Bericht zur Prüfung im Oktober 2005 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)
und *Michael Pannenberg* (Köln)

Am 22.10.2005 wurde in Köln die neunte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 87 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 72 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

1. Aufgabe (30 Punkte)

Es sei $E(y) < 1$ der Erwartungswert für die im Altersintervall $(y-0,5, y+0,5)$ einer Frau geborenen Kinder , $15 \leq y \leq \omega$, und es werde angenommen, dass die Kinder stets in der Mitte dieser Intervalle geboren werden.
$N(y) = \sum_{k=0}^{\omega-y} E(y+k)$ sei der Erwartungswert für die Gesamtzahl der vom Alter y an geborenen Kinder einer Frau und $S(y) = \sum_{k=0}^{\omega-y} N(y+k)$.
Die Sterblichkeit der Kinder werde vernachlässigt.
Versichert seien Waisenrenten für die leiblichen Kinder der Frau. Das Schlussalter der berechtigten Kinder für die Zahlung der Waisenrente sei z.
Bitte geben Sie unter Verwendung der Kommutationswerte $N(y)$ und $S(y)$ die Formeln an für

a) die erwartete Anzahl $K(y,z)$ der waisenrentenberechtigten Kinder einer Frau des Alters y,

b) das durchschnittliche Alter $A(y,z)$ der waisenrentenberechtigten Kinder, wenn die Mutter unmittelbar nach Erreichen des Alters y stirbt

c) den Barwert der durch Todesfälle im Alter $(y, y+1)$ der Mutter ausgelösten, monatlich zahlbaren Waisenrenten des Schlussalters z, bezogen auf die Jahresmitte.

Lösung:

Zu a)

Berücksichtigt werden alle Kinder, die noch nicht z Jahre alt sind; deren Mutter zum Zeitpunkt der Geburt also mindestens $u := \max(15, y-z)$ Jahre alt war. Damit sind alle Kinder der Frau waisenrentenberechtigt, die im Altersbereich $(u, y]$ der Frau geboren wurden. Damit:

$$K(y,z) = \sum_{k=u}^{y} E(k) = N(u) - N(y+1).$$

Zu b)
Das durchschnittliche Alter $A(y,z)$ der waisenberechtigten Kinder einer Frau des Alters y, einschließlich der im Alter y der Frau neugeborenen Kinder, ergibt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} K(y,z) \cdot A(y,z) &= \sum_{k=u}^{y} E(k) \cdot (y-k) \\ &= (N(u) - N(u+1)) \cdot (y-u) + (N(u+1) - N(u+2)) \cdot (y-u-1) \\ &\quad + \ldots + (N(y) - N(y+1)) \cdot 0 \\ &= N(u) \cdot (y-u) - \sum_{k=u+1}^{y} N(k) \\ &= N(u) \cdot (y-u) - (S(u+1) - S(y+1)), \end{aligned}$$

also

$$A(y,z) = \frac{(y-u) \cdot N(u) - S(u+1) + S(y+1)}{K(y,z)}.$$

Zu c)
Da die Sterblichkeit der Kinder vernachlässigt worden ist, sind die durch den Tod der Mutter ausgelösten Waisenrenten Zeitrenten bis zum Schlussalter z. Damit ergibt sich:

$$^{(12)}\ddot{a}^{wai}_{y+\frac{1}{2},z} = \frac{K(y,z) \cdot {}^{(12)}\ddot{a}_{z-A(y,z)} + K(y+1,z) \cdot {}^{(12)}\ddot{a}_{z-A(y+1,z)}}{2}.$$

2. Aufgabe (35 Punkte)

Ab dem Jahr 2006 müssen neu abgeschlossene Altersvorsorgeverträge nach dem AltZertG („Riester-Renten") hinsichtlich des Langlebigkeitsrisikos geschlechtsunabhängig kalkuliert werden. Versetzen Sie sich bitte in die Lage, eine Unisex-Sterbetafel herleiten zu müssen und diskutieren Sie insbesondere die folgenden Gesichtspunkte, auch unter Berücksichtigung pragmatischer Aspekte:

a) zentrale Anforderungen an die (Unisex-)Tafel(n)

b) Erforderliche Schritte bis zur Erstellung einer Sterbetafel 1. Ordnung

c) Überlegungen zum Geschlechtsmix (Mischungsverhältnis Männer und Frauen)

Machen Sie abschließend einen Vorschlag, wie sich (nach Rentenbeginn) die Sterblichkeiten q_x einer Unisexbasistafel 1. Ordnung aus den Werten q_x^M und q_x^F entsprechender Basistafeln 1. Ordnung für Männer und Frauen ableiten lassen.

Lösung:

Zu a)
Zentrale Anforderungen:

- hinreichende Sicherheitszuschläge für die Bildung ausreichend hoher (aber nicht überhöhter) Deckungsrückstellungen,
- Eignung für die Beitragskalkulation,

- Wettbewerbsfähigkeit.

Zu b)
Erforderliche Schritte:

- Auswahl geeigneter Ausgangssterbetafeln für Männer und Frauen, praktischerweise die Sterbetafeln 2004 R für Männer und Frauen (Rentenprodukte!),
- Identifizierung und geeignete Berücksichtigung von Unterschieden zwischen Riester-Beständen und allgemeinen Rentenbeständen,
- Herleitung des Geschlechtsmixes (Sicherheitszuschläge erforderlich, auch wegen des Änderungsrisikos),
- Herleitung einer Unisex-Basistafel,
- Herleitung des Unisex-Trends,
- Erstellung einer Sterbetafel 1. Ordnung durch Integration von Sicherheitszuschlägen (ggf. auch mehrerer Varianten analog zur DAV- Tafel 2004 R).

Zu c)
Überlegungen zum Geschlechtsmix:

- Tendenziell wird der Anteil der Frauen an allen Versicherten zunehmen.
- Der Männeranteil wird aber vermutlich auch zukünftig in der Regel nicht gering sein (großzügige staatliche Förderung, Möglichkeit des Abschlusses von abgeleiteten Verträgen für nicht berufstätige Ehegatten); in jedem Fall muss das Änderungsrisiko im Auge behalten werden.
- Beim Übergang in das Rentenalter ist prinzipiell ein unterschiedliches Selektionsverhalten von Männern und Frauen denkbar, wenn auch aufgrund der Produktcharakteristika und der eventuellen Folgen einer „schädlichen Verwendung“ nicht sehr wahrscheinlich.
- Wegen der geringeren Sterblichkeit von Frauen verschiebt sich die ursprüngliche Geschlechterproportion in den höheren Altern zugunsten der Frauen.

Vorschlag für die Bestimmung von q_x^{Unisex} für $x \geq 65$:
Geht man im Alter 65 von einem (evtl. normierten) Anfangsbestand $l_{65}^M + l_{65}^F$ aus mit dem für dieses Alter gefundenen Mischungsverhältnis und unterstellt man, dass sich Männer- und Frauenteilbestände jeweils mit den geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten aus geeigneten Basissterbetafeln 1. Ordnung abbauen (z.B. DAV 2004 RM/RF), so könnte ein Ansatz lauten:

$$q_x^{\text{Unisex}} = 1 - \frac{l_{x+1}^M + l_{x+1}^F}{l_x^M + l_x^F} = \frac{l_x^M}{l_x^M + l_x^F} \cdot q_x^M + \frac{l_x^F}{l_x^M + l_x^F} \cdot q_x^F \,,$$

woraus auch deutlich wird, dass der Einfluss der Männersterblichkeit auf die Unisex-Sterblichkeit mit wachsendem Alter zurückgeht.

3. Aufgabe (55 Punkte)

Ein kleiner Lebensversicherungsbestand umfasst die folgenden 13000 einjährigen Risikoversicherungen:

Versicherungssumme	Anzahl der Versicherungen
10000	8000
50000	5000

Die Sterbewahrscheinlichkeit q_{x_k} für jedes versicherte Leben betrage 0,02, die stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Risiken sei vorausgesetzt. Es besteht die Möglichkeit, die Risiken zu einer Prämie von 0,025 pro Summe 1 in Retrozession zu geben, so dass zum Beispiel die Rückversicherungsprämie für die rückversicherte Summe 20000 den Betrag von $0,025 \cdot 20000 = 500$ ausmacht. Das Erstversicherungsunternehmen schließt einen Summenexzedentenvertrag mit dem Rückversicherungsunternehmen ab und wählt dabei einen Selbstbehalt $s_0 \in [20000, 50000]$ derart, dass folgendes gilt:

1.) Zuerst soll auf jeden Fall für den Erwartungswert gelten, dass er die vorhandenen Reserven in Höhe von 7 Mio. nicht übersteigt: $E[S + RVP] \leq 7$ Millionen; dabei bezeichnen S die bei dem Erstversicherer verbleibende Schadensumme und RVP die zu zahlende Rückversicherungsprämie.

Ferner soll gelten:

2.) Die Varianz $VAR[S]$ ist unter der Nebenbedingung 1.) minimal (S hat die gleiche Bedeutung wie in 1.)).

a) Wie hoch ist der Selbstbehalt s_0 gewählt worden?

b) Man berechne für den in a) errechneten Wert für s_0 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gilt: $S \leq 5$ Millionen.

Dabei nehme man an, dass die bei dem Erstversicherungsunternehmen verbleibende Schadensumme S eine Normalapproximation erlaubt.

Lösung:

Zu a)

Man berechnet

$$E[S+RVP] = \sum_{1}^{8000} q \cdot 10000 + \sum_{1}^{5000} q \cdot x + \sum_{1}^{5000} (50000 - x) \cdot 0,025 = 7,85 \cdot 10^6 - 25x =: f(x),$$

wenn x den noch zu bestimmenden Selbstbehalt bezeichnet. f ist jedenfalls eine streng monoton fallende Funktion des Selbstbehalts.

Aus der Forderung

$$E[S + RVP] \leq 7 \text{ Millionen} \tag{1}$$

ergibt sich daher wegen $34000 \cdot 25 = 850000$ die Ungleichung $s_0 = x \geq 34000$.

Da andererseits aber $VAR[S]$ ein quadratisches Polynom in x ist, und zwar von der Form

$$\sum_{1}^{8000} q(1-q) \cdot 10\,000 + x^2 \sum_{1}^{5000} q(1-q) \quad =: g(x),$$

muss zwangsläufig $s_0 = x = 34000$ gewählt sein, da g monoton wachsend in x ist und $g(x)$ nur für diesen Wert $s_0 = x$ in dem Bereich oberhalb von 34000 minimal wird.

Zu b)

Für den sich aus Teil a) ergebenden Selbstbehalt 34000 berechnet sich die Rückversicherungsprämie zu *RVP*$= 5000 \cdot 0,025 \cdot 16000 = 2$ Millionen, und deswegen gilt nach (1):

$$E[S] = 5 \cdot 10^6.$$

Wenn man von einem normalverteilten S ausgeht, verteilt sich S symmetrisch um den Mittelwert, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch ohne Anwendung der Normalverteilungstabelle sofort als 0,5 erkennbar.
Damit muss zur Beantwortung der Frage nicht wirklich die Varianz $VAR[S]$ berechnet werden (diese berechnet sich übrigens zu $113286,432 \cdot 10^6 = (336580,4985)^2$).

4. Aufgabe (60 Punkte)

Sie sind Aktuar eines deutschen Lebensversicherers und analysieren einen Bestand B fälliger Rentenversicherungen im Hinblick auf aktuarielle Risiken in den üblichen Rechnungsgrundlagen Kosten, Biometrie und Zins.

a) Beschreiben und kommentieren Sie das Kostenrisiko und das Langlebigkeitsrisiko in qualitativer Hinsicht. Welches Risiko halten Sie für größer? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

b) Beschreiben und kommentieren Sie das Zinsgarantierisiko in qualitativer Hinsicht.

Zur näherungsweisen quantitativen Analyse der Sicherheitsmarge in der Rechnungsgrundlage Zins sei nachfolgend wie üblich

i_0	Rechnungszins
v	rechnungsmäßiger Diskontfaktor
l_x	Anzahl der Lebenden des erreichten Alters x der Sterbetafel mit Schlussalter ω
$D_x = D_x(i_0)$	$= l_x \cdot v^x$
$N_x = N_x(i_0)$	$= \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$
$S_x = S_x(i_0)$	$= \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$
$\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(i_0)$	der rechnungsmäßige Barwert der lebenslänglich jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente vom konstanten Betrag 1

c) Leiten Sie die folgende lineare Näherung her:

Ändert sich der Rechnungszins i_0 um $\Delta i = i_0 - i_1$, so ändert sich $\ddot{a}_x$ in erster Näherung um den Betrag

$$\Delta\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(i_0) - \ddot{a}_x(i_1) \approx -v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \Delta i,$$

und die relative Änderung beträgt

$$\frac{\Delta\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \approx -v \cdot \frac{S_{x+1}}{N_x} \cdot \Delta i.$$

d) Geben Sie eine Näherungsformel für den Betrag der stillen Reserve in der Rechnungsgrundlage Zins für den Bestand B an.

Unterstellen Sie hierzu eine flache Zinsstruktur mit Marktzins i_1 für alle Laufzeiten. Nennen Sie vereinfachende Annahmen über die Zusammensetzung des Bestands B und wenden Sie auf dieser Grundlage Aufgabenteil c) an.

Lösung:

Zu a)

Kostenrisiko

Da der Bestand aus fälligen Rentenversicherungen besteht, sind alle Versicherungen beitragsfrei. Für die Kosten der Rentenzahlung und der Vertragsverwaltung wird eine einzelvertragliche Kostenrückstellung (separat oder als Teil der Bilanzdeckungsrückstellung) gebildet, durch deren sukzessive Auflösung die anfallenden Kosten rechnungsmäßig gedeckt werden. Hierbei besteht das Risiko, dass die Kostenrückstellung faktisch nicht ausreichend hoch ist. Dies kann primär daran liegen, dass die benötigten Ist-Kosten höher ausfallen als rechnungsmäßig erwartet, d.h. dass die der Rückstellungsberechnung zu Grunde gelegten rechnungsmäßigen Annahmen über die Kostenentwicklung nicht vorsichtig genug waren (z.B. in Folge von Inflation, einer veränderten Bestandszusammensetzung, ...). Sekundär kann es auch daran liegen, dass die der Rückstellungsberechnung zu Grunde gelegten rechnungsmäßigen Annahmen über Zins und Sterblichkeit zu optimistisch ausfielen.
Das Risiko kann sich sowohl in Form jährlicher Kostenverluste (in einem Bilanzjahr fallen mehr Kosten an, als durch Auflösung und Vererbung von Kostenreserven gedeckt werden können) als auch in Form von Zusatzaufwänden für die Stärkung der Kostenrückstellungen (Kosten-Nachreservierung) manifestieren.

Langlebigkeitsrisiko

Da der Bestand aus fälligen Rentenversicherungen besteht, tritt das Sterblichkeitsrisiko in Form des Langlebigkeitsrisikos auf: Auf Grund einer Verbesserung der Sterblichkeit fallen die Sterbewahrscheinlichkeiten niedriger aus als rechnungsmäßig erwartet, so dass weniger durch Tod frei werdende Deckungsrückstellungen vererbt werden als erwartet und mehr Renten länger als erwartet zu zahlen sind und insgesamt die rechnungsmäßige Auflösung der Deckungsrückstellung deshalb nicht zur Zahlung der Renten ausreicht.
Das Risiko kann sich sowohl in Form jährlicher Risikoverluste (in einem Bilanzjahr fallen mehr Rentenleistungen an, als durch Auflösung und Vererbung von Deckungsrückstellungen gedeckt werden können) als auch in Form von Zusatzaufwänden für die Stärkung der Deckungsrückstellungen (Renten - Nachreservierung) manifestieren.

Vergleich

Die wirtschaftlichen Erfahrungen der letzten Jahre sind von niedrigen Zinsen, meistens niedriger Inflation und im allgemeinen eher schwachen Kostenanstiegen gekennzeichnet. Eine Stärkung von Kostenrückstellungen war in aller Regel nicht erforderlich.
Die aktuarielle Erfahrung ist dagegen durch zwei Reservestärkungen in Folge zunehmender Langlebigkeit innerhalb von rund 10 Jahren gekennzeichnet. Dementsprechend erscheint es naheliegend, das Langlebigkeitsrisiko derzeit als das größere Risiko anzunehmen.

Zu b)

Die rechnungsmäßige Auflösung der Deckungsrückstellung erlaubt nur dann die Zahlung aller fälligen Renten, wenn der tatsächliche Verlauf nicht ungünstiger als der rechnungsmäßige Verlauf ist und insbesondere auch Zinserträge mindestens in Höhe des Rechnungszinses anfallen: In diesem Sinne ist der Rechnungszins den Versicherten garantiert. Fallen die aktuellen oder zukünftig unter Berücksichtigung realistischer Neuanlage erwarteten Erträge der vorhandenen Kapitalanlagen insgesamt niedriger aus als der Aufwand für Rechnungszins insgesamt, so kann diese Zinsgarantie sowohl zu einem negativen Zinsergebnis als auch zur Notwendigkeit einer Reservestärkung führen. Hierin besteht das Zinsgarantierisiko.

Zu c)

Die Beweisidee kann wie folgt formuliert werden: Fasse $\ddot{a}_x$ als Kuponbonds auf, dessen Barwertänderung bei Änderung des Zinses sich in linearer Näherung an Hand seiner absoluten Duration ermitteln lässt. Alternativ kann man – wie der Begriff „lineare Näherung“ suggeriert – vom Ansatz ausgehen, den Barwert als Funktion des Zinses durch seine Tangente anzunähern (i.e. eine Taylorentwicklung verwenden).
Mit $\ddot{a}_x(i)$ sei der Leibrentenbarwert als Funktion des Zinses i bezeichnet. Mit der wie üblich bezeichneten k-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_kp_x$ und dem nachschüssigen Leibrentenbarwert $a_x(i)$ gilt dann

$$\ddot{a}_x(i) = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k = 1 + \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k = 1 + a_x(i)\,.$$

Die Summendarstellung zeigt, dass $a_x(i)$ der finanzmathematisch berechnete Barwert eines Standard-Kuponbonds mit Kuponzahlungen $C_k = {}_kp_x, \quad k = 1, ..., \omega - x$ ist. Dessen nachfolgend mit D_A bezeichnete Duration ist dann

$$D_A = v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot v^k.$$

Der Summenterm ist offenbar gerade der versicherungsmathematische Barwert einer jährlich nachschüssig lebenslang zahlbaren Leibrente, deren erste Zahlung den Betrag 1 hat und die jährlich um den Betrag 1 steigt. Dieser wird häufig mit $(Ia)_x$ bezeichnet und berechnet sich zu

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}.$$

Daher ist die gesuchte absolute Duration gerade

$$D_A = v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x}.$$

Bei einer Änderung des Rechnungszinses von i_0 zu i_1 ändert sich also der Leibrentenbarwert wie folgt:

$$\Delta\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(i_0) - \ddot{a}_x(i_1) = a_x(i_0) - a_x(i_1) \approx -D_A \cdot (i_0 - i_1) = -D_A \cdot \Delta i = -v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \Delta i\,.$$

Die relative Änderung beträgt deshalb

$$\frac{\Delta\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \approx \frac{-v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \Delta i}{\frac{N_x}{D_x}} = -v \cdot \frac{S_{x+1}}{N_x} \cdot \Delta i\,,$$

wobei sich gleichzeitig die modifizierte Duration ergibt zu

$$D_{\text{mod}} = v \cdot \frac{S_{x+1}}{N_x}\,.$$

Ein alternativer Beweis, der weder den Durationsbegriff nutzt noch die Kenntnis des Barwerts der steigenden Leibrente voraussetzt, lässt sich z.B. wie folgt führen: Da die in der Aufgabe vorgegebene Näherung linear in der Zinsdifferenz ist, liegt es nahe, eine Näherung der Barwertfunktion durch ihre Tangente zu versuchen (was offenbar implizit wieder dem Durationsansatz entspricht, aber den Begriff vermeidet) oder mit anderen Worten eine nach dem linearen Term abbrechende Taylorentwicklung zu verwenden. Aus der o.a. Summendarstellung leitet man dann ab

$$\frac{d}{di}\ddot{a}_x(i) = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot k \cdot v^{k-1} \cdot \frac{dv}{di} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot k \cdot v^{k-1} \cdot (-v^2) = -v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot v^k.$$

Daher liefert eine Taylorentwicklung um den Rechnungszins i_0 bis zum linearen Term

$$\ddot{a}_x(i) \approx \ddot{a}_x(i_0) + (i - i_0) \cdot \frac{d}{di}\ddot{a}_x\ (i)|_{i=i_0} = \ddot{a}_x(i_0) - (i - i_0) \cdot v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot v^k.$$

Daher ist

$$\Delta\ddot{a}_x = \ddot{a}_x(i_0) - \ddot{a}_x(i_1) \approx -(i_0 - i_1) \cdot v \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot v^k.$$

Indem man die Multiplikation mit k durch entsprechende Summation ersetzt und die Summationsreihenfolge vertauscht („Spalten statt Zeilen“), kann man die letzte Summe auswerten (was implizit offenbar die Formel für den steigenden Leibrentenbarwert beweist):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot v^k &= \sum_{k=1}^{\omega-x}\sum_{j=1}^{k} {}_kp_x \cdot v^k = \sum_{j=1}^{\omega-x}\sum_{k=j}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot v^k = \sum_{j=1}^{\omega-x}\sum_{k=j}^{\omega-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} \\ &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=1}^{\omega-x} N_{x+j} = \frac{S_{x+1}}{D_x}\,.\end{aligned}$$

Daher ist auch auf diesem Weg

$$\Delta\ddot{a}_x \approx -(i_0 - i_1) \cdot v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} = -v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \Delta i\,.$$

Zu d)

Der Marktzins betrage konstant i_1 für alle Laufzeiten.

Um wie vorgeschlagen Teil c) anwenden zu können, sei ferner unterstellt, dass der Bestand sich ausschließlich aus fälligen Leibrenten ohne jegliche tarifliche Erweiterungen wie Rentengarantiezeiten oder Todesfallleistungen (wie etwa Übergangsrenten an Witwe(r)(n) oder Waisen oder Rückgewähr der nicht verbrauchten Einmalprämie) zusammensetze. Festzulegen ist auch, ob man die Rückstellungen für Verwaltungskosten als Teil der Verpflichtungen mit erfasst und in die Berechnung mit einbezieht oder nicht.

Der Buchwert BW der Verpflichtungen des Bestands B ergibt sich dann als Summe der rechnungsmäßigen Leibrentenbarwerte aller Bestandsversicherungen:

$$BW = \sum_{x \in B} \ddot{a}_x(i_0)\,.$$

Der zu Marktzinsen bewertete Wert MW ist nach Voraussetzung analog

$$MW = \sum_{x \in B} \ddot{a}_x(i_1)\,.$$

Daher beträgt die stille Reserve in der Rechnungsgrundlage Zins für den Bestand B gerade

$$\begin{aligned} SR = BW - MW &= \sum_{x\in B} \ddot{a}_x(i_0) - \sum_{x\in B} \ddot{a}_x(i_1) = \sum_{x\in B} \Delta\ddot{a}_x \\ &\approx \sum_{x\in B} \left(-v \cdot \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \Delta i\right) = -v \cdot \Delta i \cdot \sum_{x\in B} \frac{S_{x+1}}{D_x}\,. \end{aligned}$$

Dabei erstreckt sich die Summation über alle Versicherungen (von Männern und Frauen) des Bestandes.
Gegebenenfalls kann die Summe vereinfacht und weiter genähert werden, indem z.B. getrennt nach Geschlecht und sortiert nach Größenklassen für Rentenhöhen und damit den Wert des Quotienten summiert wird.