Bericht zur Prüfung im Juni 1996 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Hans-Jochen Bartels (Mannheim), *Michael Scharr* (Mannheim) und *Jürgen Strobel* (Köln)

Am 01.06.1996 wurde in Köln die erste Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der neuen Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 66 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 48 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sechs Aufgaben gestellt waren. Von diesen Aufgaben waren vier zu bearbeiten, darunter mindestens eine der Aufgaben 3 und 4. Die anderen Aufgaben konnten frei gewählt werden. Um die Klausur zu bestehen, mußten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Eine Tabelle der Standardnormalverteilung wurde zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1 (45 Punkte)

Für eine Sterbetafel, die in einem Altersbereich nach dem Sterbegesetz von Gompertz-Makeham ausgeglichen ist, gilt bekanntlich in diesem Bereich:

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{(c^x)}$$

mit positiven Konstanten k, s, g und c.
Es sei bekannt, daß

$$s = 0{,}999000$$
$$g = 0{,}999180$$
$$c = 1{,}098520.$$

Ferner gilt für die Sterblichkeitsintensität eines x-jährigen im Alter x + t im Gompertz-Makeham'schen Ansatz

$$\mu_{x+t} = A + B c^{x+t}, \quad t > 0$$

a) Berechnen Sie aus diesen Angaben die Konstanten A und B.

$$\left(\text{Hinweis: } \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x\right)$$

b) Ermitteln Sie die beiden sogenannten „Hauptalter" x_1 und x_2 der Sterbetafel aus der Beziehung

$$\mu_{x_i} = A + B c^{x_i}, \quad i = 1, 2$$

wenn gleichzeitig für die Sterblichkeitsintensität in den Hauptaltern gilt

$$\mu_{x_i}^2 - \ln c \cdot \mu_{x_i} + A \cdot \ln c = 0, \quad i = 1, 2.$$

Lösung:

a) Aus dem Gompertz-Makeham'schen Sterbegesetz ergibt sich für natürliche $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{s^{x+t} \cdot g^{(c^{x+t})}}{s^x \cdot g^{(c^x)}} \\ &= s^t \cdot g^{c^x (c^t - 1)} \end{aligned}$$

Damit:

$$\ln {}_t p_x = t \cdot \ln s + c^x \cdot (c^t - 1) \cdot \ln g$$

und

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_t p_x = -(\ln s + c^x \cdot \ln g \cdot \ln c \cdot c^t)$$

$$= -(\ln s + \ln g \cdot \ln c \cdot c^{x+t})$$

$$= A + B \cdot c^{x+t}$$

Also:

$$A = -\ln s = -\ln 0{,}999 = 0{,}0010005$$

$$B = -\ln g \cdot \ln c = -\ln 0{,}99918 \cdot \ln 1{,}09852$$
$$= 0{,}0000771\,.$$

b) $\mu_{x_i} = A + B \cdot c^{x_i} = A + B \cdot e^{x_i \cdot \ln c}$

$$\mu_{x_i} - A = B \cdot e^{x_i \cdot \ln c}$$

$$\ln(\mu_{x_i} - A) = \ln B + x_i \cdot \ln c$$

$$x_i = \frac{\ln(\mu_{x_i} - A) - \ln B}{\ln c}, \quad i = 1, 2. \qquad (+)$$

Es bleibt, μ_{x_1} und μ_{x_2} zu berechnen.
Dies geschieht mit Hilfe der Gleichungen

$$\mu_{x_i}^2 - \ln c \cdot \mu_{x_i} + A \cdot \ln c = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\mu_{x_1/x_2} = \frac{1}{2}\ln c \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\ln c)^2 - A \cdot \ln c}$$

Die beiden voneinander verschiedenen Lösungen ergeben sich zu

$$\mu_{x_1} = 0{,}092952$$

$$\mu_{x_2} = 0{,}0010113\,.$$

Durch Einsetzen in (+) erhält man schließlich:

$$x_1 = \frac{\ln(0{,}092952 - 0{,}0010005) - \ln 0{,}0000771}{\ln 1{,}09852}$$

$$= 75{,}3898$$

und analog

$$x_2 = -20{,}9182\,.$$

Aufgabe 2 (45 Punkte)

a) Berechnen Sie allgemein zu gegebenen Rechnungsgrundlagen 1. und 2. Ordnung die maximal finanzierbare Todesfalleistung (d. h. garantierte Todesfallsumme zuzüglich maximal möglichem Todesfallbonus) einer einjährigen nicht rückkaufsfähigen Risikoversicherung.
b) Berechnen Sie folgende Beispiele zu a) für eine garantierte Todesfallsumme von 100.000,– für einen 20-jährigen und einen 60-jährigen Mann.

Rechnungsgrundlagen	q_x	i	α_1	$\beta + \alpha_2$	γ	K
1. Ordnung	DAV 94 T	4%	40‰	9%	2‰	12,–
2. Ordnung	65% von DAV 94 T	7%	50‰	0%	1‰	100,–

α_1 in % der Bruttobeitragssumme (ohne K), $\beta+\alpha_2$ in % des Bruttobeitrags (ohne K), γ in ‰ der garantierten Todesfallsumme, K Stückkosten.

Erläutern Sie das Ergebnis.

Ausschnitt aus DAV 94 TM:

$q_{20} = 1{,}476‰$
$q_{60} = 17{,}625‰$.

Lösung:

a) Intuitiv: Die Risikoprämie 2. Ordnung muß kleiner gleich dem Saldo des Beitrags B einschließlich Stückkosten K und der tatsächlichen Abschluß- (K'_0) und sonstigen Kosten (K'_1) sein:

$$v' q'_{x+m-1} T \leq B - K'_1 - K'_0$$

wobei T = Todesfallsumme einschließlich Bonus, S = garantierte Todesfallsumme

$K'_0 = \alpha'_1 (B-K)$
$K'_1 = (\alpha'_2+\beta')(B-K)+\gamma' S + K'$.

Oder nach dem Skript (S. 5) (äquivalentes Ergebnis): Das Deckungskapital 2. Ordnung V_1 muß größer gleich Null sein. In der geschlossenen Form heißt das

$$V_m = -\frac{r'}{{}_m p'_x} K'_0 + \frac{1}{{}_m p'_x} (B\, r' - K'_1\, r' - q'_{x+m-1}\, T) \geq 0 \quad \text{für} \quad m=1$$

also

$$T \leq \frac{r'}{q'_{x+m-1}} (B - K'_1 - K'_0).$$

b) <u>x = 20</u>

$$B = 100.000 \frac{q_{20}\, v + 2‰}{1 - 9\% - 40‰} + 12$$

$$= 100.000 \frac{0{,}003419}{0{,}87} + 12 = 405,-$$

$$T \leq \frac{1{,}07}{65\% * 1{,}476‰} (405 - 100 - 100 - 50‰ * 393) = \mathbf{206.717,-}.$$

<u>x = 60</u>

$$B = 100.000 \frac{q_{60}\, v + 2‰}{1 - 9\% - 40‰} + 12$$

$$= 100.000 \frac{0{,}018947}{0{,}87} + 12 = 2.189{,}82,-$$

$$T \leq \frac{1{,}07}{65\% * 17{,}625‰} (2.189{,}82 - 100 - 100 - 50‰ * 2.177{,}82) = \mathbf{175.677,-}.$$

Erläuterung:

Selbst bei „gleichbleibendem Abstand" $q'_x = f\, q_x$ der Sterbetafeln 1. und 2. Ordnung wäre eine über alle Alter gleich hohe Todesfallmehrleistung in der Regel nicht korrekt. Grund: Die Kostenkalkulation ist nicht proportional zu q_x, die tatsächlichen Kosten erst recht nicht. Wenn die angegebenen Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung tatsächlich zutreffen, müßte für unterschiedliche Alter auch ein unterschiedlicher Todesfallbonus kalkuliert werden. Die Alternative gleicher Todesfallbonus für alle Alter als Durchschnittsbildung über einen Bestand (derzeit übliche Praxis) wäre zumindest in Frage zu stellen.

Aufgabe 3 (45 Punkte)

Ein kleiner Lebensversicherungsbestand umfaßt die folgenden 16.000 einjährigen Risikoversicherungen:

Versicherungssumme S:	Anzahl der Versicherungen:
10.000	8.000
20.000	3.500
30.000	2.500
50.000	1.500
100.000	500

Die Sterbewahrscheinlichkeit q_{x_k} für jedes versicherte Leben betrage 0,002, die stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Risiken sei vorausgesetzt. Die marktübliche Prämie von 0,003 pro Summe 1 gelte für alle vorkommenden Versicherungssummen. Die Risiken über der Selbstbehaltssumme von 30.000 werden zu einer Prämie von 0,0025 pro Summe 1 rückversichert, so daß zum Beispiel die Rückversicherungsprämie für die rückversicherte Summe 20.000 den Betrag von $0{,}0025 \cdot 20.000 = 50$ ausmacht.

(i) Unter der Annahme, daß eine Normalapproximation für den beim Erstversicherer verbleibenden Bestand möglich ist, berechne man die Ruinwahrscheinlichkeit $P(S > B + R)$ des Erstversicherers bei einer für den Bestand verfügbaren Reserve von nur $R = 4.000$. Hierbei bezeichnet S die beim Erstversicherer verbleibende Schadensumme und B die beim Erstversicherer verbleibende Prämie.

(ii) Man beantworte dieselbe Frage für die Selbstbehaltssumme 50.000.

(iii) Man vergleiche und erläutere die Ergebnisse von (i) und (ii).

Lösung:

zu (i) Bei dem gewählten Selbstbehalt von 30.000 verbleiben im Erstversicherungsbestand:

8.000 Versicherungen mit der Summe 10.000,
3.500 Versicherungen mit der Summe 20.000,
4.500 Versicherungen mit der Summe 30.000,

so daß für die beim Erstversicherer verbleibende Schadensumme S gilt:

$$E[S] = 8.000 \times 10.000 \times 0{,}002 + 3.500 \times 20.000 \times 0{,}002 + 4.500 \times 30.000 \times 0{,}002 = 57 \times 10^4 \text{ und}$$

$$\begin{aligned} VAR[S] = \sum_k s_k^2\, q_k(1 - q_k) &= 8.000 \times 10^8 \times 0{,}002 \times 0{,}998 + 3.500 \times 4 \times 10^8 \times 0{,}002 \times 0{,}998 \\ &\quad + 4.500 \times 9 \times 10^8 \times 0{,}002 \times 0{,}998 = 124{,}75 \times 10^8. \end{aligned}$$

Die Gesamtprämieneinnahme des Bestandes $0{,}003 \times 35.000 \times 10^4$ ist noch um die an den Rückversicherer gehende Prämie $0{,}0025 \times 65 \times 10^6$ zu reduzieren, so daß die verbleibende Prämieneinnahme $B = 8{,}875 \times 10^5$ ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich daher folgendermaßen:

$$P(S > B + R) = P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{VAR[S]}} > \frac{8{,}875 \times 10^5 + 0{,}04 \times 10^5 - 5{,}7 \times 10^5}{\sqrt{124{,}75 \times 10^4}}\right) = P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{VAR[S]}} > 2{,}88\right),$$

unter Verwendung der Normalapproximation (vergleiche die beigefügten Tafeln der Normalverteilung) ergibt dies $\approx 0{,}002$.

Zur Lösung von Teil (ii): Analog berechnet man $P(S > B + R) = 1 - 0{,}9935 = 6{,}5 \times 10^{-3}$.

Zu (iii):

Wenn man der Normalapproximation vertraut (dies müßte an sich überprüft werden!), dann besagt das Ergebnis gerade folgendes: Bei dem höheren Selbstbehalt von 50.000 ergibt sich eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0,0065, d. h. etwas mehr als dreimal so hoch wie bei dem Selbstbehalt von 30.000, bei dem die Ruinwahrscheinlichkeit ungefähr 0,002 beträgt. Das Ergebnis ist qualitativ einleuchtend, weil im Fall des kleineren Selbstbehaltes der beim Erstversicherer verbleibende Bestand homogener ist.

Aufgabe 4 (45 Punkte)

Es bezeichne $x = x(t) = x(t, \omega)$ den Preis einer Aktie. Man betrachte europäische Put- bzw. Call-Optionen auf diese Aktie mit jeweils demselben Ausübungspreis c sowie Ausübungszeitpunkt T.

(i) Mit Hilfe der Identität

$$(*) \qquad \operatorname{Max}(c, x(T)) = x(T) + (c - x(T))^+ = c + (x(T) - c)^+$$

zum Ausübungszeitpunkt T und der „No Arbitrage"-Bedingung leite man die sogenannte Put-Call-Relation ab:

$$\text{Preis der Put-Option zur Zeit } t = e^{-r(T-t)} c - x(t) + w(x, t),$$

dabei bezeichnet $w(x, t)$ den Call-Preis zum Zeitpunkt $t < T$.

(ii) Man leite die Identität (*) ab und interpretiere sie.

Lösung:

Die Identität (*) beweist man direkt durch Fallunterscheidung $c > x(T)$, $c < x(T)$, $c = x(T)$. Sie kann so interpretiert werden: Man betrachtet zwei Portfolios:

Portfolio 1: 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis c zum Ausübungszeitpunkt T;

Portfolio 2: 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis c und Ausübungszeitpunkt T + einen Barbetrag in Höhe von $e^{-r(T-t)} c$ zum Zeitpunkt t, bzw. den Barbetrag c zum Zeitpunkt T (Aufzinsung mit exponentiellem Aufzinsungsfaktor).

Wegen der Identität (*) ist der Wert der beiden Portfolios zum Zeitpunkt T gleich. Da zwischen den Zeitpunkten t und T keine Ein- oder Auszahlungen erfolgen und es in einem funktionierenden Markt keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt, muß der Wert beider Portfolios zu Beginn, d.h. zum Zeitpunkt t auch gleich sein. Hieraus ergibt sich die behauptete Put-Call-Relation.

Aufgabe 5 (45 Punkte)

a) Beschreiben Sie den allgemeinen Formelansatz für den Bruttojahresbeitrag einer einjährigen selbständigen Berufsunfähigkeitsversicherung mit Leistungsdauer bis zum Tode, maximal bis Endalter 65, unter Berücksichtigung von rentenabhängigen Verwaltungskosten während der Versicherungs- (γ_1) und Rentendauer (γ_2) und beitragsabhängigen Abschluß- (α) und Inkassokosten (β).
Die BU-Rente wird jährlich vorschüssig gezahlt, anteilig ab dem nächsten Monatsersten nach Eintritt der BU. Der Eintritt der BU sei in jedem Jahr gleichverteilt.
Wenn Sie Kommutationswerte verwenden, so leiten Sie diese aus den Wahrscheinlichkeiten und Ausscheideordnungen ab.
b) Berechnen Sie den Bruttojahresbeitrag aus a) bei einer BU-Jahresrente von 12.000,– für eine 30-jährige Frau. Die rechnungsmäßigen Kosten sind:

   $\alpha = 40‰$, $\gamma_1 = 1\%$, $\gamma_2 = 2\%$, $\beta = 5\%$.

c) Berechnen Sie mit denselben Kosten das Invalidendeckungskapital einer 35-jährigen Frau (Rentenzahlung bis Alter 65)

   i) die mit 30 Jahren berufsunfähig geworden ist
   ii) die mit 35 Jahren berufsunfähig geworden ist,

   und kommentieren Sie das Ergebnis.

Ausschnitt aus DAV 94 TF und INV 90:

$q_{30}^{aa} = 0{,}689‰$, $i_{30}^{aa} = 1{,}38‰$, $l_{30}^{aa} = 979.442$

Ausschnitt aus ADSTBU 90 F und REAK 90:

z	x	$D^i_{z,x}$	$N^i_{z,x}$
30	30	308.318,668	3.636.294,242
30	65	31.735,636	31.735,636
31	31	296.460,258	3.501.785,555
31	65	32.791,365	32.791,365
30	35	167.793,986	2.459.106,601
35	35	253.415,471	3.023.983,467
35	65	37.609,966	37.609,966

z = Eintrittsalter der Berufsunfähigkeit

Lösung:

a) Leistungsbarwert:

$$A=(1+\gamma_2)\cdot i_x\cdot\left(1-\frac{q^{aa}_x}{2}\right)\cdot v^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(a^i_{x,x,\overline{65-x}|}+a^i_{x+1,x+1,\overline{65-x-1}|})-\frac{1}{24}\right)$$

wobei

$$a^i_{z,x,\overline{65-x}|}=\frac{N^i_{z,x}-N^i_{z,65}}{D^i_{z,x}}$$

$$N^i_{z,x}=\sum_{j=x}^{65}D^i_{z,j}\,,$$

und

$$D^i_{z,x}=l^i_{z,x}\cdot v^x,$$

$$l^i_{z,z}=1.000.000 \text{ und } l^i_{z,x+1}=l^i_{z,x}(1-q^i_{z,x}-r_{z,x}).$$

Bruttojahresbeitrag:

$$B=\text{Rente} * \frac{A+\gamma_1}{1-\beta-\alpha}$$

b)

$$\frac{1}{2}\cdot\left(a^i_{x,x,\overline{65-x}|}+a^i_{x+1,x+1,\overline{65-x-1}|}\right)-\frac{1}{24}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3.636.294{,}242-31.735{,}636}{308.318{,}668}+\frac{3.501.785{,}555-32.791{,}365}{296.460{,}258}\right)-\frac{1}{24}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(11{,}691016+11{,}701380)-0{,}041667$$

$$=11{,}654531$$

$$A=(1+2\%)\cdot 1{,}38‰\cdot(1-0{,}3445‰)\cdot 0{,}980581\cdot 11{,}654531$$
$$=0{,}016081$$

$$\mathbf{B}=12.000\cdot\frac{A+1\%}{1-5\%-40‰}$$
$$=\underline{343{,}93}$$

c) ${}_{m}V^{i}_{z,x}=12.000\cdot(1+\gamma_2)\cdot a^{i}_{z,35,\overline{30}|}$

$\underline{z=30:}$

$$=12.000\cdot 1{,}02\cdot\frac{2.459.106{,}601-31.735{,}636}{167.793{,}986}$$

$$=\underline{\underline{177.068}}$$

$\underline{z=35:}$

$$=12.000\cdot 1{,}02\cdot\frac{3.023.983{,}467-37.609{,}966}{253.415{,}471}$$

$$=\underline{\underline{144.242}}$$

Da die Sterblichkeit in den ersten Jahren der Berufsunfähigkeit wesentlich höher ist als die Normalsterblichkeit, ist für die gerade berufsunfähig gewordene Frau eine wesentlich geringere Reserve zu stellen. Außerdem ist für diese Frau die Reaktivierungswahrscheinlichkeit deutlich höher als für die seit 5 Jahren berufsunfähige Frau.

Aufgabe 6 (45 Punkte)

Der Rückgewährfaktor in der Versicherung anomaler Risiken ist definiert als Quotient aus dem Risikozuschlag Z^R bei Rückgewähr der Zuschläge im Erlebensfall und dem Risikozuschlag Z ohne Rückgewähr. Vereinbart sei eine Risikoversicherung gegen laufende Beitragszahlung mit $x=50$ und $x+n=53$. Ferner sei $q_{50}=6{,}751‰$, $q_{51}=7{,}485‰$, $q_{52}=8{,}302‰$ und $i=0{,}04$.
Berechnen Sie den Rückgewährfaktor, wenn von Storno und Kosten abgesehen wird,

a) bei einer multiplikativen Übersterblichkeit von 50%, d.h. $q'_x=1{,}5\,q_x$
b) bei einer additiven Übersterblichkeit von 3‰, d.h. $q'_x=q_x+0{,}003$.
c) Die Übersterblichkeit sei so beschaffen, daß die Sterblichkeitsintensität additiv um den (positiven) Betrag c erhöht werde. Wie hängt in diesem Fall der Rückgewährfaktor von c ab? Interpretation?

$\left(\text{Hinweis: } p_x=\exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}\,ds\right) \text{ mit } \mu_x=\text{Sterblichkeitsintensität des Alters } x\right)$.

Lösung:

Mit $r=r_{x:n}=\frac{Z_R}{Z}$ gilt nach dem Äquivalenzprinzip:

$$Z^R\cdot\ddot{a}'_{x:n}=Z\cdot\ddot{a}'_{x:n}+n\cdot Z^R\cdot\frac{D'_{x+n}}{D'_x}$$

$$\Rightarrow\ Z^R\left(\ddot{a}'_{x:n}-n\cdot\frac{D'_{x+n}}{D'_x}\right)=Z\cdot\ddot{a}'_{x:n}$$

$$\Rightarrow\ r=\frac{\ddot{a}'_{x:n}}{\ddot{a}'_{x:n}-n\cdot\frac{D'_{x+n}}{D'_x}} \tag{+}$$

Für $x=50$, $n=3$ gilt weiter:

$$r=\frac{D'_{50}+D'_{51}+D'_{52}}{D'_{50}+D'_{51}+D'_{52}-3\cdot D'_{53}}$$

$$=\frac{l'_{50}\cdot v^{50}(1+v\,p'_{50}+v^2\cdot p'_{50}\cdot p'_{51})}{l'_{50}\cdot v^{50}(1+v\,p'_{50}+v^2\,p'_{50}\,p'_{51}-3v^3\,p'_{50}\,p'_{51}\,p'_{52})}$$

$$=\frac{1+v\,p'_{50}+v^2\,p'_{50}\,p'_{51}}{1+v\,p'_{50}+v^2\,p'_{50}\,p'_{51}-3v^3\,p'_{50}\,p'_{51}\,p'_{52})}$$

a) Mit $q'_x = 1{,}5\, q_x$ gilt:

$$q'_{50} = 1{,}5 \cdot 6{,}751‰ \Rightarrow p'_{50} = 0{,}98987$$
$$q'_{51} = 1{,}5 \cdot 7{,}485‰ \Rightarrow p'_{51} = 0{,}98877$$
$$q'_{52} = 1{,}5 \cdot 8{,}302‰ \Rightarrow p'_{52} = 0{,}98755$$

und damit

$$r = \frac{2{,}85671}{2{,}85671 - 2{,}57783} = 10{,}2435$$

b) Mit $q'_x = q_x + 0{,}003$ ergibt sich:

$$p'_{50} = 0{,}99025$$
$$p'_{51} = 0{,}98952$$
$$p'_{52} = 0{,}98870, \text{ also}$$

$$r = \frac{2{,}85811}{2{,}85811 - 2{,}58378} = 10{,}4185$$

c) Aus $\mu'_x = \mu_x + c$ folgt:

$$p'_x = e^{-\int_0^1 (\mu_{x+s} + c)\, ds} = e^{-c} \cdot p_x,$$

also

$$\ddot{a}'_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p'_x \cdot v^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k \cdot c} \cdot v^k \cdot {}_k p_x,$$

und damit nach (+)

$$r = \frac{\ddot{a}'_{x:n}}{\ddot{a}'_{x:n} - n \cdot \dfrac{D'_{x+n}}{D'_x}} = \frac{1}{1 - \dfrac{n \cdot D'_{x+n}}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:n}}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{n \cdot {}_n p'_x \cdot v^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-k \cdot c} \cdot v^k \cdot {}_k p_x}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{n \cdot e^{-n \cdot c}\, {}_n p_x \cdot v^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-kc} \cdot v^k \cdot {}_k p_x}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{n \cdot {}_n p_x \cdot v^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{c \cdot (n-k)} \cdot v^k \cdot {}_k p_x}}$$

Mit wachsendem c fällt der Rückgewährfaktor streng monoton.