Bericht zur Prüfung im Oktober 2003 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Klaus Allerdissen* (Düsseldorf) und
Hans-Jochen Bartels (Mannheim)

Am 18.10.2003 wurde die achte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 114 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 97 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

1. Aufgabe (45 Punkte)

Ein Versicherer verlange für eine einjährige Risikoversicherung vom Kunden die (einmalige) Bruttojahresprämie B_x (x = Eintrittsalter). Die für die Prämienkalkulation verwendeten Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung seien neben q_x und i die Kostenzuschläge
α : (einmalig) in ‰ der ausreichenden Prämie
β : in % der ausreichenden Prämie
γ : in ‰ der garantierten Todesfallsumme.
Dazu komme ein jährlicher Stückkostenzuschlag K (der wie üblich Bestandteil der Bruttoprämie, nicht aber der ausreichenden Prämie sei).
Die entsprechenden, im Unternehmen bekannten, Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung seien mit $q'_x, i', \alpha', \beta', \gamma'$ undK' bezeichnet.

a) Welche Todesfallleistung (= garantierte Todesfallsumme zuzüglich Todesfallbonus) kann der Versicherer maximal aus der Prämie B_x finanzieren? Geben Sie bitte eine allgemeine Gleichung an.

b) Berechnen Sie konkret die maximale Todesfallleistung (auf volle Euro abgerundet) für einen 20-jährigen und einen 60-jährigen Mann bei einer garantierten Todesfallsumme von 100.000 €, wenn die folgenden Rechnungsgrundlagen gegeben sind:

Rechnungsgrundlage	1. Ordnung	2. Ordnung
Sterblichkeit	DAV 1994 TM	0,65·DAV 1994 TM
Zins	3,25 %	5,0 %
Abschlusskosten (α)	40 ‰	50 ‰
Inkassokosten (β)	3 %	0 %
Verwaltungskosten (γ)	2,0 ‰	1,0 ‰
Stückkosten (K)	12 Euro	50 Euro

c) Kommentieren Sie die Ergebnisse.

(Hinweis: $q_{20} = 1,476‰, q_{60} = 17,625‰$, jeweils aus DAV 1994 TM)

Lösung:

Zu a)

Die Risikoprämie („2. Ordnung") des relevanten Alters x kann maximal gleich B_x abzüglich der tatsächlich benötigten Kostenzuschläge sein, also

$$q'_x \cdot v' \cdot T \leq B_x - (\alpha' + \beta') \cdot (B_x - K) - \gamma' \cdot S - K',$$

wobei $S :=$ garantierte Todesfallsumme
$T := S+$ Todesfallbonus
Damit folgt:

$$T \leq \frac{B_x \cdot (1 - \alpha' - \beta') + (\alpha' + \beta') \cdot K - \gamma' \cdot S - K'}{v' \cdot q'_x}.$$

Zu b)

$x = 20$:
zunächst werde die ausreichende Prämie (1. Ordnung) für $S = 1$ berechnet:

$$\begin{aligned} B^a_{20} &= v \cdot q_{20} + (\alpha + \beta) \cdot B^a_{20} + \gamma \\ \Rightarrow \quad B^a_{20} &= \frac{v \cdot q_{20} + \gamma}{1 - \alpha - \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{1{,}0325} \cdot 0{,}001476 + 0{,}002}{1 - 0{,}04 - 0{,}03} = 0{,}00368767 \end{aligned}$$

$\Rightarrow B_{20} = 368{,}767 + 12 = 380{,}77$, und damit

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{380{,}77 \cdot (1 - 0{,}05) + 0{,}05 \cdot 12 - 0{,}001 \cdot 100000 - 50}{0{,}65 \cdot 0{,}001476} \cdot 1{,}05 \\ &= \frac{212{,}322}{0{,}65 \cdot 0{,}001476} \cdot 1{,}05 = 232382 \end{aligned}$$

$x = 60$:

$$B^a_{60} = \frac{v \cdot q_{60} + \gamma}{1 - \alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{1{,}0325} \cdot 0{,}017625 + 0{,}002}{0{,}93} = 0{,}0205056$$

$\Rightarrow \mathrm{B}_{60} = 2050{,}56 + 12 = 2062{,}56$

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &\leq \frac{2062{,}56 \cdot (1 - 0{,}05) + 0{,}05 \cdot 12 - 0{,}001 \cdot 100000 - 50}{0{,}65 \cdot 0{,}017625} \cdot 1{,}05 \\ &= 165895 \end{aligned}$$

Zu c)

Selbst bei „gleichbleibendem Abstand" $q'_x = f \cdot q_x$ der Sterbetafeln 1. und 2. Ordnung ist ein über alle Alter gleichbleibender Todesfallbonus im allgemeinen nicht korrekt. Dies liegt daran, dass die kalkulierten und die tatsächlichen Kosten ebenso wenig proportional zu den q_x sind wie die Bruttoprämien, vor allem aber an dem sehr viel höheren q_x im Alter 60. Wenn die in der Aufgabe vorgegebenen Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung zutreffen, müsste für unterschiedliche Alter auch ein unterschiedlicher Todesfallbonus kalkuliert werden. Die übliche Praxis (gleicher Todesfallbonus für alle Alter als Durchschnitt über einen Bestand) wäre zumindest in Frage zu stellen.

2. Aufgabe (15 Punkte)

Erläutern Sie bitte den Grundgedanken und einige Vorzüge des Ausgleichsverfahrens von Whittaker-Henderson (Formelansätze nicht erforderlich).

Lösung:

Bei dem Verfahren von Whittaker-Henderson handelt es sich grundsätzlich um ein mechanisches Ausgleichsverfahren. Es zeichnet sich dadurch aus, dass es gelingt, die Summe aus einem Anpassungs- und einem Glättungsmaß (kleinste Quadrate bzw. klassische Differenzen s-ter Ordnung) zu minimieren und damit zu optimieren. Damit sind zwar Anpassung und Glättung nicht gleichzeitig optimal (was auch trivialerweise unmöglich ist), dennoch hat man ein sehr rationales und anschauliches Kriterium, um eine gute Ausgleichung zu erreichen.
Das Optimierungsproblem ist unter realitätsnahen Voraussetzungen stets eindeutig lösbar, die Lösung kann aus einer Matrizengleichung berechnet werden. Weitere Vorzüge sind beispielsweise:

- Durch die Ergänzung von Gewichtungsfaktoren ist es (in Grenzen) möglich festzulegen, ob die Anpassung oder die Glättung einen höheren Stellenwert bekommen soll.
- Auch Randwerte können mit diesem Verfahren ausgeglichen werden.
- Programmierungs- und Rechenaufwand sind akzeptabel.
- Die (nachträgliche) Überprüfung der Güte der Ausgleichung hat regelmäßig die Qualität des Verfahrens bestätigt.

3. Aufgabe (60 Punkte)

In der Hoffnung, die Durchschnittsverzinsung des Kapitalanlagebestandes auf einem hohen Niveau zu halten, kauft der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU zu Jahresbeginn 10 000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 30 €. Die Bank B handelt mit Optionen und bietet unter anderem auch europäische Put- und Call- Optionen auf Aktien des Unternehmens U zum Ausübungspreis 28.50 € und Ausübungszeitpunkt 31.12. an zu folgenden Preisen:

Preis der Call-Option: 4.80 €

Preis der Put-Option: 1.90 €

Der Basispreis ist jeweils 28.50 € und der Ausübungstermin ist bei beiden Optionen der 31.12. Für einjährige Kapitalanlagen beträgt der aktuelle Einjahreszins 8% .
Durch Kauf von 10 000 Put-Optionen zum Ausübungstag 31.12. und Ausübungspreis 28.50 € sichert der Vermögensanleger von VU die obige Kapitalanlage so ab, dass zum 31.12. der Wert von 285 000 € für das Versicherungsunternehmen VU nicht unterschritten werden kann.

a) Mit welcher alternativen Anlagestrategie hätte der Vermögensanleger dieselben Gewinnchancen zum 31.12. realisieren können bei geringeren Kosten ?

b) Beschreiben Sie explizit Arbitrage-Strategien, die sich aufgrund der hier vorliegenden Put- Call- Preisrelation ergeben.

c) Man gehe von korrekten Aktien- und Optionspreisen aus und nehme an, dass die angegebene Zinsrate nicht stimmt. Für welche Jahreszinsrate ergeben sich dann keine Arbitragemöglichkeiten in der oben beschriebenen Situation ?

(Hinweis: Der Einfachheit wegen sind keine Transaktionskosten zu berücksichtigen !)

Lösung:

Zu a)

Es bezeichne S = S(t) den Preis einer Aktie. Für die Preise P(S,t) und C(S,t) europäische Put- bzw. Call-Optionen auf diese Aktie mit jeweils demselben Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T gilt zum Zeitpunkt t <T die sogenannte Put-Call- Relation:
P(S,t) + S(t) = $e^{-r(T-t)}c - x(t) + w(x,t)$.
Diese Relation folgt wegen der No-Arbitrage -Bedingung aus der Tatsache, dass zum Ausübungstermin T die beiden folgenden Portfolios:
Portfolio 1 : 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T ;
Portfolio 2 : 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T + Barbetrag K zum Zeitpunkt T
exakt denselben Wert haben. Dabei entspricht der Faktor $e^{-r(T-t)}$ einem Diskontierungsfaktor, nur daß anders als in klassischer versicherungsmathematischer Schreibweise die kontinuierliche Verzinsung exponentiell geschrieben wird, wie bei zeitstetigen Modellen allgemein üblich. Portfolio 1 entspricht der Anlagestrategie des Vermögensanlegers und bedeutet bezogen auf den Jahresbeginn Gesamtkosten in Höhe von 300 000 + 19 000 = 319 000 €. Alternativ kann der Anleger aber auch den abdiskontierten Betrag 285 000 / 1.08 = 263 888.89 € zum Jahreszins von 8 % anlegen und 10 000 Calls kaufen zum Preis von 48 000 €, das bedeutet ein niedrigeres Gesamtinvestment von 311 888.89 € bei exakt den gleichen Ertragschancen zum 31.12. Die Differenz dürfte für einige "Free Lunch" reichen.

Zu b)

Eine explizite Arbitrage-Strategie zur Ausnutzung der Preisinkonsistenz bei den Puts und Calls wäre etwa:
Man verkauft je eine Aktie und eine Put-Option zur Zeit t = 0, Ergebnis: 31.90 und kauft gleichzeitig je einen Call und legt den Geldbetrag 28.5 / 1.08 = 26.39 zu 8% für ein Jahr an, Aufwand insgesamt 31.19 €. Das reicht , um die aus dem Verkauf der Aktie und der Put-Option eingegangenen Verpflichtungen zum Jahresende exakt einzulösen, es liegt also eine kongruente Deckung vor. Die Differenz von 31.90 - 31.19 = 0.71 ist dann der realisierte Arbitragegewinn pro Position zum Jahresbeginn.

Zu c)

Gesucht wird derjenige Zins i, für den gilt: P(S,0) + S(0) = K/(1+i) + C(S,0) , d.h. hier mit konkreten Zahlenwerten: 1.90 + 30 = 28.50 / (1+i) + 4.80. Hieraus ergibt sich für i der Wert 5.166 % .

4. Aufgabe (60 Punkte)

Ein Lebensversicherungsunternehmen möchte eine gemischte Lebensversicherung auf den Markt bringen, die eine Asset Allocation bedingungsgemäß festlegt. Diese Kapitalanlagestruktur wird damit dem Kunden garantiert.

I Im konkreten Fall werde die folgende Kapitalanlagestruktur vereinbart: 70% Bonds, 30% Aktien, jeweils am Jahresende zu Marktwerten festgestellt.

II Ferner werde ein Garantiezins von 2,75% festgelegt; aber:

III Nicht festgelegt ist, ob die Garantieverzinsung alljährlich garantiert wird oder zum Ablauf zu finanzieren ist. Insbesondere besteht damit die Alternative, die Rückkaufswerte als prospektives Deckungskapital mit den Rechnungsgrundlagen der Prämienkalkulation oder als Zeitwert der Kapitalanlage festzulegen.

Fragen:

a) Entstehen aus diesem Produkt Anforderungen an die Kapitalausstattung und die Finanzkraft der Gesellschaft? Bitte begründen Sie Ihre Meinung.

b) Sind diese Anforderungen unterschiedlich, je nachdem welche Ausgestaltung von III gewählt wird? Bitte begründen Sie Ihre Meinung.

c) Mit welcher Methodik würden Sie als Aktuar das entstehende Kapitalanlagerisiko modellieren und abschätzen? Bitte skizzieren Sie eine Modellierung, die Sie anwenden würden.

Lösung:

Zu a)
Zunächst entstehen die ganz normalen Anforderungen bzgl. der Solvabilitätsausstattung. Das skizzierte Produkt zeichnet sich darüber hinaus durch eine fest vorgegebene Asset-Struktur aus. Hieraus folgt, dass unabhängig von Marktentwicklungen ein 30%-iger Aktienanteil zu halten ist. Dies hat Auswirkungen auf das bereitzustellende Risikokapital. In Zeiten fallender Aktienmärkte kann nicht die Aktienquote reduziert werden, vielmehr sind Aktien nachzukaufen. Das Risikokapital für diese Quote (grundsätzlich 30%) ist bereitzustellen. Die Anforderungen an die Finanzkraft sind deshalb sehr hoch.

Zu b)
Es genügt, die unterschiedlichen Anforderungen an einem Beispiel zu verdeutlichen. Der Rückkauf stellt eine Option für den Versicherungsnehmer dar. Er kann diese Option ausüben, falls die Marktwerte der aus den Prämien finanzierten Kapitalanlagen unter den Wert der prospektiven Deckungsrückstellung sinken. Dies bedeutet für das Unternehmen einen Verlust, der bei Auszahlung des Zeitwertes ausgeschlossen ist.

Zu c)
Das Kapitalmarktrisiko lässt sich angemessen mit stochastischer Simulation modellieren und abschätzen. Es wird eine Modellierung der beiden Anlageklassen Aktien und Bonds bzgl. der Performance (Rendite) vorgenommen; welche Modellierung jeweils gewählt wird, kann dahin gestellt bleiben. Dann lässt sich das Risikokapital bestimmen, für das in höchstens 1% der Fälle – im Fall der jährlichen Garantie - die erforderliche Portfolioverzinsung von 2,75% nicht erreicht wird.
Im Fall der Ablaufgarantie ist das Risikokapital für das 1%-Quantil zu bestimmen, das zum Ablaufzeitpunkt die Garantiesumme bereitstellt.