# Bericht zur Prüfung im Oktober 1997 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

*Jürgen Strobel* (Köln), *Klaus Allerdissen* (Overath) und *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)

Am 18. 10. 1997 wurde in Bad Neuenahr die zweite Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der neuen Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 34 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 30 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der drei Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mußten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Eine Tabelle der Standardnormalverteilung wurde zur Verfügung gestellt.

*Aufgabe 1* (60 Punkte)

Bei der Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 T (vgl. Loebus, Blätter der DGVM, Oktober 1994, S. 497–524) war ein additiver Schwankungszuschlag $s_x^\alpha$ zu den ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x$ der ADST 1986/88 zu ermitteln. Dabei waren u.a. folgende Modellvoraussetzungen und Bezeichnungen gegeben:

$M$ = Modellbestand = $\bigcup_x M_x$

$L_x^M$ = Anzahl der x-jährigen in M = Anzahl der Personen aus $M_x$

$T_x$ = Anzahl der im Alter x Gestorbenen aus $M_x$ (Zufallsvariable)

$q_x^M = \frac{T_x}{L_x^M}$ = Zufallsvariable der (rohen) Sterbewahrscheinlichkeiten

Die Zahl der Todesfälle eines Alters x sei binomialverteilt mit $B(L_x^M, q_x)$, und es sei sichergestellt, daß $T_x \geq 5$ für alle Werte von x. Alle Risiken aus M seien unabhängig.

a) Für die Schwankungszuschläge $s_x^\alpha$ sei die Forderung erfüllt:

$$P(q_x^M \cdot L_x^M \leq (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes Alter x.} \qquad (+)$$

Geben Sie unter den genannten Voraussetzungen mit Hilfe der Normalapproximation eine Bedingung zur Berechnung der Mindestgröße des Teilbestandes $L_x^M$ in Abhängigkeit von $s_x^\alpha$ an.

b) Wie groß müßten $L_{25}^M$ und $L_{50}^M$ demnach sein, wenn $q_{25} = 1‰$ und $q_{50} = 6‰$, $\alpha = 0{,}01$ und $s_x^\alpha = 0{,}1 \cdot q_x$ gegeben sind?

c) Die Forderung aus a) werde nun ersetzt durch

$$P\left(\sum_x q_x^M \cdot L_x^M \leq \sum_x (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M\right) \geq 1 - \alpha\,. \qquad (++)$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 0{,}01$ die erforderliche Mindestgröße des Gesamtbestandes M, wenn aus Vereinfachungsgründen für jedes Alter x die Sterbewahrscheinlichkeit $q_x$ mit der mittleren Sterbewahrscheinlichkeit $q = 15‰$ des Gesamtbestandes gleichgesetzt und $s_x^\alpha = 0{,}03 \cdot q_x$ für jedes x vorgegeben wird.

*Lösung*

a) Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $T_x = q_x^M \cdot L_x^M$ für jedes x asymptotisch normalverteilt, so daß aus der aus der Gültigkeit von (+) folgt

$$P(T_x \leq (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{T_x - E(T_x)}{\sigma(T_x)} \leq \frac{(q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M - E(T_x)}{\sigma(T_x)}\right) \geq 1 - \alpha\,.$$

Da $E(T_x) = q_x \cdot L_x^M$, $\sigma(T_x) = \sqrt{q_x(1-q_x)L_x^M}$, folgt nach Anwendung der Normalapproximation:

$$\frac{(q_x + s_x^\alpha)\cdot L_x^M - q_x \cdot L_x^M}{\sqrt{q_x(1-q_x)\cdot L_x^M}} \geq u_{1-\alpha} \quad (1-\alpha\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

$$\frac{s_x^\alpha}{\sqrt{q_x(1-q_x)}} \cdot \sqrt{L_x^M} \geq u_{1-\alpha}$$

$$L_x^M \geq \left(\frac{u_{1-\alpha}}{s_x^\alpha}\right)^2 \cdot q_x(1-q_x)\,.$$

b) Mit $q_{25} = 1‰ = 0{,}001$, $s_{25}^\alpha = 0{,}1 \cdot q_{25} = 10^{-4}$,

$$\alpha = 0{,}01\,, \quad u_{0,99} = 2{,}326666 \quad \text{folgt} \quad L_{25}^M \geq \left(\frac{2{,}326666}{10^{-4}}\right)^2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}999 = 540796\,,$$

und analog für $x = 50$ mit $q_{50} = 6‰$, $s_{50}^\alpha = 6 \cdot 10^{-4}$

$$L_{50}^M \geq \left(\frac{2{,}326666}{6 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994 = 89682\,.$$

Man benötigt also (unter diesen Voraussetzungen) außerordentlich große Bestände.

c) Aufgrund der Voraussetzungen ist auch $T = \sum_x T_x$ asymptotisch normalverteilt, und aus (++) und den weiteren Voraussetzungen folgt

$$P\left(\sum_x q_x^M \cdot L_x^M = \sum_x T_x \leq \sum_x (q_x + s_x^\alpha)\cdot L_x^M\right) \geq 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{T - E(T)}{\sigma(T)} \leq \frac{1{,}03 \cdot q \cdot \sum_x L_x^M - E(T)}{\sigma(T)}\right) \geq 1 - 0{,}01$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}03 \cdot q \cdot \sum_x L_x^M - \sum_x q \cdot L_x^M}{\sqrt{q(1-q)\sum_x L_x^M}} \geq u_{0,99} = 2{,}326666$$

$$\Rightarrow \frac{0{,}03 \cdot 0{,}015 \cdot \sum_x L_x^M}{\sqrt{0{,}015 \cdot 0{,}985 \cdot \sum_x L_x^M}} \geq 2{,}326666$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_x L_x^M} \geq \frac{2{,}326666 \cdot \sqrt{0{,}015 \cdot 0{,}985}}{0{,}00045}$$

$$\cdot \sum_x L_x^M \geq \left(\frac{2{,}326666}{0{,}00045}\right)^2 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}985$$

$$= 394976\,.$$

*Aufgabe 2* (60 Punkte)

Der Aktuar eines Lebensversicherungsunternehmens macht sich anläßlich der Kalkulation einer neuen Tarifgeneration Gedanken über die erforderlichen Sicherheitsspannen in den Verwaltungskostenansätzen der neuen Prämien. Der Zusammenhang von Kostensteigerung, Rationalisierungserfolg und Neugeschäftsentwicklung auf die Verwaltungskosten soll beleuchtet werden.
Er geht von den Überlegungen aus:

1. Die Verwaltungskosten in der Lebensversicherung steigen in erster Näherung mit dem Lohnkostenindex.

2. Gegenläufig zur Kostensteigerung wirken sich aus:
   a) Rationalisierung (Mengendegression + Effizienzsteigerung)
   b) Neuzugang.

Der Rationalisierungseffekt wirkt sich auf das Prämienwachstum $P(t+1) - P(t)$ der Gesellschaft durch den Rationalisierungskoeffizienten k so aus, daß dieser Prämienzuwachs (Reinzuwachs) mit

a) 75%
b) 50%
c) 25%

des Altbestandes verwaltet werden kann.

Der Aktuar wählt als Bezeichnungen:

1. $g(t)$ = Verwaltungskostensatz des t-ten GJ
2. $P(t)$ = Bestandsprämie des t-ten GJ
3. $L$ = Lohnkostensteigerung (= const. = 3%)
4. $r$ = Reinzuwachsrate der Gesellschaft (= const.)
5. $k$ = Rationalisierungskoeffizient (= const.)

[Mit diesen Bezeichnungen gilt:
für die Reinzuwachsrate: $r = \{P(t+1) - P(t)\}/P(t)$]

*Aufgabe:*

a) Bestimmen Sie die jährliche Steigerungsrate des Kostensatzes g für Reinzuwächse von 3%, 5%, 7,5% jeweils in Abhängigkeit von k.
b) Welche Steigerung des Kostensatzes ergibt sich für r = 5%, k = 0,75, L = 3, nach 27 Jahren?
c) Wie hoch müssen die Reinzuwächse sein, um für die angenommene Lohnkostensteigerung L und den jeweiligen Rationalisierungskoeffizienten k einen konstanten Kostensatz zu gewährleisten?

*Lösung*

Zu a)

$$g(t+1) \times P(t+1) = g(t) \times (1+L) \times P(t) + k \times g(t) \times (1+L) \times [P(t+1) - P(t)]$$

$$\frac{g(t+1)}{g(t)} = (1+L) \times \left[\frac{P(t)}{P(t+1)} + k\,\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t+1)}\right]$$

$$= \frac{(1+L)(1+k\,r)}{1+r}.$$

Jährliche Steigerungsrate des Kostensatzes:

| r\k | 0,75 | 0,5 | 0,25 |
|---|---|---|---|
| 0,03 | 1,022 | 1,015 | 1,008 |
| 0,05 | 1,018 | 1,005 | 0,993 |
| 0,07 | 1,012 | 0,994 | 0,976 |

Zu b)

Es gilt

$$\frac{g(t+k)}{g(t)} = \left[\frac{g(1+1)}{g(t)}\right]^k$$

Einsetzen aus der Tabelle ergibt: $1{,}018^{27} = 1{,}619$

Zu c)

Der Ansatz: $\frac{g(t+1)}{g(t)} = 1$ führt zu

$$r = \frac{L}{1 - k(1+L)}$$

Es sind als Reinzuwächse erforderlich:

| k | | | r |
|---|---|---|---|
| 0,75 | 0,03/0,2275 | = | 13,18% |
| 0,50 | 0,03/0,485 | = | 6,18% |
| 0,25 | 0,03/0,7425 | = | 4,04% |

*Aufgabe 3* (60 Punkte)

$S_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ bezeichne die Schadenhöhe der i-ten Police eines kleinen Lebensversicherungsbestandes. Die drei möglichen Schadenhöhen in dem betrachteten Jahr seien:

a) $S_i = 0$, falls die versicherte Person mit dem Alter x den Ablauf des Jahres erlebt,
b) $S_i = 100$, falls die Police gekündigt wird,
c) $S_i = 1000$, falls die versicherte Person stirbt.

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit sei $q_{1,x} = 0{,}001$, die Stornowahrscheinlichkeit sei $q_{2,x} = 0{,}15$, und es gelte für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit $p_x = 1 - q_{1,x} - q_{2,x}$.

(I) Mittels Normalapproximation berechne man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Schadensumme von fünf stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Policen $S = S_1 + \ldots + S_5$ den Wert 200 übersteigt.
(II) Wie hoch ist die Netto-Prämie für einen Stop-Loss-Vertrag mit Selbstbehalt $c = 200$ für die obige Schadensumme S unter der Annahme, daß S normalverteilt ist?
(III) Anleitung zu (II): Verwende folgende allgemeine Formel für die Netto-Prämie $E[(S-c)^+]$ eines Stop-Loss-Vertrages mit Selbstbehalt c unter der Voraussetzung, daß die kumulierte Schadensumme S eines Versicherungsbestandes näherungsweise normalverteilt ist mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$:

$$E[(S-c)^+] = (\mu - c)\, N\left(\frac{\mu - c}{\sigma}\right) + \sigma \cdot \varphi\left(\frac{\mu - c}{\sigma}\right), \qquad (*)$$

dabei bezeichnen N die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und $\varphi$ die zugehörige Dichtefunktion, d. h. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Man beweise die Formel (*).

*Lösung*

Zu (I):

Es ist $E[S_i] = 1000 \cdot (0{,}001) + 100 \cdot (0{,}15) = 16$ und $VAR[S_i] = 1000^2 \cdot (0{,}001) + 100^2 \cdot (0.15) - 16^2 = 2244$.
Daher ist $E[S] = 5\,E[S_i] = 80$, $VAR[S] = 5\,VAR[S_1] = 11\,220$, und man hat $P(>200) = 1 - N((200-80)/\sqrt{11\,220}) = 1 - N(1{,}1329) \approx 0{,}1285$.

Zu (II):

Aufgrund der angegebenen Formel hat man mit $\frac{\mu - c}{\sigma} = -1{,}1328823\ldots$ für den ersten Term auf der rechten Seite der Formel (*): $-120 \cdot 0{,}1285 \approx -15{,}42$, und für den zweiten Term ergibt sich der Wert $0{,}209999593\,\sigma$, insgesamt also $22{,}24410\ldots - 15{,}42 = 6{,}824$.

Zu (III): (Beweis der Formel (*))
Es ist

$$p(c) := E[(S-c)^+] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty (x-c)\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^\infty (\sigma x + \mu - c)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \sigma \cdot dx$$

$$= \sigma \int_k^\infty (x-k)\, \varphi(x)\, dx \quad \text{mit} \quad k := \frac{c-\mu}{\sigma}$$

und $\varphi$ die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung.

Wegen $x \cdot \varphi(x) = -\varphi'(x)$ ist $\sigma \cdot \int_k^\infty x\, \varphi(x)\, dx = -\sigma(\varphi(\infty) - \varphi(k)) = \sigma\, \varphi(k)$ und $-\sigma \int_k^\infty k\, \varphi(x)\, dx$ berechnet sich zu $(\mu - c)(1 - N(k)) = (\mu - c)\, N(-k)$, und genau das beweist die Behauptung.