Bericht zur Prüfung im Oktober 2004 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Klaus Allerdissen* (Düsseldorf) und *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)

Am 23.10.2004 wurde in Bad Neuenahr die achte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 117 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 111 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

1. Aufgabe (60 Punkte)

Gegenstand dieser Aufgabe ist die Modifizierung der ausgeglichenen Basistafeln, die den DAV-Sterbetafeln 2004 R zugrunde liegen. In diesem Zusammenhang seien die folgenden Modellvoraussetzungen und Bezeichnungen gegeben:

M = Modellbestand = $\bigcup_x M_x$

L_x^M = Anzahl der x-jährigen in M = Anzahl der Personen aus M_x

T_x = Anzahl der im Alter x Gestorbenen aus M_x in einer Beobachtungsperiode (Zufallsvariable)

V_x = Deckungsrückstellung zum Vertrag eines Versicherten des Alters x (pauschalierter Durchschnittswert, der nur von x abhängt)

q_x = aus dem Beobachtungsmaterial ermittelte Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung.

Die Zahl der Todesfälle eines Alters x sei binomialverteilt mit $B(L_x^M, q_x)$, die Rentenhöhen aller Verträge des Bestandes seien identisch, und es sei sichergestellt, dass die während der Beobachtungsperiode im Gesamtbestand durch Tod freiwerdende Deckungsrückstellung $\sum_x T_x \cdot V_x$ durch eine normalverteilte Zufallsvariable angenähert werden kann. Die Zufallsvariablen T_x seien stochastisch unabhängig.

a) Gesucht sei nun bei gegebenem Sicherheitsniveau 1-α ein additiver Schwankungsabschlag

$$s_x^\alpha = s^\alpha \cdot q_x$$

derart, dass

$$P\Big(\sum_x T_x \cdot V_x \geq \sum_x (q_x - s_x^\alpha) \cdot L_x^M \cdot V_x\Big) \geq 1-\alpha\,. \tag{1}$$

Bitte leiten Sie aus dieser Forderung eine Bestimmungsgleichung für den altersunabhängigen Faktor s^α her.

b) Berechnen Sie die zu 1-α = 0,95 und s^α = 0,065 gehörige Größe des Modellbestands. Dabei werde die Sterbewahrscheinlichkeit q_x eines jeden Alters (stark vereinfachend) mit einer unterstellten mittleren Sterbewahrscheinlichkeit des Gesamtbestandes von 7,0‰ gleichgesetzt, und V_x sei identisch mit einer altersunabhängigen Konstante V.

c) Zusätzlich zu dem Schwankungsabschlag wird zur Berücksichtigung der Irrtumsrisiken ein altersunabhängiger multiplikativer Abschlag auf die Basistafel angesetzt. Geben Sie mindestens drei Gründe an, die diesen Abschlag erforderlich machen.

Lösung:

Zu a)

Da die T_x stochastisch unabhängig und $B(L_x^M, q_x)$ - verteilt sind, kann aufgrund der Voraussetzungen $\sum_x T_x \cdot V_x$ durch eine normalverteilte Zufallsvariable approximiert werden mit Erwartungswert $\sum_x q_x \cdot V_x \cdot L_x^M$ und Varianz $\sum_x V_x^2 \cdot Var(T_x) = \sum_x V_x^2 \cdot q_x \cdot (1-q_x) \cdot L_x^M$. Damit folgt aus (1):

$$P(\sum_x T_x \cdot V_x \geq \sum_x (q_x - s^\alpha \cdot q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x) \geq 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(Z \geq \frac{\sum_x (q_x - s^\alpha \cdot q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x - \sum_x q_x \cdot V_x \cdot L_x^M}{\sqrt{\sum_x q_x \cdot (1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}}) \geq 1-\alpha$$

(wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable sei)

$$\Leftrightarrow P(Z \geq \frac{-s^\alpha \cdot \sum_x q_x \cdot L_x^M \cdot V_x}{\sqrt{\sum_x q_x \cdot (1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}}) \geq 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{s^\alpha \cdot \sum_x q_x \cdot L_x^M \cdot V_x}{\sqrt{\sum_x q_x \cdot (1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}}) \geq 1-\alpha$$

(wegen der Symmetrie der Verteilung von Z)

$$\Leftrightarrow \frac{s^\alpha \cdot \sum_x q_x \cdot L_x^M \cdot V_x}{\sqrt{\sum_x q_x \cdot (1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}}) \geq u_{1-\alpha} \tag{2}$$

($u_{1-\alpha} = (1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung)

$$\Leftrightarrow s^\alpha \geq \frac{\sqrt{\sum_x q_x(1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}}{\sum_x q_x \cdot L_x^M \cdot V_x} \cdot u_{1-\alpha}$$

Zu b)

Aus der Lösung zu a) folgt (s. Ungleichung (2)):

$$\frac{s^\alpha \cdot \sum_x q_x \cdot L_x^M \cdot V_x}{\sqrt{\sum_x q_x(1-q_x) \cdot L_x^M \cdot V_x^2}} \geq u_{1-\alpha} \quad ,$$

woraus mit den Vorgaben der Aufgabe folgt:

$$\frac{0,065 \cdot V \cdot 0,007 \cdot \sum_x L_x^M}{V \cdot \sqrt{0,007 \cdot 0,993} \cdot \sqrt{\sum_x L_x^M}} \geq 1,645$$

$$\sqrt{\sum_x L_x^M} \geq 301,4242$$

$$\sum_x L_x^M \geq 90.856,56$$

Der Bestand muss also etwas mehr als 90.000 Risiken umfassen.

Zu c)

Der Abschlag für das Irrtumsrisiko berücksichtigt die Schätzunsicherheiten, die durch Besonderheiten des zugrundeliegenden Beobachtungsmaterials verursacht sein können, und das Modellrisiko. Insbesondere seien folgende Risiken angesprochen, die zumeist in Unterschieden zwischen dem Modellbestand und dem tatsächlichen Unternehmensbestand („Anwendungsbestand“) liegen:

- Unterschiede in der Bestandsstruktur (Altersstruktur, Geschäftsmix) zwischen Herleitung und Anwendung,
- Unterschiede in der Selektionsstruktur (Altersstruktur der Versicherungsbeginne in Aggregattafeln, Höhe der Selektionseffekte),
- Unterschiede im Sterblichkeitsniveau bei unterschiedlichen LVU (u.a. abhängig von Vertriebs-/Kundenstruktur, Geschäftsmix) und somit potentiell auch zwischen Herleitung und Anwendung,
- mögliche strukturelle Abweichungen des zukünftigen Neugeschäfts gegenüber den für die Herleitung analysierten Teilbeständen (u.a. verändertes Kundenverhalten aufgrund veränderter steuerlicher Rahmenbedingungen) und
- statistische Fluktuationen im Herleitungsbestand (Parameterschätzunsicherheit innerhalb des Modellbestands).

2. Aufgabe (60 Punkte)

Eine alte Bestandsgruppe einer Lebensversicherungsgesellschaft mit hohen Sterbewahrscheinlichkeiten besteht aus folgenden einjährigen Risikoversicherungen mit vier Gruppen und den Summen $S_k = 1$ bzw. 2 gemäß folgender Tabelle:

k	q_k	S_k	Anzahl
1	0,02	1	500
2	0,02	2	500
3	0,10	1	300
4	0,10	2	500

Es wird vorausgesetzt, dass die einzelnen Policen stochastisch unabhängig sind.

a) Mittels Normalapproximation berechne man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Gesamtschadensumme S den Wert 200 übersteigt.

b) Wie hoch ist die Netto-Prämie für einen Stop-Loss-Vertrag mit Selbstbehalt $c = 200$ für die obige Schadensumme S unter der Annahme, dass S normalverteilt ist?

c) Anleitung zu b): Verwende folgende allgemeine Formel für die Netto-Prämie $E\left[(S-c)^+\right]$ eines Stop-Loss-Vertrages mit Selbstbehalt c unter der Voraussetzung, dass die kumulierte Schadensumme S eines Versicherungsbestandes näherungsweise normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Varianz σ^2:

$$E\left[(S-c)^+\right] = (\mu - c)N(\frac{\mu - c}{\sigma}) + \sigma \cdot \varphi(\frac{\mu - c}{\sigma})\,, \tag{3}$$

dabei bezeichnen N die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und φ die zugehörige Dichtefunktion, d.h. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Man beweise die Formel (3) .

Lösung:

Zu a)

Es ist $E(S) = \sum_1^{1800} E(X_i) = \sum_1^4 n_k\mu_k = 160$ sowie $VAR(S) = \sum_1^{1800} VAR(X_i) = \sum n_k\sigma_k^2 = 256.$ Deswegen hat man unter der Hypothese einer möglichen Normalapproximation

$$\begin{aligned} P(S > 200) &= P(\tfrac{S-E[S]}{\sqrt{VAR(S)}} > \tfrac{200-E[S]}{\sqrt{VAR(S)}}) = 1 - N((200-160)/\sqrt{256}) \\ &= 1 - N(2,5) \approx 1 - 0,9938 = 0,0062 \end{aligned}$$

Zu b)

Aufgrund der angegebenen Formel hat man mit $\frac{\mu-c}{\sigma} = -2,5$ für den ersten Term auf der rechten Seite der Formel (3): $-40 \cdot 0,0062 \approx -0,248$ und für den zweiten Term ergibt sich der Wert $16 \cdot 0,043936933/\sqrt{2\pi} = 0,280452807$ insgesamt also 0,032452807.

Zu c) (Beweis der Formel (3))

Es ist

$$\begin{aligned} p(c) \;:=\; E\left[(S-c)^+\right] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^\infty (\sigma x + \mu - c)e^{-\frac{x^2}{2}}\sigma dx \\ &= \sigma\int_k^\infty (x-k)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

mit $k := \frac{c-\mu}{\sigma}$ und φ Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung.

Wegen $x \cdot \varphi(x) = -\varphi'(x)$ ist $\sigma\int_k^\infty x\varphi(x)dx = -\sigma(\varphi(\infty) - \varphi(k)) = \sigma\varphi(k)$ und $-\sigma\int_k^\infty k\varphi(x)dx$ berechnet sich zu $(\mu-c)(1-N(k)) = (\mu-c)N(-k)$, und genau das beweist die Behauptung.

3. Aufgabe (60 Punkte)

Zwei Lebensversicherungsunternehmen weisen unter individuellen best-estimate Annahmen zum 31.12.2003 für ihren jeweils **geschlossenen** Bestand folgende weitere ausschüttungsfähige Cashflows in Tsd. € auf:

	2004	2005	2006	2007	2008
LV A:	1000	1201	500	1100	299
LV B:	79	200	1500	1800	1000

Das Eigenkapital beider Gesellschaften betrage 5000.
Als (jeweiliger) Vorstand dieser LV-Gesellschaften haben Sie von den (jeweiligen) Anteilseignern die Vorgabe erhalten, einen Return on Equity (RoE; Dividendenausschüttung im Verhältnis zum eingesetzten Eigenkapital von 5000) von jährlich mindestens 15% zu erwirtschaften (Steuern sollen hier unberücksichtigt bleiben).
Gleichzeitig wird für die Embedded Value Berechnungen eine Risikodiskontrate von 10% fest gelegt. Kapitalbindungskosten bleiben unberücksichtigt.

a) Diskutieren Sie die Angemessenheit der Rentabilitätsvorgabe der Anteilseigner für das Jahr 2004 für die jeweilige Gesellschaft anhand der o.g. Cashflows und des PVFP der beiden Gesellschaften.

b) Welches Management arbeitet – bezogen auf den Stichtag 31.12.2003 – aus Ihrer Sicht erfolgreicher, wenn es gelingt, die best-estimate Annahmen in der Zukunft zu erfüllen? Begründen Sie Ihre Ansicht.

c) Geben Sie eine alternative Formel an, um den Erfolg des Managements für das Jahr 2004 sachgerecht abzubilden. Bitte erläutern Sie diese.

d) Betrachten Sie nun nur Gesellschaft A. Die Anteilseigner haben ihre Return-Erwartung von 15% für den geschlossenen Bestand zwar beibehalten, erwarten aber lediglich eine Dividendenausschüttung von 7% für 2004 für das Gesamtgeschäft. Die Risikodiskontrate bleibt unverändert. Der Cashflow einer im Jahr 2004 geschriebenen Neugeschäftseinheit sehe wie folgt aus:

2004	2005	2006	2007	2008
-200	50	60	70	80

Wie viele Neugeschäftseinheiten kann die Gesellschaft aus Ihrer Sicht schreiben, ohne die Anforderungen der Anteilseigner zu verletzen? Begründung?

e) Welche Kapitalbindungskosten (Prozentsatz) sind in der Embedded Value Berechnung sinnvollerweise für das Neugeschäft anzusetzen, um die Profitabilität des Neugeschäftes – gemessen an den Rentabilitätsvorgaben der Anteilseigner – zu messen? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung:

Zu a)

Bei einer Risikodiskontrate von 10% berechnen sich die PVFPs der Gesellschaften per 31.12.2003 zu

A) 3.214,28 €
B) 3.214,43 €

Die Werthaltigkeit der Bestände unter best-estimate Annahmen ist also identisch. Die Cashflows hingegen sind absolut nicht gleichförmig, sodass die Rentabilitätsvorgabe von 15% RoE wenig Aussagekraft besitzt. Gesellschaft A hat in 2004 einen RoE von 20%, Gesellschaft B hingegen nur von 1,58%. Der einzige Vorteil von Gesellschaft A liegt darin, dass die Gewinne „sicherer“ sind, wenn man unterstellt, dass das Irrtumsrisiko in den best-estimate Annahmen mit zunehmender Dauer steigt. Eine reine Betrachtung des RoE führt aber zwangsläufig zu einer Fehlinterpretation und damit möglicherweise auch zu einer Fehlsteuerung.

Zu b)

Wie in a) gezeigt, arbeiten beide Managements gleich erfolgreich, wenn sie die best-estimate Annahmen erfüllen, denn die Cashflows führen zu identischen Embedded Values.

Zu c)

Als sinnvolles Maß für den Managementerfolg kann folgende Formel heran gezogen werden: Es sei EV_t der Embedded Value per Jahresultimo t, CF_{t+1}der Cashflow im Jahr $t+1$. Dann berechnen wir den Geschäftserfolg GE_{t+1} wie folgt:

$$GE_{t+1} = CF_{t+1} - EV_t + EV_{t+1}$$

Begründung:
Für Gesellschaft A ergibt sich $GE_{2004} = 1.000 - 3.214 + 2.536 = 322$
Für Gesellschaft B ergibt sich $GE_{2004} = 79 - 3.214 + 3.457 = 322$

Diese Formel beschreibt die Veränderung der Werthaltigkeit des (auslaufenden) Bestandes zzgl. des realisierten Jahresgewinns. Da die Gesellschaften per 31.12.2003 über identische Embedded Values verfügen, macht es Sinn, den Geschäftserfolg in 2004 (Realisierung der best-estimate Annahmen) ebenfalls als identisch zu bewerten.

Zu d)

Gesellschaft A erwirtschaftet in 2004 einen RoE von 20%. Da nur 7% (= 350€) ausgeschüttet werden müssen, bleiben der Gesellschaft 650€ für die Reinvestition in Neugeschäft. Allein unter RoE-Gesichtspunkten können damit 3,25 (= 650/200) Neugeschäftseinheiten geschrieben werden. Die Werthaltigkeit des Neugeschäftes spielt bei der reinen RoE-Betrachtung – wie oben erläutert – nur eine untergeordnete Rolle.

Zu e)

Der Embedded Value setzt sich zusammen aus dem adjustierten Eigenkapital zuzüglich dem Bestandswert (PVFP), abzüglich der Kapitalbindungskosten (CoC). Wenn die Anteilseigner auf das eingesetzte Kapital eine Verzinsung von 15% fordern, macht es Sinn, in der Embedded Value Berechnung für das Neugeschäft Kapitalbindungskosten ebenfalls in Höhe von 15% anzusetzen. Nur wenn die Differenz PVFP–CoC unter diesen Voraussetzungen nicht negativ ist, sollte entsprechendes Neugeschäft geschrieben werden. Anderenfalls wäre eine Ausschüttung an die Anteilseigner einer Reinvestition in Neugeschäft vorzuziehen.