzuschlag übersteigen oder nicht. Dies ist dann der Fall, wenn die Prämien vergleichsweise vorsichtig, d.h. mit einem unter dem Refinanzierungszins der Unternehmen liegenden Zinssatz ermittelt werden dürfen. Dies ist bei einem Zins von 6% – wie er für unmittelbare Pensionsverpflichtungen steuerlich vorgeschrieben ist – wohl kaum der Fall.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

In den Ihnen vorliegenden „Formeln der Pensionsversicherungsmathematik"[1]) sind in Abschnitt 3.2 die Übergangswahrscheinlichkeiten[2]) aufgeführt, auf denen dem Grunde nach, ausgehend von einem Aktivenbestand mit zwei Ausscheideursachen, das Modell der Richttafeln 1998 von Heubeck basiert, wobei auch die von Heubeck benutzten Näherungen angegeben sind.

1. Stellen Sie die in diesem Abschnitt aufgeführten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der im Seminar bzw. im 2. Kapitel des Ihnen vorliegenden Buches „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen" definierten reellwertigen Zufallsgrößen

   X_1: Alter des Berechtigten bei Eintritt der Invalidität
   X_2: Alter des Berechtigten bei Eintritt des Todes

   sowie – soweit notwendig – der Zufallsgröße

   Y: Alter des Ehegatten bei Eintritt des Todes

   dar.
   Hinweis: Bei q_x^b und p_x^{bw} genügt die Angabe für $b \in \{i, g\}$.

2. Beweisen Sie auf der Basis dieser Wahrscheinlichkeiten die Beziehung

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}.$$

3. Beweisen Sie desweiteren auf der Basis dieser Wahrscheinlichkeiten die 1. Gleichung von Abschnitt 3.3, also

$$p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}.$$

4. l_x^I bedeutet für die Wahrscheinlichkeit des Berechtigten, im Alter x invalide zu sein. Stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit mithilfe der Zufallsgrößen X_1 und X_2 dar und drücken Sie diese Wahrscheinlichkeit mifhilfe von l_x^g und l_x^a aus.

5. Beweisen Sie desweiteren auf der Basis dieser Wahrscheinlichkeiten Gl. (3.1) von Abschnitt 3.3, also

$$p_x^{gw} = \frac{l_x^a}{l_x^g}\, p_x^{aw} + \frac{l_x^I}{l_x^g}\, p_x^{iw}.$$

Lösung:

1.
$$
\begin{aligned}
q_x^i &= P\{X_2 \le x+1 | X_1 \le x, X_2 > x\} \\
q_x^g &= P\{X_2 \le x+1 | X_2 > x\} \\
q_x^{aa} &= P\{X_2 \le \min(x+1, X_1) | X_1 > x, X_2 > x\} = P\{X_2 \le x+1, X_2 \le X_1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
i_x &= P\{X_1 \le \min(x+1, X_2) | X_1 > x, X_2 > x\} \\
p_x^{ai} &= P\{X_1 \le \min(x+1, X_2), X_2 > x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= P\{X_1 \le x+1, X_1 \le X_2, X_2 > x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
q_x^{ai} &= P\{X_1 \le \min(x+1, X_2), X_2 \le x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= P\{X_1 \le x+1, X_1 \le X_2, X_2 \le x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
&= P\{X_2 \le x+1, X_1 \le X_2 | X_1 > x, X_2 > x\}, \quad \text{da} \quad \{X_1 \le X_2, X_2 \le x+1\} \subset \{X_2 \le x+1\} \\
q_x^a &= P\{X_2 \le x+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\
p_x^{iw} &= P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_1 \le x, X_2 > x\}
\end{aligned}
$$

[1]) *Neuburger, Edgar:* „Formeln der Pensionsversicherungsmathematik", http://www.neuburger.com/formeln.html
[2]) vgl. Anlage

$$p_x^{gw} = P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_2 > x\}$$
$$p_x^{aaw} = P\{X_2 \le \min(x+1, X_1), Y > y(x)+1 | X_1 > x, X_2 > x\}$$
$$= P\{X_2 \le x+1, X_2 \le X_1, Y > y(x)+1 | X_1 > x, X_2 > x\}$$
$$p_x^{aiw} = P\{X_2 \le x+1, X_1 \le X_2, Y > y(x)+1 | X_1 > x, X_2 > x\}$$
$$p_x^{aw} = P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_1 > x, X_2 > x\}$$

2. $q_x^{aa} + q_x^{ai} = P\{X_2 \le x+1, X_2 \le X_1 | X_1 > x, X_2 > x\} + P\{X_2 \le x+1, X_1 \le X_2 | X_1 > x, X_2 > x\}$

   Nun gilt:

   $\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 \le X_1\} \cap \{X_2 \le x+1\} \cap \{X_1 \le X_2\} = \emptyset$

   da

   $\{X_2 \le X_1\} \cap \{X_1 \le X_2\} = \{X_1 = X_2\} = \emptyset$ (Zwillingsereignisfreiheit).

   Zudem:

   $$(\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 \le X_1\}) \cup (\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_1 \le X_2\})$$
   $$= \{X_2 \le x+1\} \cap (\underbrace{\{X_2 \le X_1\} \cup \{X_1 \le X_2\}}_{\Omega}\})$$
   $$= \{X_2 \le x+1\}$$

   Es folgt:

   $q_x^{aa} + q_x^{ai} = P\{X_2 \le x+1 | X_1 > X_2 > x\} = q_x^{a}$

3. $p_x^{aaw} + p_x^{aiw} = P\{X_2 \le x+1, X_2 \le X_1, Y > y(x+1) | X_1 > x, X_2 > x\} + P\{X_2 \le x+1, X_1 \le X_2, Y > y(x)+1\}$

   Nun gilt:

   $\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 \le X_1\} \cap \{Y > y(x+1)\} \cap \{X_2 \le x+1\} \cap \{X_1 \le X_2\}) \cap \{Y > y(x)+1\} = \emptyset,$

   da

   $\{X_2 \le X_1\} \cap \{X_1 \le X_2\} = \{X_1 = X_2\} = \emptyset$ (Zwillingsereignisfreiheit).

   Zudem:

   $$(\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_2 \le X_1\} \cap \{Y > y(x+1)\}) \cup (\{X_2 \le x+1\} \cap \{X_1 \le X_2\} \cap \{Y > y(x+1)\})$$
   $$\{X_2 \le x+1\} \cap \{Y > y(x+1)\}) \cap (\underbrace{\{X_2 \le X_1\} \cup \{X_1 \le X_2\}}_{\Omega})$$
   $$= (\{X_2 \le x+1\} \cap \{Y > y(x+1)\}$$

   Es folgt:

   $p_x^{aaw} + p_x^{aiw} = P\{X_2 \le x+1, Y > y(x+1) | X_1 > x, X_2 > x\} = p_x^{aw}$

4. $l_x^I = P\{X_1 \le x, X_2 > x\}$

Nun ist:

$$(\{X_1 \le x\} \cap \{X_2 > x\}) \cup (\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}) = (\underbrace{\{X_1 \le x\} \cup \{X_1 > x\}}_{\Omega}) \cap \{X_2 > x\} = \{X_2 > x\}$$

und

$$\{X_1 \le x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}) = \emptyset,$$

da

$$\{X_1 \le x\} \cap \{X_1 > x\} = \emptyset$$

Es folgt:

$$\underbrace{P\{X_1 \le x, X_2 > x\}}_{l_x^I} + \underbrace{P\{X_1 > x, X_2 > x\}}_{l_x^a} = \underbrace{P\{X_2 > x\}}_{l_x^g},$$

Also:

$$l_x^I = l_x^g - l_x^a .$$

5.
$$\begin{aligned} l_x^g\, p_x^{gw} &= P\{X_2 > x\}\, P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_2 > x\} \\ &= P\{x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \\ l_x^a\, p_x^{aw} &= P\{X_1 > x, X_2 > x\}\, P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_1 > x, X_2 > x\} \\ &= P\{X_1 > x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \\ l_x^I\, p_x^{iw} &= P\{X_1 \le x, X_2 > x\}\, P\{X_2 \le x+1, Y > y(x)+1 | X_1 \le x, X_2 > x\} \\ &= P\{X_1 \le x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\}. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\{X_1 > x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \cap \{X_1 \le x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} = \emptyset,$$

da

$$\{X_1 > x\} \cap \{X_1 \le x\} = \emptyset$$

und

$$\begin{aligned} &\{X_1 > x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \cup \{X_1 \le x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \\ &= (\underbrace{\{X_1 > x\} \cup \{X_1 \le x\}}_{\Omega}) \cap \{x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \\ &= \{x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} &P\{x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} = P\{X_1 > x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \\ &+ P\{X_1 \le x, x < X_2 \le x+1, Y > y(x)+1\} \end{aligned}$$

also

$$l_x^g\, p_x^{gw} = l_x^a\, p_x^{aw} + l_x^I\, p_x^{iw}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Ein Unternehmen, das einem Mitarbeiter (Berechtigter) eine Pensionszusage gewährt hat, möchte bei der anstehenden Gehaltserhöhung seinen personellen Jahresaufwand für diese Verpflichtung berücksichtigen. Zum Stichtag des Vorjahres (m Jahre nach dem Beginn des Jahres des Eintritts des Berechtigten, der zu diesem Zeitpunkt versicherungstechnisch x Jahre alt war) betrage der Teilwert der Verpflichtung ${}_mV_x = R\ {}_mV_x'$, wobei ${}_mV_x'$ der Teilwert der Verpflichtung zu diesem Stichtag bei einem Rentenanspruch von 1 sei (normierter Teilwert); R stellt demnach den Rentenanspruch des Berechtigten nach dem Stand zu diesem Stichtag dar. Kurz nach diesem Stichtag wird der Rentenanspruch ab Jahresbeginn um den Betrag ΔR erhöht, so dass sich zum Folgestichtag der Teilwert der Verpflichtung auf $(R + \Delta R)\ {}_{m+1}V_x'$ stellt.

1. Stellen Sie für die normierten Werte – Rentenanspruch = 1 – den Teilwert ${}_mV_x'$, $m = 0, \dots, n-1$ ($n = z - x$, z: Pensionsalter), die jährlich vorschüssig zahlbare jährlich gleichbleibende Jahresprämie P_x', die jährlich vorschüssig zahlbare Sparprämie ${}_mP_x'^S$ und die jährlich vorschüssig zahlbare Risikoprämie ${}_mP_x'^R$ in Abhängigkeit von den normierten Leistungsbarwerten a_{x+m}' $m = 0, \dots, n$, bzw. den diesen zu Grunde liegenden Größen dar und geben Sie die versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen für die normierte Verpflichtung an.
2. Zeigen Sie, dass der personelle Jahresaufwand (= fiktive Jahresprämie unter Berücksichtigung der Erhöhung des Rentenanspruchs) ${}_mP_x$ für die Verpflichtung für das (m + 1)-te Jahr sich wie folgt darstellen lässt:
$$ {}_mP_x = R\,P_x' + \Delta R\,(P_x' + {}_mV_x')\,. $$
3. Geben Sie die Risikoprämie ${}_mP_x^R$ für diese Verpflichtung mithilfe der Werte für die normierte Verpflichtung an und stellen Sie sie als Summe von 2 Termen dar, wovon der 1. proportional zu R und der 2. proportional zu ΔR ist (analog zur Darstellung von ${}_mP_x$).
4. Geben Sie die Sparprämie ${}_mP_x^S$ für diese Verpflichtung mithilfe der Werte für die normierte Verpflichtung an und stellen Sie sie als Summe von 2 Termen dar, wovon der 1. proportional zu R und der 2. proportional zu ΔR ist (analog zur Darstellung von ${}_mP_x$).
5. Zerlegen Sie die Zuführung ${}_{m+1}V_x - {}_mV_x$ in einen Prämien- und in einen Zinsanteil, und stellen Sie beide Werte mithilfe der Werte für die normierte Verpflichtung als Summe von 2 Termen dar, wovon jeweils der 1. proportional zu R und der 2. proportional zu ΔR ist (analog zur Darstellung von ${}_mP_x$).
   Hinweis: Beachten Sie, dass die Zahlungsweise des Prämienanteils jährlich vorschüssig ist!
6. (Zusatzüberlegung) Sei a_x der Barwert eines x-jährigen einer jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1. Begründen Sie, warum
$$ i\,(a_x - 1) $$
   nicht den gesamten Zinsanteil umfasst, der in der Auflösung $a_{x+1} - a_x$ berücksichtigt wird. Geben Sie den korrekten Zinsanteil an!

Lösung

1. Für m = 0, 1, …, n gilt

$$ {}_mV_x' = a_{x+m}' - \frac{a_x'}{a_x^a}\,a_{x+m}^a = a_{x+m}' - P_x'\,a_{x+m}^a $$
$$ P_x' = \frac{a_x'}{a_x^a} $$
$$ {}_mP_x'^S = v\ {}_{m+1}V_x' - {}_mV_x' $$
$$ {}_mP_x'^R = {}_mL_x' - v\,q_{x+m}\ {}_{m+1}V_x' $$
$$ \text{mit}\quad {}_mL_x' = a_{x+m}' - v\,p_{x+m}^a\,a_{x+m+1}' $$
$$ \text{und}\quad q_{x+m} = i_{x+m} + q_{x+m}^{aa}\,. $$

Versicherungsmathematische Bilanzgleichungen:

$$ {}_mV'_x + P'_x = {}_mL'_x + v\, p^a_{x+m}\ {}_{m+1}V'_x\,. $$

2. $$ {}_mP_x = {}_m\hat{L}_x + v\, p^a_{x+m}\ {}_{m+1}V_x - {}_mV_x $$
$$ = \underbrace{(R+\Delta R)\ {}_mL'_x + v\, p^a_{x+m}\,(R+\Delta R)\, a'_{x+m+1}}_{(R+\Delta R)\, a'_{x+m}} - v\, p^a_{x+m}\,(R+\Delta R)\, P'_x\ a^a_{x+m+1} $$
$$ - R\, a'_{x+m} + R\, P'_x\ a^a_{x+m} $$
$$ = \Delta R\, a'_{x+m} + R\, P'_x\ \underbrace{(a^a_{x+m} - v\, p^a_{x+m}\ a^a_{x+m+1})}_{1} - v\, p^a_{x+m}\ \Delta R\, P'_x\ a^a_{x+m+1} $$
$$ = \Delta R\, a'_{x+m} + R\, P'_x - \Delta R\, P'_x\ \underbrace{v\, p^a_{x+m}\ a^a_{x+m+1}}_{a^a_{x+m}-1} $$
$$ = R\, P'_x + \Delta R\ \underbrace{(a'_{x+m} - P'_x\ a^a_{x+m})}_{{}_mV'_x} + \Delta R\, P'_x $$
$$ = R\, P'_x + \Delta R\,(P'_x + {}_mV'_x). $$

3. $$ {}_mP^R_x = {}_m\hat{L}_x - v\, q_{x+m}\ {}_{m+1}V_x $$
$$ = (R+\Delta R)\ {}_mL'_x - v\, q_{x+m}\ (R+\Delta R)\ {}_{m+1}V'_x $$
$$ = (R+\Delta R)\ \underbrace{({}_mL'_x - v\, q_{x+m}\ {}_{m+1}V'_x)}_{{}_mP'^R_x} $$
$$ = R\ {}_mP'^R_x + \Delta R\ {}_mP'^R_x\,. $$

4. $$ {}_mP^S_x = v\ {}_{m+1}V_x - {}_mV_x $$
$$ = v\,(R+\Delta R)\ {}_{m+1}V'_x - R\ {}_mV'_x $$
$$ = R\,(v\ {}_{m+1}V'_x - {}_mV'_x) + \Delta R\ v\, {}_{m+1}V'_x $$
$$ = R\ {}_mP'^S_x + \Delta R\ v\ {}_{m+1}V'_x\,. $$

5. Sei $Z = i\,({}_mV_x + {}_mP^S_x)$ der Zinsanteil des Jahres.
Dann gilt wegen ${}_{m+1}V_x = {}_mV_x + {}_mP^S_x + Z$:

$$ Z = {}_{m+1}V_x - {}_mV_x - {}_mP^S_x $$
$$ = {}_{m+1}V_x - {}_mV_x - (v\ {}_{m+1}V_x - {}_mV_x) $$
$$ = (1-v)\ {}_{m+1}V_x $$
$$ = d\ {}_{m+1}V_x\,. $$

Für die Zuführung ${}_{m+1}V_x - {}_mV_x$ folgt:

$$ {}_{m+1}V_x - {}_mV_x = {}_mP^S_x + d\ {}_{m+1}V_x $$
$$ = R\ {}_mP'^S_x + \Delta R\ v\ {}_{m+1}V'_x + (R+\Delta R)\, d\ {}_{m+1}V'_x $$
$$ = \underbrace{R\ {}_mP'^S_x + \Delta R\ v\ {}_{m+1}V'_x}_{\text{Prämienanteil}} + \underbrace{R\, d\ {}_{m+1}V'_x + \Delta R\, d\ {}_{m+1}V'_x}_{\text{Zinsanteil}} $$

Bem.: Die Darstellung ${}_{m+1}V_x - {}_mV_x = R\ {}_mP'^S_x + R\, d\ {}_{m+1}V'_x + \Delta R\ {}_{m+1}V'_x$ verwässert diesen Zusammenhang!

6. Nach 5. stellt sich der Zinsanteil auf

$$Z = d\, a_{x+1},$$

damit:

$$\begin{aligned} Z - i(a_x - 1) &= d\, a_{x+1} - \overbrace{iv}^{d}\, p_x\, a_{x+1} \\ &= d\, a_{x+1}\,(1 - p_x) \\ &= d\, q_x\, a_{x+1}. \end{aligned}$$

Der an $i\,(a_x - 1)$ fehlende Zinsanteil ist also $d\, q_x\, a_{x+1}$. Zur Erläuterung die folgende Darstellung:

$$a_{x+1} = r\,(a_x - 1) + q_x\, a_{x+1}.$$

$q_x\, a_{x+1}$ stellt die Vererbung mit Wertstellung Ende des Jahres dar. Denn aus dem anfänglichen Betrag am Jahresanfang a_x geht zunächst infolge von Rentenzahlung und Vererbung der Betrag

$$1 - v\, q_x\, a_{x+1}$$

weg, so dass also zum Beginn des Jahres zur Ansparung der Betrag

$$a_x - 1 + v\, q_x\, a_{x+1},$$

verbleibt. Damit steht zusammen mit dem Zins des Jahres von

$$i\,(a_x - 1 + v\, q_x\, a_{x+1})$$

zum Ende des Jahres der Betrag

$$r\,(a_x - 1 + v\, q_x\, a_{x+1}) = r\,v\,(p_x + q_x)\, a_{x+1} = a_{x+1}$$

zur Verfügung. $d\, q_x\, a_{x+1}$ stellt damit den Zinsanteil der Vererbung dar.

Anlage: Übergangswahrscheinlichkeiten

q_x^b Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x, innerhalb eines Jahres zu sterben $b \in \{r, i, g, w\}$ (wie RT98).

q_x^{aa} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben (wie RT98).

i_x Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden (wie RT98).

p_x^{ai} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben (Näherung RT98: $i_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}$).

q_x^{ai} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr – als Invalider – zu sterben (vgl. [2], Gl. (33); Näherung RT98: $i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$).

q_x^a Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben ($q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$; Näherung RT98: $q_x^{aa} + i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$).

q_x^{bw} Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands b mit Alter x, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht, $b \in \{r, i, g\}$ (Näherung RT98: $q_x^b\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$).

p_x^{aaw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres als Aktiver unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht (Näherung RT98: $q_x^{aa}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$).

p_x^{aiw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht (Näherung RT98: $i_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+\frac{1}{2}}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$; Näherung gemäß [2]: $i_x\, {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}\, h_x\, {}_{\frac{1}{2}}p^w_{y(x)+\frac{1}{2}}$ (Beweis siehe 3.3)).

p_x^{aw} Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung eines Ehegatten zu sterben, der das Ende des Jahres mit Alter $y(x) + 1$ erreicht ($p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$).