Bericht zur Prüfung im September 2000 über Pensionsversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Edgar Neuburger (München)

In der Zeit vom 25. bis 27. September 2000 führte der Berichterstatter zusammen mit Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks ein Seminar Spezialwissen über Pensionsversicherungsmathematik durch, das vom IVS-Institut der Versicherungsmathematischen Sachverständigen für Altersversorgung anerkannt wird. Im Anschluss an dieses Seminar bestand die Möglichkeit, vor dem IVS-Institut als Teil der Gesamtprüfung dieses Fachgebiet prüfen zu lassen. Die erfolgreiche Teilnahme an dieser Teilprüfung stellt eine Prüfung im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DGVM bzw. im Sinne von § 4 Abs. 1 Buchst. b der Satzung der DAV dar und bot daher den Teilnehmern die Möglichkeit, eine der Aufnahmebedingungen für die Mitgliedschaft in der DGVM bzw. in der DAV zu erfüllen. 34 von 42 Teilnehmern haben die Prüfung mit Erfolg bestanden.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben zu lösen waren. Aufgaben und Musterlösungen 1 und 2 stammen von Herrn Dipl.-Math. Hartmut Engbroks, Aufgaben und Musterlösungen 3 und 4 vom Berichterstatter. Insgesamt mussten mindestens 36 Punkte von 100 möglichen Punkten erreicht werden. In Aufgabe 1 und 2 konnten maximal 30 Punkte, in Aufgabe 3 und 4 maximal 20 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Die Pensionsrückstellung (Teilwert nach § 6a EStG) der Firma Tal GmbH ist innerhalb eines Wirtschaftsjahres von 3,65 Mio. DM auf 3,79 Mio. DM angestiegen, im Wirtschaftsjahr wurden an Rentner insgesamt 180.000 DM ausgezahlt. In dem Wirtschaftsjahr gab es, abgesehen von einer Anpassung der Renten um 2%, keine inhaltliche Veränderung der Pensionsverpflichtungen, der Bestand entwickelte sich rechnungsmäßig. Die Pensionszusagen sind im Anwartschaftsstadium statisch; laufende Renten werden nach § 16 BetrAVG angepasst.
Die Firma SüdBesitz GmbH erwägt einen Kauf der BergTal GmbH, um ihr Geschäftsfeld abzurunden. Helfen Sie ihr, ggf. unter Verwendung von qualifizierten Schätzungen, bei der Beantwortung folgender Fragen:

a) Mit welchem Betrag sollten die Pensionsverpflichtungen den Kaufpreis mindern?
b) Wie hoch ist voraussichtlich der jährliche Aufwand in der Gewinn- und Verlustrechnung bei Fortsetzung der Bilanzierung nach den beschriebenen Grundsätzen in den nächsten Jahren, ohne Berücksichtigung von Rentenanpassungen?
c) Wie könnten die Personalkosten der bestehenden Pensionsverpflichtungen pro Jahr angesetzt werden (dem Grunde und der Höhe nach)?
d) Wie entwickelt sich dem Grunde nach die Liquidität des Unternehmens durch die Erteilung einer unmittelbaren Pensionszusage im Vergleich zu einem Unternehmen, dass keine Pensionszusage erteilt, dafür jedoch Zuschläge zu den Gehältern gewährt, die den Personalkosten gemäß c) entsprechen?

Bitte begründen Sie Ihre Antworten, indem Sie die versicherungsmathematischen Hintergründe für einen kaufmännisch orientierten Fragesteller transparent machen.

Lösung:

Vorüberlegung: Der anteilige, auf bereits laufende Renten entfallende Teilwert nach § 6a EStG (d.h. der Barwert der laufenden Renten unter Ansatz eines Rechnungszinses von 6%) kann zum Jahresbeginn mit etwa 1,8 Mio. DM (= 10 × 180 TDM) abgeschätzt werden. Damit verbleibt für Anwärter am Jahresbeginn ein anteiliger Teilwert von 3,65 – 1,8 Mio. DM = 1,85 Mio. DM.

Bei rechnungsmäßigem Verlauf entwickelt sich die Rückstellung von Jahr zu Jahr nach der Gleichung

$$V_{t+1} = (V_t + P) \times 1{,}06 - R \times 1{,}03 + S\,,$$

wobei V_t die Rückstellung am Ende des Jahres t, P die Summe der versicherungstechnischen Prämien, R die gezahlten Renten und S Sonderzuweisung aufgrund von Verpflichtungsänderungen bezeichnet.
Im vorliegenden Fall entspricht S dem Rückstellungsanteil für die im Jahr t+1 eingetretene Erhöhung der Renten um 2%, also einem Betrag von rd. 0,02 × 1,8 Mio. DM = 36 TDM. Damit kann die Summe der Prämien ermittelt werden aus

$$3{,}79 \text{ Mio. DM} = (3{,}65 \text{ Mio. DM} + P) \times 1{,}06 - 0{,}18 \text{ Mio. DM} \times 1{,}03 + 0{,}036 \text{ Mio. DM}\,,$$

woraus sich für P ein Wert von

$$P = (3{,}79 - 3{,}65 \times 1{,}06 + 0{,}18 \times 1{,}03 - 0{,}036)/1{,}06 \text{ Mio. DM} = 0{,}066 \text{ Mio. DM}$$

ergibt.

a) Zu überprüfen ist, ob der Wertansatz gemäß § 6a EStG die Verpflichtung vollständig erfasst und die Bewertungsprämissen, insbesondere der Rechnungszins, mit den ansonsten für die Bewertung des Unternehmens in Ansatz gebrachten Prämissen korrespondieren.
Beispielsweise ist die Verpflichtung des Unternehmens, die laufenden Renten zu überprüfen und ggf. anzupassen, in den Wertansätzen gemäß § 6a EStG nicht berücksichtigt, wenn und soweit die Höhe künftiger Rentenanpassungen nicht verbindlich festgelegt ist. Bereits eine zu erwartende Anpassung der Renten ab Rentenbeginn um jährlich durchschnittlich 2% würde einen Zuschlag zur Rückstellung von etwa 20% notwendig machen.

b) Der Jahresaufwand A bei rechnungsmäßigem Verlauf ergibt sich aus der Formel:

$$A = R + V_{t+1} - V_t = R + (V_t + P) \times 1{,}06 - R \times 1{,}03 - V_t\,.$$

Durch Einsetzen ergibt sich im vorliegenden Fall

$$A = [0{,}18 + (3{,}79 + 0{,}066) \times 1{,}06 - 0{,}18 \times 1{,}03 - 3{,}79] \text{ Mio. DM} = \mathbf{0{,}292\ Mio.\ DM}\,.$$

c) Als Personalkosten einer Pensionszusage können die Mittel bezeichnet werden, die zusätzlich zum Barlohn des Berechtigten zur Erfüllung der Pensionsverpflichtungen während der aktiven Dienstzeit des Berechtigten planmäßig aufzubringen sind. Diesem Ansatz wird die versicherungstechnische Bruttoprämie gerecht. Bei der Berechnung der Bruttoprämie ist von unternehmensindividuell angemessenen Prämissen und vollständiger Berücksichtigung erkennbarer künftiger Entwicklungen auszugehen.
Im vorliegenden Fall kommt beispielsweise folgender Ansatz in Betracht: Die auf der Basis eines Zinssatzes von 6% abgeschätzte Nettoprämie von 0,066 Mio. DM wird erhöht um einen Zuschlag von 20% zur Berücksichtigung der künftigen Rentendynamisierung, von weiteren 3% für Verwaltungskosten und von weiteren 6% für PSV-Beiträge, woraus sich ein Wertansatz für die Personalkosten der Pensionszusage in Höhe von 1,29 × 0,066 Mio. DM = **0,085 Mio. DM jährlich** ergibt.

d) Gehaltszuschläge belasten die Liquidität unmittelbar in Höhe der Auszahlung. Die Liquidität wird gleichzeitig entlastet aufgrund der Minderung der Steuerlast, die sich aus der Minderung der steuerlichen Bemessungsgrundlagen durch Anerkennung der Gehaltszuschläge als Betriebsausgaben ergibt (steuerpflichtige Gewinne vorausgesetzt!). Die Pensionsverpflichtung mindert die Liquidität in der Auszahlungsphase nach Eintritt des Versorgungsfalles. Durch die steuerliche Anerkennung der Vorausfinanzierung tritt bereits während der aktiven Dienstzeit eine Minderung der Steuerbelastung durch Anerkennung der Finanzierungsbeiträge (Prämien) als Betriebsausgaben ein. Außerdem wird die rechnungsmäßige Verzinsung der angesammelten Deckungsmittel als Betriebsausgabe steuermindernd anerkannt, weshalb die Zinserträge auf die angesammelten Mittel im rechnungsmäßigen Umfang steuerfrei bleiben.
Wenn die Gehaltszuschläge mit den Finanzierungsbeiträgen übereinstimmen und die Verpflichtung rechnungsmäßig verläuft, dann unterscheidet sich die Liquidität der Unternehmen genau um die je-

weils vorhandene Rückstellung. Aus der Sicht des Unternehmens mit Pensionsverpflichtungen ergeben sich Vorteile bzw. Nachteile, wenn die Verpflichtung günstiger bzw. ungünstiger verläuft, als rechnungsmäßig kalkuliert.
Da im vorliegenden Fall die Gehaltszuschläge nach den Personalkosten für die Verpflichtung im Sinne von c) bemessen werden, ist der steuerliche Entlastungseffekt durch die Pensionsverpflichtungen zunächst geringer als bei Gehaltszuschlägen. Hierdurch wird sich bei ansonsten rechnungsmäßigem Verlauf die Pensionsverpflichtung letztlich als die belastendere Alternative erweisen. Dieses Ergebnis kann sich umkehren, wenn aus der Nutzung der zusätzlichen Liquidität Finanzierungsvorteile aus der Pensionsverpflichtung resultieren.

Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe war die Angabe von Größenordnungen und die Wiedergabe einiger Kernaussagen aus den vorstehenden Ausführungen ausreichend.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Der Kegelklub „Die Bauerntöter" hat strenge Regeln. Wer bei einem der wöchentlichen Kegelabende – gleich aus welchem Grunde – fehlt, zahlt hierfür 20 DM in die Vereinskasse. Der Mitgliederbeitrag beträgt 5 DM pro Woche. Das einzelne Mitglied verzehrt an einem Kegelabend Speisen und Getränke im Wert von durchschnittlich 25 DM. Wer alle neun Kegel in einem Wurf zu Fall bringt („alle Neune"), muss eine Runde im Wert von 4 DM pro anwesendem Mitglied ausgeben. Alle genannten Zahlungen sind am Kegelabend fällig. Am Ende des Jahres stiften alle vorhandenen Mitglieder einen Einmalbetrag von je 1.000 DM für einen guten Zweck (Förderung bedürftiger Altkegler). Bei Beendigung der Mitgliedschaft wird dem ausscheidenden Mitglied (oder seinen Hinterbliebenen) ein Erinnerungsfotoalbum im Wert von 20 DM zu Lasten der Vereinskasse geschenkt.
Erfahrungsgemäß ist damit zu rechnen, dass jedes Mitglied jeden fünften Kegelabend versäumt. Jedes Mitglied schafft überdies im Durchschnitt alle zwei Kegelabende, an denen es teilnimmt, alle Neune. Der Kegelabend findet im Durchschnitt in der Wochenmitte statt.
Mitglieder, die Ihre Schulden nicht bezahlen oder sich auf andere Weise unbeliebt machen, werden frist- und gnadenlos ausgeschlossen. Außerdem können Mitglieder jederzeit freiwillig austreten. Ausschluss und Austritt können allerdings wöchentlich nur nach dem Kegelabend erfolgen. In den vergangenen fünf Wochen, die typisch für die Entwicklung des Klubs waren, nahm der Klub hinsichtlich der Mitgliederentwicklung folgenden Verlauf:

Woche	Mitglieder am Beginn	Ausschlüsse und Austritte
1	27	3
2	29	1
3	28	0
4	30	1
5	32	0

Der Bestand am Bewertungsstichtag (Wochenbeginn) umfasst zunächst 35 KeglerInnen, zur Jahresmitte erhöht sich die Anzahl der Klubmitglieder auf 50. Abgänge werden jeweils sofort durch Neuzugänge ersetzt.

i) Entwickeln Sie ein auf Wochen bezogenes Bevölkerungsmodell für den Kegelklub. Unterstellen Sie die Fälligkeit der wöchentlich fälligen Zahlungen jeweils zur Wochenmitte.
ii) Wie hoch ist der Barwert der Gesamtkosten, die für jedes einzelne am Beginn des Jahres vorhandene Mitglied innerhalb des Jahres anfallen?
Berücksichtigen Sie einen Zins von 0,2% pro Woche (mit Zinseszins). Geben Sie den Barwert getrennt für Mitgliedsbeiträge (einschließlich Strafzahlungen und Runden) und für die Spende am Jahresende an.
iii) Wie müsste der Mitgliederbeitrag erhöht werden, wenn auf die Zahlung wegen Nichterscheinens und auf die Runde nach allen Neunen verzichtet werden soll?

iv) Wie hoch ist am Anfang des Jahres der Wert der Fotoalben, die an die im Laufe des Jahres aus dem Anfangsbestand ausscheidenden Mitglieder übergeben werden?

Lösung:

Die aus dem Beobachtungsmaterial abzuleitende Bestandsverbleibehäufigkeit über 5 Wochen hinweg beträgt

$$(1 - 3/27) \times (1 - 1/29) \times (1 - 1/30) = 0{,}8297\,.$$

Damit ergibt sich für die mittlere Ausscheidehäufigkeit q pro Woche ein Wert von

$$q = 1 - 0{,}8297^{1/5} = \mathbf{3{,}664976\,\%}$$

i) Das Bevölkerungsmodell besteht aus der Hauptgesamtheit der aktiven Kegler. Für die Ausscheideordnung l_w gilt folgender Zusammenhang:

$$l_{w+1} = l_w(1-q) \quad \text{für alle } w > 0$$
$$l_0 = 1000$$

Darin bezeichnet l_w die Anzahl der aktiven Kegler in der Woche w.

ii) Die durchschnittliche Belastung pro Woche setzt sich wie folgt zusammen:

Mitgliedsbeitrag	5,00 DM × 1	5,00 DM
Verzehr	25,00 DM × 0,8	20,00 DM
„alle Neune“	4,00 DM × 0,8 × 0,5 × 0,8 × Anzahl	
	1. Halbjahr (Anzahl 35)	44,80 DM
	2. Halbjahr (Anzahl 50)	64,00 DM
Fehlen	0,2 × 20,00 DM	4,00 DM
Gesamtkosten pro Woche	1. Halbjahr	**85,00 DM**
	2. Halbjahr	**109,00 DM**

Barwerte für Mitgliederbeitrag/Strafzahlungen/Verzehr

Barwert der Zahlung 1 DM/Woche

$$= [1 - (pv)^{52}]/[1 - pv] \times v^{1/2} = 0{,}8706824/0{,}0385727 \times 0{,}9990014 = 22{,}54 \text{ DM}$$

Barwert der Mitgliedsbeiträge: 5 × 22,54 DM = **112,70 DM**
Barwert der Strafzahlungen: 4 × 22,54 DM = **90,16 DM**
Barwert der Verzehraufwendungen: 20 × 22,54 DM = **450,80 DM**

Barwert für Runden (alle Neune)

Barwert der Zahlung 1 für ein Halbjahr

$$= [1 - (pv)^{26}]/[1 - pv] \times v^{1/2} = 0{,}6403924/0{,}0385727 \times 0{,}9990014 = 16{,}585639 \text{ DM}$$

Barwert der Runden für das ganze Jahr:

$$16{,}585639 \times [44{,}80 \text{ DM} + (pv)^{26} \times 64{,}00 \text{ DM}] = \mathbf{1.124{,}75\ DM}$$

Der Barwert der für jedes einzelne am Beginn des Jahres vorhandene Mitglied anfallenden Kosten beläuft sich auf insgesamt **1.778,41 DM.**

Barwert der Spende am Jahresende

Barwert = $l_{52}/l_0 \times 1.000 \text{ DM} \times v^{52}$ = **129,32 DM**

iii) Zum Ausgleich der Strafzahlung für das Fehlen müsste der Mitgliederbeitrag um 4,00 DM pro Woche erhöht werden, damit die Vereinskasse keinen Nachteil hat. Wenn auf die Runde nach allen Neunen verzichtet wird, kann der Mitgliederbeitrag unverändert bleiben, es wird halt weniger getrunken! Die Vereinskasse ist davon nicht betroffen.

iv) Der Barwert der Fotoalben für die im Laufe des Jahres ausscheidenden Mitglieder des Anfangsbestandes beträgt:

$$20\,\text{DM} \times [1-(p\,v)^{52}]/[1-p\,v] \times v^{1/2} \times q \times 35 = 20\,\text{DM} \times 22{,}54 \times 0{,}03665 \times 35 = \mathbf{578{,}26\,DM}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Wir betrachten eine Personengesamtheit (Hauptgesamtheit Interne Anwärter, Bezeichnung h), bei der das Ausscheiden durch 3 Ursachen möglich ist, nämlich durch Invalidität, durch freiwilliges Ausscheiden in andere Aktivengesamtheiten und durch Tod. Voraussetzung: Jede Person scheidet genau durch eine einzige Ursache aus (Zwillingsereignisfreiheit). So entstehen die Nebengesamtheiten der freiwillig in andere Aktivengesamtheiten Ausgeschiedenen (Externe Anwärter, Bezeichnung s) und die Nebengesamtheit der Invaliden (Invalide, Bezeichnung i). Die Hauptgesamtheit zusammen mit der Nebengesamtheit der externen Anwärter bildet die Gesamtheit der Aktiven (Bezeichnung a), die Hauptgesamtheit zusammen mit der Nebengesamtheit der externen Anwärter und mit der Nebengesamtheit der Invaliden bilden den Gesamtbestand (Bezeichnung g).
Wir gehen von der folgenden Modellvorstellung aus: Es gibt 3 mögliche Ereignisse, die zur Ursache des Ereignisses „Ausscheiden" werden können, nämlich Eintritt der Invalidität, Eintritt des freiwilligen Ausscheidens und Eintritt des Todes (vgl. „Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen", Kapitel 2, Abschnitt 1.2). Von diesen wird *das* Ereignis zur Ursache des Ausscheidens, das als 1. eintritt. Entsprechend definieren wir 3 reellwertige Zufallsgrößen:

X_1: Alter bei Eintritt des Ereignisses „Invalidität"
X_2: Alter bei Eintritt des Ereignisses „freiwilliges Ausscheiden"
X_3: Alter bei Eintritt des Ereignisses „Tod"

1. Zeichnen Sie eine grafische Darstellung, bestehend aus den aufgeführten 3 Gesamtheiten und den möglichen Übergängen. Kennzeichnen Sie dabei auch die Aktivengesamtheit und den Gesamtbestand, und geben Sie dabei auch mögliche Mehrfachübergänge an.
2. Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeiten
   $l_x^h := P\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$
   $l_x^a := P\{X_1 > x, X_3 > x\}$
   $l_x^g := P\{X_3 > 3\}$
   und stellen Sie hiermit die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P\{X_1 \le x \mid X_3 > x\}$ und $P\{X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\}$ dar; interpretieren Sie auch diese Wahrscheinlichkeiten.
3. Stellen Sie die folgenden Ausscheidewahrscheinlichkeiten vermittels der Zufallsgrößen X_1, X_2 und X_3 dar:
   q_x^{hh}: Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Tod als interner Anwärter aus der Gesamtheit der internen Anwärter auszuscheiden.
   i_x^{hh}: Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Invalidität aus der Gesamtheit der internen Anwärter auszuscheiden.
   s_x^h: Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres durch freiwilliges Ausscheiden aus der Gesamtheit der internen Anwärter auszuscheiden.
   i_x^s: Wahrscheinlichkeit eines externen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Invalidität aus der Gesamtheit der externen Anwärter auszuscheiden.

q_x^{ss}: Wahrscheinlichkeit eines externen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Tod als externer Anwärter aus der Gesamtheit der externen Anwärter auszuscheiden.

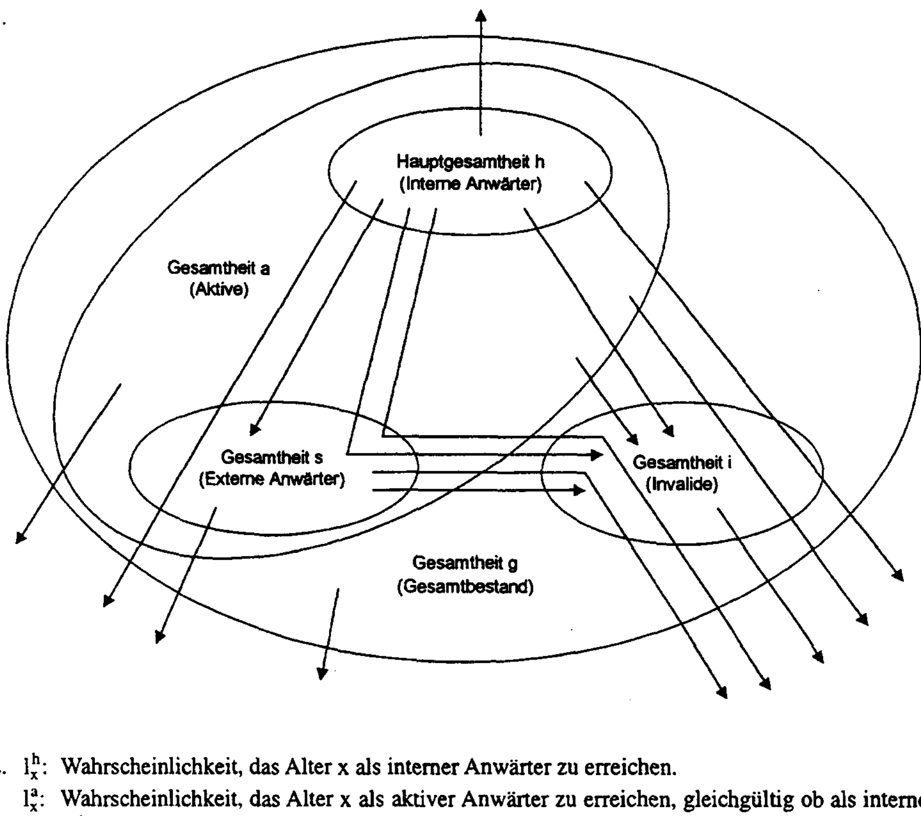
i_x^a: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Invalidität aus dem Bestand der Aktiven auszuscheiden.

q_x^{aa}: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres durch Tod als Aktiver aus dem Bestand der Aktiven auszuscheiden.

4. Interpretieren Sie für ein $x \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   $q_x^h: = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$
   $q_x^s: = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_2 \leq x, X_3 > x\}$
   $q_x^a: = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_1 > x, X_3 > x\}$
   $q_x^i: = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_1 \leq x, X_3 > x\}$
   $q_x^g: = P\{X_3 \leq x + 1 \mid X_3 > x\}$
5. Stellen Sie eine Gleichung (Konsistenzgleichung) zwischen q_x^a, q_x^s und q_x^h unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeiten nach 2. auf und interpretieren Sie das Ergebnis.
6. Stellen Sie eine Gleichung (Konsistenzgleichung) zwischen q_x^g, q_x^h, q_x^s und q_x^i unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeiten nach 2. auf und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

1.



2. l_x^h: Wahrscheinlichkeit, das Alter x als interner Anwärter zu erreichen.

   l_x^a: Wahrscheinlichkeit, das Alter x als aktiver Anwärter zu erreichen, gleichgültig ob als interner oder externer Anwärter.

   l_x^g: Wahrscheinlichkeit, das Alter x zu erleben, gleichgültig ob als interner oder als externer Anwärter oder als Invalider.

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 \le x \mid X_3 > x\} &= 1 - P\{X_1 > x \mid X_3 > x\} \\
&= 1 - \frac{P\{X_1 > x, X_3 > x\}}{P\{X_3 > x\}} \\
&= 1 - \frac{l_x^a}{l_x^g}
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestands des Alters x, im Alter x Invalider zu sein.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\} \\
&+ \underbrace{P\{X_1 > x, X_2 > x \mid X_3 > x\}}_{\frac{P\{X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}}{P\{X_3 > x\}} = \frac{l_x^h}{l_x^g}} = P\{X_1 > x \mid X_3 > x\} = \frac{l_x^a}{l_x^g} \\
&\Rightarrow P\{X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\} = \frac{l_x^a - l_x^h}{l_x^g} = \frac{l_x^a}{l_x^g}\left(1 - \frac{l_x^h}{l_x^a}\right)
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x, im Alter x externer Anwärter zu sein.

3. $q_x^{hh} = P\{X_3 \le \min(x+1, X_1, X_2) \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$
   $i_x^{hh} = P\{X_1 \le \min(x+1, X_2, X_3) \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$
   $s_x^h = P\{X_2 \le \min(x+1, X_1, X_3) \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}$
   $i_x^s = P\{X_1 \le \min(x+1, X_3) \mid X_1 > x, X_2 \le x, X_3 > x\}$
   $q_x^{ss} = P\{X_3 \le \min(x+1, X_1) \mid X_1 > x, X_2 \le x, X_3 > x\}$
   $i_x^a = P\{X_1 \le \min(x+1, X_3) \mid X_1 > x, X_3 > x\}$
   $q_x^{aa} = P\{X_3 \le \min(x+1, X_1) \mid X_1 > x, X_3 > x\}$

4. q_x^h: Wahrscheinlichkeit eines internen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben.
   q_x^s: Wahrscheinlichkeit eines externen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben.
   q_x^a: Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben.
   q_x^i: Wahrscheinlichkeit eines Invaliden des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben.
   q_x^g: Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben.

5. $$
\begin{aligned}
q_x^a &= P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 > x, X_3 > x\} \\
&= P\{X_3 \le x+1, X_2 > x \mid X_1 > x, X_3 > x\} + P\{X_3 \le x+1, X_2 \le x \mid X_1 > x, X_3 > x\} \\
&= P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}\, P\{X_2 > x \mid X_1 > x, X_3 > x\} \\
&\quad + P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 > x, X_2 \le x, X_3 > x\}\, P\{X_2 \le x \mid X_1 > x, X_3 > x\} \\
&= q_x^h\, P\{X_2 > x \mid X_1 > x, X_3 > x\} + q_x^s\, \underbrace{P\{X_2 \le x \mid X_1 > x, X_3 > x\}}_{1 - \underbrace{P\{X_2 > x \mid X_1 > x, X_3 > x\}}_{\frac{l_x^h}{l_x^a}}} \\
&= q_x^s - \frac{l_x^h}{l_x^a}(q_x^s - q_x^h)
\end{aligned}
$$

Wie aus der vorletzten Zeile ersichtlich, stellt also q_x^a, die Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben, das gewichtete Mittel der Wahrscheinlichkeit q_x^h und q_x^s dar, also das gewichtete Mittel der Wahrscheinlichkeiten eines internen resp. externen Anwärters des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben, gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten, im Alter x interner resp. externer Anwärter zu sein.

6. $$\begin{aligned} q_x^g &= P\{X_3 \le x+1 \mid X_3 > x\} \\ &= P\{X_3 \le x+1, X_1 \le x \mid X_3 > x\} \\ &\quad + P\{X_3 \le x+1, X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\} + P\{X_3 \le x+1, X_1 > x, X_2 > x \mid X_3 > x\} \\ &= P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 \le x, X_3 > x\}\, P\{X_1 \le x \mid X_3 > x\} \\ &\quad + P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 > x, X_2 \le x, X_3 > x\}\, P\{X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\} \\ &\quad + P\{X_3 \le x+1 \mid X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x\}\, P\{X_1 > x, X_2 > x \mid X_3 > x\} \\ &= q_x^h \underbrace{P\{X_1 > x, X_2 > x \mid X_3 > x\}}_{\frac{l_x^h}{l_x^g}\frac{l_x^a}{l_x^a}} + q_x^s \underbrace{P\{X_1 > x, X_2 \le x \mid X_3 > x\}}_{\frac{l_x^a}{l_x^g}\left(1-\frac{l_x^h}{l_x^a}\right)} \\ &\quad + q_x^i \underbrace{P\{X_1 \le x \mid X_3 > x\}}_{1-\frac{l_x^a}{l_x^g}} \\ &= q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g}\left[q_x^i - q_x^s + \frac{l_x^h}{l_x^a}(q_x^s - q_x^h)\right] \quad \left(= q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g}[q_x^i - q_x^a]\right) \end{aligned}$$

Wie aus der vorletzten Zeile ersichtlich, stellt also q_x^g, die Wahrscheinlichkeit einer Person des Gesamtbestandes des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben, das gewichtete Mittel der Wahrscheinlichkeiten q_x^h, q_x^s und q_x^i dar, also das gewichtete Mittel der Wahrscheinlichkeiten eines internen resp. externen Anwärters resp. Invaliden des Alters x, innerhalb eines Jahres zu sterben, gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten, im Alter x interner resp. externer Anwärter resp. Invalider zu sein.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Bekanntlich lautet die Rekursionsformel für ${}^{(t)}a_{x+m}^{ai}$ nach den Richttafeln 1998 für $m = 0, 1, \ldots, n-1$ mit $x + n = z$

$$ {}^{(t)}a_{x+m}^{ai} = {}_m^{(t)}L_x^{ai} + v\, p_{x+m}^a\, {}^{(t)}a_{x+m+1}^{ai}, \quad {}^{(t)}a_z^{ai} = 0, \tag{1}$$

mit

$$ {}_m^{(t)}L_x^{ai} = v\, i_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+m+\frac{1}{2}}^i\, k^{(t)} + v\, i_{x+m}\, {}_{\frac{1}{2}}p_{x+m+\frac{1}{2}}^i\, {}^{(t)}a_{x+m+1}^i $$

1. Leiten Sie diese Darstellung aus der Summendarstellung oder aus der Darstellung vermittels Kommutationszahlen für ${}^{(t)}a_x^{ai}$ ab.
2. Erstellen Sie analog eine Rekursions-Gleichung für ${}^{(t)}a_{x+m}^i$.
3. Formen Sie die Rekursions-Gleichungen für ${}^{(t)}a_{x+m}^{ai}$ und ${}^{(t)}a_{x+m}^i$ in eine Vektor-Rekursions-Gleichung um gemäß

$$ \vec{a}_{x+m} = {}_m\vec{L}_x + P_{x+m}\, \vec{a}_{x+m+1}, \quad \vec{a}_z = ?, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

mit

$$ \vec{a}_{x+m} = \begin{pmatrix} {}^{(t)}a_{x+m}^{ai} \\ {}^{(t)}a_{x+m}^i \end{pmatrix} $$

und einem geeignet zu wählenden Spaltenvektor ${}_m\vec{L}_x$ und einer geeignet zu wählenden Matrix P_{x+m}.

4. Zeigen Sie, dass man aus Gleichung (2) die geschlossene Darstellung

$$\vec{a}_{x+m} = \sum_{k=0}^{n-m} \left(\prod_{j=0}^{k-1} P_{x+m+j} \right) {}_{m+k}\vec{L}_x, \quad m = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

erhält, wenn man ${}_n\vec{L}_x$ geeignet setzt

$\left(\text{Vereinbarung: } \prod_{j=0}^{-1} M_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für beliebige } 2\times 2\text{-Matrizen } M_j \right).$

5. Interpretieren Sie $\vec{a}^T\, {}_m\vec{L}_x$ und $\vec{a}^T P_{x+m}\, \vec{a}_{x+m+1}$, $\vec{a}^T := (1\ 0)$.

Lösung:

1.
$$\begin{aligned}
{}^{(t)}a^{ai}_{x+m} = a^{ai}_{x+m} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\, i_{x+m+k}\, {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\, a^i_{x+m+k+1}\, v \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp^a_{x+m}\, {}^{(t)}_{x+m}L^{ai}_x \quad \text{wegen } a^i_u = {}^{(t)}a^i_u + k^{(t)} \ \forall u
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^{(t)}a^{ai}_{x+m} = {}^{(t)}_mL^{ai}_x + v p^a_{x+m} \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} v^{k-1}\, {}_{k-1}p^a_{x+m+1}\, {}^{(t)}_{m+k}L^{ai}_x}_{\sum_{k=0}^{(n-1)-1} v^k\, {}_kp_{x+m+1}\, {}^{(t)}_{m+1+k}L^{ai}_x}}_{{}^{(t)}a^{ai}_{x+m+1}}$$

2. Es gilt

$${}^{(t)}a^i_z = {}^{(t)}a^r_z$$

und für $m = 0, 1, \ldots, n-1$

$${}^{(t)}a^i_{x+m} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k_k\, p^i_{x+m}\, {}^{(t)}_{m+k}L^i_x + v^n\, {}_{n-m}p^i_{x+m}\, {}^{(t)}a^r_z$$

mit

$${}^{(t)}_{m+k}L^i_x = 1 - k^{(t)}(1 - v p^i_{x+m+k})$$

$$\Rightarrow {}^{(t)}a^{(i)}_{x+m} = {}^{(t)}_mL^i_x + v p^i_{x+m} \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} v^{k-1}\, {}_{k-1}p^i_{x+m+1}\, {}^{(t)}_{m+k}L^i_x + v^n\, {}_{n-m}p^i_{x+m}\, {}^{(t)}a^r_z}_{\sum_{k=0}^{(n-1)-1} v^k\, {}_kp^i_{x+m+1}\, {}^{(t)}_{m+1+k}L^i_x + v^n\, {}_{n-m}p^i_{x+m}\, {}^{(t)}a^r_z}}_{{}^{(t)}a^i_{x+m+1}}$$

Wir erhalten also insgesamt

$${}^{(t)}a^i_{x+m} = {}^{(t)}_mL^i_x + v p^i_{x+m}\, {}^{(t)}a^i_{x+m+1}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

3.
$$\bar{a}_{x+m} = \begin{pmatrix} {}^{(t)}a^{ai}_{x+m} \\ {}^{(t)}a^{i}_{x+m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ k^{(t)} \\ 1-k^{(t)}(1-vp^{i}_{x+m}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}^{(t)}a^{i}_{x+m+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vp^{a}_{x+m}\ {}^{(t)}a^{ai}_{x+m+1} \\ vp^{i}_{x+m}\ {}^{(t)}a^{i}_{x+m+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ k^{(t)} \\ 1-k^{(t)}(1-vp^{i}_{x+m}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vp^{a}_{x+m} & v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}} \\ 0 & vp^{i}_{x+m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{(t)}a^{ai}_{x+m+1} \\ {}^{(t)}a^{i}_{x+m+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ {}_{m}\bar{L}_{x} = \begin{pmatrix} v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}}\ k^{(t)} \\ 1-k^{(t)}(1-vp^{i}_{x+m}) \end{pmatrix}$$

$$P_{x+m} = \begin{pmatrix} vp^{a}_{x+m} & v i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^{i}_{x+m+\frac{1}{2}} \\ 0 & vp^{i}_{x+m} \end{pmatrix}$$

Zudem: $\bar{a}_{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^{(t)}a^{r}_{z} \end{pmatrix}$

4. Setzt man ${}_{n}\bar{L}_{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ {}^{(t)}a^{r}_{z} \end{pmatrix}$, dann ist Gl. (3) für $m = n$ richtig.

Für $m = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt: Sei für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$${}_{k}P_{x+m} := \prod_{j=0}^{k-1} P_{x+m+j}.$$

Offenbar gilt dann für $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} {}_{k}P_{x+m} &= P_{x+m} \prod_{j=1}^{k-1} P_{x+m+j} \\ &= P_{x+m} \prod_{j=0}^{(k-1)-1} P_{x+m+1+j} \\ &= P_{x+m}\ {}_{k-1}P_{x+m+1} \end{aligned}$$

mit

$${}_{0}P_{x+m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gelte nun Gleichung (3) für $x + m + 1$, also

$$\bar{a}_{x+m+1} = \sum_{k=0}^{n-m-1} {}_{k}P_{x+m+1}\ {}_{m+1+k}\bar{L}_{x}$$

Dann folgt wegen

$$\bar{a}_{x+m} = {}_m\bar{L}_x + P_{x+m}\,\bar{a}_{x+m+1}:$$

$$\bar{a}_{x+m} = {}_m\bar{L}_x + \underbrace{\underbrace{P_{x+m} \sum_{k=0}^{n-m-1} {}_kP_{x+m+1}\ {}_{m+1+k}\bar{L}_x}_{P_{x+m} \sum_{k=1}^{n-m} {}_{k-1}P_{x+m+1}\ {}_{m+k}\bar{L}_x}}_{\sum_{k=1}^{n-m} {}_kP_{x+m}\ {}_{m+k}\bar{L}_x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} {}_kP_{x+m}\ {}_{m+k}\bar{L}_x$$

Damit ist Gleichung (3) bewiesen.

5. $$\bar{a}_m^T\,\bar{L}_x = v\,i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ k^{(t)}$$

Dieser Term stellt den Wert der im Jahr des Eintritts der Invalidität zu zahlenden Rentenraten zum Beginn des Jahres dar (vgl. Neuburger: „Bemerkungen zum Formelwerk der Richttafeln 1998", B/DGVM Bd. XXIV, Heft 1, insbesondere S. 120, 1. und 2. Absatz).

$$\bar{a}^T\,P_{x+m}\,\bar{a}_{x+m+1} = v\,p^a_{x+m}\ {}^{(t)}a^{ai}_{x+m+1} + v\,i_{x+m}\ {}_{\frac{1}{2}}p^i_{x+m+\frac{1}{2}}\ {}^{(t)}a^i_{x+m+1}$$

Dieser Term stellt den Wert der im Jahr des Eintritts der Invalidität zum Ende des Jahres verbleibenden Verpflichtungen zum Beginn des Jahres dar.