

Bericht zur Prüfung im Oktober 1998 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), Klaus Allerdissen (Overath) und Hans-Jochen Bartels (Mannheim)

Am 17. 10. 1998 wurde in Bad Neuenahr die dritte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der neuen Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 80 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 66 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mußten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Eine Folge roher Sterbewahrscheinlichkeiten in einem Altersbereich I soll mit der mechanischen *Ausgleichsmethode von Karup* ausgeglichen werden.

Dazu betrachte man für $x \in I$ zunächst die Punkte $(x - 5, q_{x-5})$, (x, q_x) , $(x + 5, q_{x+5})$ und $(x + 10, q_{x+10})$. Gesucht wird dann ein Polynom dritten Grades $p_x(z)$, das durch die Punkte (x, q_x) und $(x + 5, q_{x+5})$ geht; die Steigung dieses Polynoms in (x, q_x) stimme mit der Steigung der Geraden durch $(x - 5, q_{x-5})$ und $(x + 5, q_{x+5})$ überein, die Steigung in $(x + 5, q_{x+5})$ mit derjenigen der Geraden durch (x, q_x) und $(x + 10, q_{x+10})$. Für $p_x(z)$ wähle man den Ansatz

$$p_x(z) = a_0 + 0,2 a_1 (z - x) + 0,04 a_2 (z - x)^2 + 0,008 a_3 (z - x)^3.$$

- a) Berechnen Sie zunächst die Koeffizienten a_0 , a_1 , a_2 und a_3 dieses Polynoms.
- b) Die ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit für ein Alter x wird anschließend durch Berechnung des arithmetischen Mittels aus den Werten $p_{x-k}(x)$, $0 \leq k \leq 4$, bestimmt. Erläutern Sie, warum diese Mittelwertbildung sinnvoll ist.

Lösung:

- a) Steigung der Geraden in (x, q_x) : $0,1 \cdot (q_{x+5} - q_{x-5})$

Steigung von $p_x(z)$ in (x, q_x) :

$$\begin{aligned} p'_x(z) &= 0,2 a_1 + 2 \cdot 0,04 \cdot a_2 \cdot (z - x) + 3 \cdot 0,008 \cdot a_3 \cdot (z - x)^2 \\ \Rightarrow p'_x(x) &= 0,2 a_1 \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$a_1 = 0,5 \cdot (q_{x+5} - q_{x-5}) \tag{1}$$

Analog ergibt sich:

$$0,1 \cdot (q_{x+10} - q_x) = 0,2 a_1 + 0,4 a_2 + 0,6 a_3, \tag{2}$$

und durch Einsetzen von (1) in (2):

$$0,4 a_2 + 0,6 a_3 = 0,1 \cdot (q_{x+10} - q_x - q_{x+5} + q_{x-5})$$

bzw.

$$2 a_2 + 3 a_3 = 0,5 \cdot (q_{x+10} - q_x - q_{x+5} + q_{x-5}). \tag{3}$$

Ferner gilt:

$$p_x(x + 5) = q_{x+5} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \tag{4}$$

$$p_x(x) = q_x = a_0 \tag{5}$$

Aus (4) erhält man unter Beachtung von (5) und (1):

$$\begin{aligned}
 a_2 + a_3 &= q_{x+5} - a_0 - a_1 \\
 &= q_{x+5} - q_x - 0,5 \cdot q_{x+5} + 0,5 \cdot q_{x-5} \\
 &= 0,5 \cdot q_{x+5} - q_x + 0,5 \cdot q_{x-5}, \text{ also} \\
 2a_2 + 2a_3 &= q_{x+5} - 2q_x + q_{x-5}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Subtraktion (3)–(6) folgt:

$$a_3 = 0,5 \cdot (q_{x+10} - 3q_{x+5} + 3q_x - q_{x-5})$$

und letztendlich

$$\begin{aligned}
 a_2 &= q_{x+5} - a_0 - a_1 - a_3 \\
 &= q_{x+5} - q_x - 0,5 \cdot (q_{x+5} - q_{x-5}) - 0,5 \cdot (q_{x+10} - 3q_{x+5} + 3q_x - q_{x-5}) \\
 &= 0,5 \cdot (-q_{x+10} + 4q_{x+5} - 5q_x + 2q_{x-5})
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$p_x(z) = a_0 + 0,2a_1(z-x) + 0,04a_2(z-x)^2 + 0,008a_3(z-x)^3$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_0 &= q_x \\
 a_1 &= 0,5 \cdot (q_{x+5} - q_{x-5}) \\
 a_2 &= 0,5 \cdot (-q_{x+10} + 4q_{x+5} - 5q_x + 2q_{x-5}) \\
 a_3 &= 0,5 \cdot (q_{x+10} - 3q_{x+5} + 3q_x - q_{x-5})
 \end{aligned}$$

b)

In $p_{x-4}(x)$ gehen die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x-9}, q_{x-4}, q_{x+1}$ und q_{x+6} ein,

in $p_{x-3}(x)$: $q_{x-8}, q_{x-3}, q_{x+2}, q_{x+7}$

in $p_{x-2}(x)$: $q_{x-7}, q_{x-2}, q_{x+3}, q_{x+8}$

in $p_{x-1}(x)$: $q_{x-6}, q_{x-1}, q_{x+4}, q_{x+9}$

in $p_x(x)$: q_x

so daß bei der Mittelwertbildung die rohen Werte $q_{x-9}, q_{x-8}, \dots, q_x, \dots, q_{x+8}, q_{x+9}$ berücksichtigt werden. Damit ist eine gebräuchliche Anforderung an ein mechanisches Verfahren insbesondere hinsichtlich der Glättung erfüllt. Bei näherer Rechnung sieht man, daß die Koeffizienten sogar symmetrisch sind; die ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit \bar{q}_x berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_x &= 1/625 \cdot (125q_x + 114q_{x\pm 1} + 87q_{x\pm 2} + 53q_{x\pm 3} + 21q_{x\pm 4} + 0 \cdot q_{x\pm 5} - 8q_{x\pm 6} - 9q_{x\pm 7} \\
 &\quad - 6q_{x\pm 8} - 2q_{x\pm 9}).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

- Erläutern Sie kurz die handelsrechtliche und wirtschaftliche Zweckbestimmung der Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB).
- Unter welchen Voraussetzungen muß gemäß § 341 e HGB eine Rückstellung für Beitragsrückerstattung gebildet werden?
- Im Anhang zur Bilanz eines Lebensversicherers sind die beigefügten Informationen enthalten. Erläutern Sie allgemein, in welche Teile sich die RfB gliedert und quantifizieren Sie diese Teile bei der vorliegenden Gesellschaft zum Stichtag 31. 12. 1997.
- In § 21 Abs. 2 KStG ist festgelegt, daß die RfB aufzulösen ist, soweit sie einen festgelegten Höchstbetrag übersteigt. Geben Sie mindestens zwei Gründe dafür an, daß eine Begrenzung der RfB sachgerecht ist, und erläutern Sie insbesondere, warum sich eine Begrenzungsvorschrift in einem Steuergesetz findet.

Anlage zu Teil c)

| Entwicklung der Rückstellung | 1977 | 1996 |
|--|---------------|---------------|
| | DM | DM |
| Stand zu Beginn des Geschäftsjahres | 1 183 790 798 | 1 064 627 166 |
| + Umbuchung von verzinslich angesammelten Gewinnanteilen | 3 043 804 | 3 009 324 |
| – Entnahme im Geschäftsjahr | 393 055 393 | 357 005 524 |
| + Zuweisung aus dem Überschuß des Geschäftsjahres | 539 424 135 | 473 159 832 |
| Stand am Ende des Geschäftsjahres | 1 333 203 344 | 1 183 790 798 |
| Davon sind festgelegt für | | |
| bereits deklarierte laufende Gewinnanteile | 413 299 060 | 379 154 747 |
| bereits deklarierte Schlußgewinnanteile | 27 300 000 | 23 300 000 |
| Schlußgewinnanteilfonds | 367 521 003 | 320 379 495 |

Die Rückstellung für erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung ist für die Gewinnbeteiligung des Versicherungsnehmer bestimmt. Die Entnahme umfaßt alle Gewinnanteile, die über die Direktgut-schrift hinaus den Versicherungsnehmern in Höhe von 143 293 010 DM ausgezahlt, zur Laufzeitver-kürzung sowie als Summenzuwachs in Höhe von 24 622 525 DM gutgebracht oder zur verzinslichen Ansammlung in Höhe von 225 139 859 DM gutgeschrieben wurden.

Der für die verzinsliche Ansammlung entnommene Betrag enthält mit 48 326 051 DM auch die über den Rechnungszins hinausgehenden Zinsen auf die angesammelten Gewinnanteile.

Lösung

- a) Die RfB ist ein Passivposten in der Bilanz eines Lebensversicherungsunternehmens (LVU) zum Ausweis derjenigen Beträge, die als erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung (Überschußbeteili-gung) an die Versicherungsnehmer in einer späteren Periode bestimmt sind. Insoweit bildet die RfB einen zeitlichen Puffer zwischen der Überschußentstehung und -zuweisung. In wirtschaft-licher Hinsicht besteht der Zweck der RfB im wesentlichen darin, Schwankungen des Rohüber-schusses auszugleichen und damit die Verstetigung der laufenden Überschußbeteiligung zu erleichtern; ferner werden die für die zeitanteilige Finanzierung der Schlußüberschußanteile be-nötigten Beträge ausgewiesen.
- b) Nach § 341e Abs. 2 Nr. 2 HGB ist eine RfB zu bilden, wenn die ausschließliche Verwendung dieser Rückstellung für die Beitragsrückerstattung durch Gesetz, Satzung, geschäftsplanmäßige Erklärung oder vertragliche Vereinbarung gesichert ist.
- c) Eine RfB gliedert sich in
 1. die gebundene RfB
 - durch Vorausdeklaration festgelegte Überschußanteile
 - Schlußüberschußanteilfonds (sofern das LVU eine Schlußüberschußbeteiligung gewährt)
 2. die ungebundene (freie) RfB.

Beim vorliegenden Unternehmen entnimmt man den Anhang folgende Beträge:

| | |
|--|--------------------|
| gebundene RfB: | |
| - bereits deklarierte Überschußanteile | 413 299 060 |
| | + 27 300 000 |
| - Schlußüberschußanteilefonds | 367 521 003 |
| | <u>808 120 063</u> |
| freie RfB: | |
| | 1 333 203 344 |
| | - 808 120 063 |
| | <u>525 083 281</u> |

- d) Die Begrenzungsvorschriften, die sich faktisch nur auf die freie RfB beziehen, sind sachgerecht, weil sie sicherstellen, daß nicht in einem unangemessenen Ausmaß Mittel thesauriert werden, die von ihrer Zweckbestimmung her für die Beitragsrückerstattung an die Versicherungsnehmer bestimmt sind. Damit wird unter anderem
- eine zeitnahe Überschußbeteiligung gewährleistet, der zeitliche Zusammenhang zwischen der Entstehung und der Ausschüttung der Überschüsse wird nicht zerstört;
 - die Bildung einer eigenkapitalähnlichen freien RfB bei gleichzeitiger steuerfreier Zuführung verhindert, mit der die übliche Besteuerung einbehaltener Gewinne unterlaufen werden könnte.

Aufgabe 3 (45 Punkte)

(i) Man erläutere die Vertragsmodalitäten einer Europäischen bzw. einer Amerikanischen Call- bzw. Put-Option auf eine Aktie.

(ii) Vereinfachte Aktienindex-gebundene Lebensversicherung für ein Jahr:

Eine einjährige Versicherung sehe folgende Leistungs- bzw. Beitragszahlungsmodalitäten vor:

Brutto-Einmalbeitrag $B = \text{DM } 10\,000,-$, es wird eine Mindestrückzahlung des Brutto-Einmalbeitrags garantiert. Es wird eine Partizipation von 50% der Steigerung des DAX bezogen auf den maßgeblichen Beitrag in Höhe von $\text{DM } 9\,500,-$ als Überschußbeteiligung versprochen. Als Ablauf-

leistung wird also die Summe $\text{Max} \left(10\,000, \left(\frac{x(1)}{x(0)} - 1 \right) \cdot 0,5 \cdot 9\,500 + 10\,000 \right)$ garantiert, dabei be-

zeichnet $x(1)$ den Stand des DAX-Indexes nach Ablauf eines Jahres und $x(0)$ den Stand des DAX-Indexes bei Abschluß des Vertrages. Das Versicherungsunternehmen hat folgende Anlagemöglichkeiten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses: Erzielbarer Jahreszins: 5%, der Stand des DAX beträgt 4750 Punkte und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 4750 kostet $\text{DM } 152$. Wie kann man eine kongruente Deckung des Gewinnversprechens darstellen?

Welcher Teilbetrag der Brutto-Prämie bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfalleistung und von Verwaltungskosten, wenn die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit dem erwähnten Call in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

(Hinweis: Es wird vereinfachend angenommen, daß steuerliche Aspekte, z. B. die Kapitalertragssteuer, unberücksichtigt bleiben!)

Lösung:

- (i) Ein Optionskontrakt ist ein spezielles Termingeschäft, das dem Käufer des Kontraktes, d. h. dem Inhaber der Option das Recht einräumt,
- eine bestimmte Menge von Aktien zu einem vorab festgelegten Preis (Ausübungspreis)
 - nur am Ende (Europäische Option) oder aber auch während (Amerikanische Option) einer bestimmten Frist (Laufzeit der Option)
 - zu kaufen (Call-Option) bzw. zu verkaufen (Put-Option).

Optionskontrakte werden unter anderem zur Absicherung von Vermögensanlagen benötigt.

(ii) Das Leistungsversprechen der vereinfachten Aktienindex-bezogenen Versicherung bei Ablauf kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\text{Max} \left(10000, \left(\frac{x(1)}{x(0)} - 1 \right) \cdot 0.5 \cdot 9500 + 10000 \right) = 10000 + 10000 \cdot 0,475 \cdot \text{Max} \left(0, \frac{x(1)}{x(0)} - 1 \right)$$

und beträgt daher: $10000 + 10000 \cdot \frac{0,475}{x(0)} \cdot (x(1) - x(0))^+$. Das gegebene Leistungsversprechen läßt sich also dann einhalten, wenn man den Betrag von $\frac{10000}{1,05} \approx 9523,81$ zu 5% anlegt und gleichzeitig eine Call-Option auf den DAX zum Ausübungspreis von $x(0) = 4750$ kauft, das kostet DM 152,-, so daß für die kongruente Geldanlage DM 9675,81 benötigt werden. Von dem Bruttobeitrag in Höhe von DM 10000,- verbleiben also DM 324,19 zur Deckung einer Todesfalleistung und der Kosten.

Aufgabe 4 (70 Punkte)

Der Aktuar eines Lebensversicherungsunternehmens kalkuliert eine Berufsunfähigkeitsversicherung, – bei der eine erhebliche Rente versichert werden soll – individuell. [Es wird unterstellt, daß der Gleichbehandlungsgrundsatz nicht verletzt wird.]

- Der Versicherte ist männlich.
- Beruf: Wirtschaftsprüfer
- Das Beitrittsalter beträgt 30 Jahre.
- Die Versicherungs- und Prämienzahlungsdauer soll 5 Jahre betragen, eine eventuell gezahlte Berufsunfähigkeitsrente endet ebenfalls im Alter 35.
- Alle Zahlungen erfolgen jährlich vorschüssig.

a) Zunächst soll die Wahl der Rechnungsgrundlagen für die Aktivensterblichkeit erfolgen. Es stehen 5 Tafeln zur Auswahl [alle Werte in ‰]:

- I. die Tafel DAV 1994T
- II. eine Tafel mit unternehmenseigenen Todesfallgrundlagen (modifiziert)
- III. die Tafel DAV 1994 R
- IV. zu I. die unmodifizierten Grundlagen
- V. zu III. die unmodifizierten Grundlagen

| Alter | I | II | III | IV | V |
|-------|------|------|------|------|------|
| 30 | 1,48 | 1,03 | 0,62 | 1,12 | 1,06 |
| 31 | 1,48 | 1,05 | 0,66 | 1,17 | 1,12 |
| 32 | 1,49 | 1,07 | 0,72 | 1,23 | 1,22 |
| 33 | 1,55 | 1,09 | 0,79 | 1,30 | 1,33 |
| 34 | 1,64 | 1,15 | 0,84 | 1,37 | 1,40 |
| 35 | 1,75 | 1,23 | 0,88 | 1,47 | 1,46 |

Welche Grundlagen sollte der Aktuar wählen? Falls die Auswahl von Voraussetzungen abhängen könnte, die nicht angegeben sind, beschreiben sie bitte diese für Sie ggfs. relevanten Voraussetzungen (Rahmenbedingungen) und geben an, welche Konsequenzen aus welchen Voraussetzungen folgen.

b) Für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten liegen an Werten i_x [in ‰] aus den aktuellen Berufsunfähigkeitsgrundlagen der DAV vor

| Alter | i_x [‰] |
|-------|-----------|
| 30 | 2,28 |
| 31 | 2,28 |
| 32 | 2,28 |
| 33 | 2,28 |
| 34 | 2,28 |
| 35 | 2,30 |

Sind diese Grundlagen für die Kalkulation anzusetzen oder bestehen Alternativen? Welche Zusatzinformationen werden hierfür benötigt?

- c) Als weitere Grundwerte liegen die Invalidensterblichkeit und die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten vor [alle Werte in ‰].

| Alter | Invalidensterblichkeit | | | | | |
|-------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 | N = 5 | N = 6 |
| 30 | 14,69 | 12,61 | 10,49 | 8,35 | 6,14 | 3,86 |
| 31 | 15,86 | 13,61 | 11,32 | 9,02 | 6,66 | 4,24 |
| 32 | 17,00 | 14,59 | 12,14 | 9,68 | 7,18 | 4,63 |
| 33 | 18,12 | 15,56 | 12,95 | 10,33 | 7,68 | 5,01 |
| 34 | 19,23 | 16,53 | 13,76 | 10,98 | 8,19 | 5,39 |
| 35 | 20,33 | 17,49 | 14,55 | 11,62 | 8,68 | 5,78 |

Die Spaltenwerte zu N bezeichnen die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines x-jährigen in der Selektionsperiode N.

| Alter | Reaktivierungswahrscheinlichkeit | | | | | |
|-------|----------------------------------|-------|--------|--------|--------|-------|
| | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 | N = 5 | N = 6 |
| 30 | 67,60 | 76,16 | 126,52 | 133,35 | 132,30 | 74,55 |
| 31 | 68,68 | 74,59 | 119,05 | 123,71 | 121,72 | 67,31 |
| 32 | 69,11 | 72,76 | 111,83 | 114,27 | 111,64 | 60,58 |
| 33 | 68,82 | 70,37 | 104,57 | 104,67 | 101,89 | 54,20 |
| 34 | 68,04 | 67,36 | 96,78 | 94,57 | 92,21 | 48,05 |
| 35 | 66,88 | 63,99 | 88,83 | 84,51 | 82,85 | 42,26 |

Im weiteren unterstellen wir:
 die Wahl der Grundlagen II. (für die Aktivensterblichkeit);
 $0,8 \cdot i_x$ für die Invalidisierung;
 die übrigen angegebenen Rechnungsgrundlagen;
 einen Rechnungszins von 0%.

Bitte geben Sie unter diesen Bedingungen formel- und zahlenmäßig an:

- den Barwert der Aktivitätsrente im Alter 33
- den Barwert der Berufsunfähigkeitsrente im Alter 33 bei Invalidisierung im Alter 32
- den Anwartschaftsbarwert des Aktiven auf Invalidenrente im Alter 33.

Lösung

a)

- (1) Das primäre Entscheidungskriterium ist die Frage, ob die Versicherung Erlebensfall- oder Todesfallcharakter hat. Die Frage ist für die selbständige Invaliditätsversicherung gegen jährliche Prämienzahlung (ohne Prämienberechnung oder Abschätzung) nicht unmittelbar zu beantworten, da die Sterblichkeit sowohl in den Leistungs- als auch in den Prämienzahlungsbarwert einght.
 (Anm.: die Versicherung hat Todesfallcharakter)
 - Bei Erlebensfallcharakter ist III oder V zu wählen
 - Bei Todesfallcharakter stehen I bis III zur Diskussion
- (2) Grundsätzlich soll keine Tafel ohne Modifizierung gewählt werden, wenn keine top-down Kalkulation mit Ermittlung eines insgesamten Sicherheitsniveaus vorgenommen wird. (I; II; III)
- (3) Bei Todesfallcharakter spricht insbesondere die Rahmenbedingung
 - erheblicher Selektionseffekt bei $n = 5$ (unter diesen Bedingungen ist eine medizinische und eine Bedarfsprüfung vorauszusetzen) dafür, daß II nicht unangemessen ist.
 Bei Erlebensfallcharakter
 - zeigt der Vergleich von V und II, daß die Wahl von III erforderlich bleibt

(4) Pragmatische Gründe:

- Die Wahl der Aktivensterblichkeit ist von untergeordneter Bedeutung, insoweit kann pragmatischen Gründen der Verwaltbarkeit durchaus Rechnung getragen werden.
- Bei Todesfall bedeutet dies, daß bei allgemeiner Kalkulation der Gesellschaft mit II hier keine Ausnahme gemacht werden muß.
- Bei Erlebensfallcharakter ist der Ansatz von II (näherungsweise entsprechen die Werte ja V) vertretbar. Bei I sollte man zumindest eine Proberechnung durchführen.
- Bei der Fallkonstruktion ist es nicht abwegig, daß der Wettbewerbsfaktor zu beachten ist. Die Wahl von II bei Todesfallcharakter wurde bereits diskutiert. (Die Wahl von I bei Erlebensfallcharakter, wenn das Kollektiv allgemein mit II kalkuliert ist, ist allerdings willkürlich und fehlerhaft.)

b)

- Das Risiko „Wirtschaftsprüfer“ stellt bzgl. der Berufsgruppe ein gutes Risiko dar. Es bietet sich an, die statistische Herleitung der Tafel daraufhin zu überprüfen, ob Spezifikationen für diese Berufsgruppe möglich sind.
- Die ungewöhnlich kurze Versicherungsdauer bringt einen starken Selektionseffekt für die Versicherung. Dies kann als Sicherheit in die Überprüfung einbezogen werden (weiterhin normale individuelle Verhältnisse vorausgesetzt).
- Kann – was wahrscheinlich ist – das Unternehmen eine solche Deckung innerhalb des eigenen Portefeuilles nicht zeichnen, ist die Einbettung in ein Rückversicherungskollektiv ggfs. erforderlich.

c) Mit den üblichen Bezeichnungen, gilt

Aktivitätsrente:

$$l_{(x)+m+1}^{aa} = l_{(x)+m}^{aa} \cdot (1 - q_{(x)+m}^{aa} - i_{(x)+m})$$

$$a_{(x)+m, n-m}^{aa} = \frac{1}{D_{(x)+m}^{aa}} \cdot \sum_{\mu=m}^{n-1} D_{x+\mu}^{aa}$$

Mit den Vorgaben (kein Zins), folgt

$$a_{33,2}^{aa} = 1 + (1 - 0,00109 - 0,8 \cdot 0,00228) = 1,997086$$

(Bei multiplikativen Ansatz: 1,997088)

Invalidenrentenbarwert $x = 33$; $z = 32$

$$l_{(z)+m+1}^i = l_{(z)+m}^i \cdot (1 - q_{(z)+m}^i - r_{(z)+m})$$

$$a_{(x)+m, n-m}^i = \frac{1}{D_{(z)+m}^i} \cdot \sum_{\mu=m}^{n-1} D_{(z)+\mu}^i$$

Mit den Vorgaben, folgt:

$$a_{(32), 33, 2}^i = 1 + \frac{l_{(32)+2}^i}{l_{(32)+1}^i} = 1 + (1 - 0,01556 - 0,07037) = 1,91407$$

Anwartschaftsbarwert im Alter 33 auf Invalidenrente (Glieder in [...] dürfen entfallen)

$$a_{(x)+m, n-m}^{ai} = \frac{1}{D_{(x)+m}^{aa}} \cdot \sum_{\mu=m}^{n-1} D_{(x)+\mu}^{aa} \cdot i_{(x)+\mu} \cdot \left[\left(1 - \frac{q_{(x)+\mu}^{aa}}{2} \right) \right]$$

$$\cdot 0,5 \cdot \left(a_{(x)+\mu, n-m}^i + a_{(x)+\mu+1, n-m-1}^i \left[-\frac{1}{12} \right] \right)$$

$$a_{33,2}^{ai} = \frac{D_{33}^{ai} + D_{34}^{ai}}{D_{33}^{aa}}$$

$$a_{33,2}^i = 1 + \frac{i_{(34)}}{i_{(33)}} = 1 + (1 - 0,01812 - 0,06882) = 1,91306$$

$$a_{(34),1}^1 = 1; a_{(35)}^0 = 0$$

$$a_{33,2}^{ai} = 0,8 \cdot 0,00228 \cdot \left(1 - \frac{0,00109}{2}\right) \cdot 0,5 \cdot 2,91306$$

$$+ 0,997086 \cdot 0,8 \cdot 0,00228 \cdot \left(1 - \frac{0,00115}{2}\right) \cdot 0,5 \cdot (1 - 0) = 0,002655 + 0,009088 = 3,5638 \cdot 10^{-3}$$

(hierbei wurde taggenaue Abrechnung vorausgesetzt. Die Korrektur mit 1/12 ist sicher realistischer)