

# Bericht zur Prüfung im Oktober 1999 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

*Jürgen Strobel (Köln), Klaus Allerdissen (Overath) und Hans-Jochen Bartels (Mannheim)*

Am 16. 10. 1999 wurde in Bad Neuenahr die vierte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der neuen Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 97 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 78 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der drei Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mußten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Ein Auszug aus der DAV-Sterbetafel 1994 TM wurde zur Verfügung gestellt.

## Aufgabe 1 (65 Punkte)

Ein 40-jähriger Mann des Geburtsjahrgangs 1959 beantrage den Abschluß einer gemischten Versicherung mit erhöhter Erlebensfalleistung gegen jährliche Beitragszahlung. Das Endalter betrage 60 Jahre, die während der Laufzeit konstante Todesfallsumme habe die Höhe  $T$ , die Erlebensfallsumme betrage  $S = 1,6 \cdot T$ .

- a) Zur Kalkulation der Prämie und der anderen versicherungstechnischen Werte stehen dem Aktuar die Sterbetafel DAV 1994 TM und eine Erlebensfalltafel (z.B. DAV 1994 RM inkl. Altersverschiebung) zur Verfügung, der Rechnungszins betrage jeweils 4%. Überprüfen Sie bitte mit Hilfe der Nettoprämie unter Verwendung der beigefügten Todesfalltafel, welche der beiden Sterbetafeln im vorliegenden Fall zu verwenden ist.
- b) Ist es vorstellbar, daß für andere Alterskombinationen mit der anderen Tafel zu arbeiten wäre oder daß das in a) (zwangsläufig) gewählte Vorgehen keine Entscheidungshilfe bieten kann? (Plausibilitätsbetrachtung ohne Rechnung)
- c) Rechnen Sie im folgenden unabhängig von den Ergebnissen aus a) und b) mit der Sterbetafel 1994 TM, und überprüfen Sie zunächst, ob der Vertrag mit  $x = 40$  und  $n = 20$  nach den derzeit noch geltenden Bestimmungen steuerlich begünstigt ist (Stichworte: §§ 10, 20 EStG, Todesfallleistung  $\geq 60\%$  der Beitragssumme). Gehen Sie dabei bitte von folgenden Kostenzuschlägen aus:  
 $\alpha^z = 40\%$  der Summe der ausreichenden Jahresprämien („Beitragssumme“), einmalig zu Versicherungsbeginn  
 $\alpha^y = 0,5\%$  der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer  
 $\beta = 3\%$  der ausreichenden Jahresprämie, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer  
 $\gamma = 1,0\%$  der Beitragssumme, vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer.
- d) Für  $T = 50.000$  liege die prognostizierte Ablaufleistung bei 117.548 DM. Berechnen Sie unter Zugrundelegung des Ergebnisses aus c) die Erlebensfallrendite (weiterhin jährliche Zahlweise unterstellt; lineare Interpolation zulässig).
- e) Wie ändert sich die Erlebensfallrendite, wenn der Betrag  $D = 0,8$  (Ablaufleistung – Beitragssumme) steuerpflichtig wird und im konkreten Fall einer Steuerbelastung von 30% unterliegt?

## Lösung

- a) Die Nettoprämie zu der angegebenen Versicherungsform berechnet sich aus der Gleichung

$$P_{40:\overline{20}|} = \frac{T \cdot (M_{40} - M_{60} + 1,6 \cdot D_{60})}{D_{40} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}$$

Einsetzen der Werte aus der Sterbetafel 1994 TM ergibt:

$$P_{40:\overline{20}|} = 0,052446 \cdot T$$

Der Aktuar hat nun beispielsweise die folgenden beiden Möglichkeiten, um zu überprüfen, ob die vorgegebene Versicherung Todes- oder Erlebensfallcharakter hat:

1. Möglichkeit: Man berechne  $P_{40:\overline{20}|}$  anhand der Rentensterbetafel. Erhält man einen höheren Wert als mit der Todesfalltafel, so hat die Versicherung Erlebensfallcharakter.
2. Möglichkeit: Man berechne mit der Todesfalltafel die Nettoprämie  $P_{41:\overline{20}|}$ . Ist der ermittelte Wert höher als  $0,052446 \cdot T$ , so hat die Versicherung Todesfallcharakter, andernfalls Erlebensfallcharakter.

Aufgrund der Aufgabenstellung wird der zweite Weg gewählt. Es ergibt sich:

$$P_{41:\overline{20}|} = \frac{T \cdot (M_{41} - M_{61} + 1,6 \cdot D_{61})}{D_{41} \cdot \ddot{a}_{41:\overline{20}|}} = 0,052544 \cdot T,$$

so daß die Todesfalltafel für alle versicherungstechnischen Berechnungen zu wählen ist.

- b) Als Folge der Modifizierung sind die Sterblichkeiten im Alter von 20 Jahren bis 31 Jahren konstant. Liegen  $x$ ,  $x + 1$ ,  $x + n$  und  $x + n + 1$  alle in diesem Altersbereich, so bietet der oben gewählte Weg keine Entscheidungshilfe. Bei Verträgen mit kürzerer Laufzeit, die direkt nach diesem Altersintervall im Alter 32 enden, ist aber regelmäßig Erlebensfallcharakter anzunehmen, da beim Übergang von der Alterskombination  $(x, n)$  zu  $(x + 1, n)$  das Absinken der Überlebenswahrscheinlichkeit infolge der gestiegenen Sterblichkeit des letzten Jahres durch den Faktor 1,6 stärker zu Buche schlägt als der Anstieg des Todesfallrisikos. Letztlich muß der Aktuar alle relevanten Laufzeitkombinationen untersuchen (und ggf. das Leistungsspektrum modifizieren), um für den ganzen Tarif zu vertretbaren Lösungen zu gelangen.
- c) Bezeichnet man den Leistungsbarwert der vorgegebenen Versicherungsform mit LB und die ausreichende Jahresprämie mit  $P_{40:\overline{20}|}^a$ , so gilt nach dem Äquivalenzprinzip:

$$P_{40:\overline{20}|}^a \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} = LB + \alpha \cdot n \cdot P_{40:\overline{20}|}^a + (\alpha^\gamma + \gamma) \cdot n \cdot P_{40:\overline{20}|}^a \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} + \beta \cdot P_{40:\overline{20}|}^a \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|}$$

Löst man diese Gleichungen nach  $P_{40:\overline{20}|}^a$  auf, setzt die gegebenen Werte ein und beachtet, daß nach a) gilt, daß  $LB = P_{40:\overline{20}|} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 0,052446 \cdot 13,588834 \cdot T = 0,71267 \cdot T$ , so folgt:

$$P_{40:\overline{20}|}^a = \frac{0,71267}{11,973504} \cdot T = 0,05921 \cdot T$$

und damit  $T = 16,801 \cdot P_{40:\overline{20}|}^a \geq 0,6 \cdot 20 \cdot P_{40:\overline{20}|}^a$ .

Daher ist die Todesfalleistung während der gesamten Vertragsdauer mindestens so groß wie 60% der Beitragssumme, und weil mit  $n = t = 20 > 12$  auch die Voraussetzungen der §§ 10 und 20 EStG erfüllt sind, ist der Vertrag nach den aktuell (doch weiterhin) gültigen Regelungen steuerlich begünstigt.

- d) Aus c) folgt daß der jährliche Bruttobeitrag  $B_{40:\overline{20}|}$  2976,05 beträgt. Mit der unbekanntenen Erlebnisfallrendite  $r$  gilt, daß

$$B_{40:\overline{20}|} \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^{20} - 1}{r} = 117548.$$

Für  $r = 0,06$  erhält man für die linke Seite den Wert 116044,54, für  $r = 0,062$  den Wert 118793,92. Lineare Interpolation liefert die Erlebnisfallrendite von 6,11%.

- e) Von der Ablaufleistung ist der Betrag  $0,3 \cdot D = 0,3 \cdot 0,8 \cdot (117548 - 20 \cdot 2976,05) = 13926,48$  abzusetzen. Zur Auszahlung kommen daher nur noch  $117548 \text{ DM} - 13926,48 \text{ DM} = 103621,52 \text{ DM}$ .

Wie in d) wird die Erlebensfallrendite durch lineare Interpolation ermittelt:

$$2976,95 \cdot \ddot{S}_{20}^{(5\%)} = 103326,37 \quad \text{bzw.} \quad 2976,05 \cdot \ddot{S}_{20}^{(5,1\%)} = 104524,67,$$

so daß sich  $r$  zu 5,025% ergibt. Die (noch) fiktive Besteuerung kostet also im vorliegenden Beispiel ca. einen Prozentpunkt Rendite.

### Aufgabe 2 (60 Punkte)

Es soll eine Invaliditätszusatzversicherung zu einer gemischten Kapitalversicherung kalkuliert werden.

Die Leistung wird vereinbart als Teilzahlung in Höhe der halben Versicherungssumme, zahlbar einen Monat nach Eintreten der Invalidität. Damit erlischt diese Hälfte der Hauptversicherung. Die anderen 50% werden normal bei Vertragsablauf bzw. im Falle des Todes fällig. Die Prämienzahlung wird ebenfalls um 50% reduziert. Die Gewinnbeteiligung soll im weiteren unberücksichtigt bleiben.

1. Geben Sie bitte die Ausscheideordnungen für Aktive und Invalide an. (Jetzt und im folgenden sind verwendete Bezeichnungen für den Leser nachvollziehbar zu definieren.)
2. Bitte geben Sie (zunächst unabhängig von der beschriebenen Leistungsform) die Anwartschaft eines  $x+k$ -jährigen Aktiven auf eine bis zum Alter  $x+n$  zahlbare Invalidenrente der Höhe 1 an, wenn die Ausscheideordnung von 1. gegeben und eine Karenzzeit im Leistungsfall von einem Monat vereinbart ist.
3. Gehen Sie nun zurück zu der anfänglichen Leistungsform und leiten Sie (nachvollziehbar) die Nettojahresprämie der Zusatzversicherung in Abhängigkeit von der Jahresprämie der Hauptversicherung ab.

(Die gemischte Versicherung kann bei der gewählten Konstruktion gedanklich in 2 Verträge aufgespalten werden, nämlich in einen 50%-igen Teilvertrag, der eine normale gemischte Versicherung darstellt (Teil 1), und einen Teilvertrag, der mit Eintreten der Invalidität durch Vorauszahlung der Versicherungssumme erlischt (Teil 2). Im weiteren genügt es, sich auf Teil 2 zu beschränken).

### Lösung

zu 1.

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} (1 - q_x - i_x), \quad l_{(z)+m+1}^i = l_{(z)+m}^i \cdot (1 - q_{(z)+m}^i)$$

(Reaktivierung entfällt wegen Summenauszahlung)

zu 2.

$$D_{x+k}^{ai} = D_{x+k}^{aa} \cdot i_{(x)+k} \cdot v^{7/12} \cdot \left( \frac{5}{12} a_{(x)+k, \overline{n-k}}^i + \frac{7}{12} a_{(x)+k+1, \overline{n-k-1}}^i \right)$$

(„krumme“ Interpolation wg. 1-monatiger Karenzzeit. Diese Darstellung war ausreichend, selbstverständlich ist auch die Angabe des Rentenbarwertes möglich.)

zu 3.

$P$  = Jahresprämie der gemischten Versicherung (Teil 2)

$${}_kV_x = 1 - (d + P) \cdot a_{x+k, \overline{n-k}}$$

→  $(d + P) \cdot a$  ist gerade die vorauszahlende Leistung bei voller Vorauszahlung

→ für die Nettojahresprämie  $P^i$  der Zusatzversicherung

$$P^i = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (d + P) \cdot D_{x+k}^{ai} - \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+1}^{aa} \cdot i_{(x)+k} \cdot v^{7/12} \cdot \frac{5}{12} \cdot P}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

### Aufgabe 3 (55 Punkte)

(davon 25 Punkte für den Teil (i) und 30 Punkte für den Teil (ii))

In der Hoffnung, die Durchschnittsverzinsung des Kapitalanlagebestandes auf einem hohen Niveau zu halten, kauft der Vermögenseinleger eines Versicherungsunternehmens VU zu Jahresbeginn 10 000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 40 Euro.

Die im Konzernverbund des Versicherungsunternehmens VU ansässige Bank B handelt mit Optionen und bietet unter anderem auch europäische Put-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zu verschiedenen Ausübungspreisen und Ausübungszeitpunkten an zu Preisen gemäß folgender Tabelle:

Basis \ Ausübungstermin	30. 6.	30. 9.	31. 12.
38	0,77	1,54	2,50
40	1,78	2,61	3,44
42	1,96	4,11	3,58

Der aktuelle Einjahreszins am Markt beträgt 4,75% für einjährige Kapitalanlagen.

- (i) Wie kann der Vermögenseinleger des Versicherungsunternehmens die Anlage von 10 000 Aktien des Unternehmens U so absichern, daß der Wert der Geldanlage  $10\,000 \cdot 40$  Euro zum Zeitpunkt des Bilanzstichtags 31. 12. nicht unter 95% des Anfangsanlagebetrages fällt?

Welche „Versicherungsprämie“ hat er für diese Portfolio-Absicherung zu entrichten?

Man begründe die Antworten!

(Anmerkung: Der Einfachheit halber werden Transaktionskosten und eventuell anfallende Dividenden unberücksichtigt gelassen)

- (ii) Die im Konzernverbund ansässige Bank B möchte als Stillhalter der Verkaufs-Optionen das damit verbundene Risiko kongruent weitergeben und verkauft zeitgleich zu diesem Zweck an Privatkunden sogenannte einjährige Aktienanleihen zum Stückpreis von 40 Euro, die folgendes Leistungsschema vorsehen:

In jedem Fall wird ein fester Zinssatz von  $p\%$  für die Geldanlage nach Ablauf eines Jahres gezahlt (feste Kuponzahlung). Außerdem wird zusätzlich zum 31. 12. der Anlagebetrag zurückgezahlt, falls das Kursniveau der Aktie U zum 31. 12. oberhalb des Wertes 38 Euro liegt. Im anderen Fall (d.h. bei einem Kursniveau  $\leq 38$  Euro) wird am 31. 12. neben dem fest vereinbarten Kupon pro Stück Aktienanleihe je eine Aktie des Unternehmens U an den Kunden geliefert.

Mit welchem (attraktiven) Zinssatz  $p$  (Kupon) kann aus Sicht der Bank die beschriebene Aktienanleihe maximal ausgestattet werden, wenn keine Verwaltungskosten oder Transaktionskosten berücksichtigt werden? Man zeige ferner, daß bei der Bank B nach erfolgreichem Verkauf der Aktienanleihen kein Risiko aus dem Verkauf der Put-Optionen an das Versicherungsunternehmen VU verbleibt.

### Lösungshinweis

Zu (i): 10 000 Put-Optionen zum Ausübungstag 31. 12. und Ausübungspreis 38 ( $= 0,95 \cdot 40$ ) sichern die Kapitalanlage so ab, daß zum 31. 12. der Wert von 380 000 Euro für das Versicherungsunternehmen nicht unterschritten wird.

Als „Versicherungsprämie“ für die Portfolio-Absicherung ist also der Kaufpreis für diese 10 000 Put-Optionen zu entrichten, das sind 25 000 Euro.

Zu (ii): Die Bank verkauft 10 000 Aktienanleihen zum Gesamtpreis von 400 000 Euro. Außerdem hat sie noch die unter (i) erwähnten Einnahmen aus dem Verkauf der Put-Optionen in Höhe von 25 000 Euro, so daß insgesamt 425 000 Euro zum Zins von 4,75% angelegt werden können. Am Jahresende stehen daher  $425\,000 \cdot 1,0475 = 445\,187,50$  Euro zur Abdeckung der Leistungsverpflichtungen zur Verfügung, das sind das 1,11296875-fache des ursprünglichen Anlagebetrages von 400 000. Der maximal mögliche Zinssatz  $p$  für die Kuponzahlung beträgt daher 11,296875%. Wenn der Kurs der U-Aktie unter 38 fällt, reicht die Bank B die Aktien

aus dem Bestand des VU an die Käufer der Aktienanleihe weiter, muß dafür 380 000 Euro an das VU entrichten und zusätzlich noch die Kuponzahlung in Höhe von 45 187,5 Euro an die Käufer der Aktienanleihe zahlen. Das alles kann von dem zur Verfügung stehenden Betrag von insgesamt 445 187,5 Euro in jedem Fall abgedeckt werden.